


ФИЗИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-124-140>

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 531.534, 531.01, 534.16



Взаимодействие стержня с внешней средой по видоизмененным моделям Винклера

*А. Бегматов, Н. Т. Маматова**

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174,
г. Ташкент, ул. Университетская 4, Узбекистан.

Аннотация. В данной работе исследуется взаимодействие с неподвижной и подвижной внешней средой полугораниченного стержня к концу которого приложено динамическое давление. Взаимодействие с внешней средой происходит (учитывается) по двум видоизмененным моделям Винклеровского типа – взаимодействие зависит от величины перемещения (или деформации). Полагается, что при малых значениях перемещения (или деформации) взаимодействие происходит по закону сухого трения Кулона. При этом, если перемещение (или деформация) больше некоторого критического значения, то совершается переход к модели Винклера (сила трения пропорциональна деформации). Представлена математическая формулировка динамической задачи для полубесконечного стержня, подверженного экспоненциальной динамической нагрузке. Приближенное решение уравнений получено методом интегральных соотношений. Расчеты выполнены с использованием вычислительной системы Maple18. Численные результаты представлены в виде графиков, описывающих изменение скорости, смещения и деформации во времени, а также таблиц, характеризующих время перехода от кулоновского трения к взаимодействию типа Винклера. В статье подробно анализируется влияние параметров трения, скорости внешней среды и характеристик нагрузки на процесс деформации и переход к равновесию.

Ключевые слова: сухое трение Кулона-Амонтона, модель Винклера, взаимодействие с внешней средой, метод интегральных соотношений, свободная граница, колебания.

Получение: 11.03.2026; Исправление: 18.03.2026; Принятие: 25.03.2026; Публикация онлайн: 29.03.2026

Для цитирования. Бегматов А., Маматова Н. Т. Взаимодействие стержня с внешней средой по видоизмененным моделям Винклера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2026. Т. 54. № 1. С. 124-140. EDN: JABPKQ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-124-140>.

Финансирование. Финансирование не проводилось.

Конкурирующие интересы. Конфликт интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: ✉ E-mail: nigmamatova@yandex.ru


Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Бегматов А., Маматова Н. Т., 2026

© ИКИР ДВО РАН, 2026 (оригинал-макет, дизайн, составление)



PHYSICS

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-124-140>

Research Article

Full text in Russian

MSC 74–00, 35Q74, 74H20, 74J05



Interaction of a Rod With an External Medium According to Modified Winkler Models

*A. Begmatov, N. T. Mamatova**

National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, Uzbekistan, str. University, 4.

Abstract. This paper investigates the interaction of a semi-infinite rod with a stationary and moving external medium under dynamic loading applied to the rod end. The interaction with the surrounding medium is described using two modified Winkler-type models. It is assumed that at small values of displacement or deformation the interaction obeys the Coulomb–Amontons dry friction law. When the displacement or deformation exceeds a certain critical value, the friction law changes and the interaction is described by the Winkler model, where the tangential stress is proportional to deformation. A mathematical formulation of the dynamic problem for a semi-infinite rod subjected to exponential dynamic loading is presented. The approximate solution of the governing equations is obtained using the method of integral relations. The calculations are performed using the Maple-18 computational system. Numerical results are presented in the form of graphs describing the evolution of velocity, displacement and deformation over time, as well as tables characterizing the transition time from Coulomb friction to Winkler-type interaction. The influence of the friction parameters, the velocity of the external medium and the loading characteristics on the deformation process and the transition to equilibrium is analyzed in detail.

Key words: Coulomb–Amontons dry friction, Winkler model, rod–environment interaction, method of integral relations, free boundary, wave propagation, dynamic loading.


Received: 11.03.2026; Revised: 18.03.2026; Accepted: 25.03.2026; First online: 29.03.2026

For citation. Begmatov A., Mamatova N. T. Interaction of a rod with an external medium according to modified Winkler models. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2026, 54: 1, 124-140. EDN: JABPKQ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-124-140>.

Funding. No funding was received.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence:  E-mail: nigmamatova@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Begmatov A., Mamatova N. T., 2026

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2026 (original layout, design, compilation)



Введение

В данной работе исследуется взаимодействие с неподвижной ($v_{cp} = 0$) и подвижной ($v_{cp} \neq 0$) внешней средой полугораниченного стержня, к концу которого приложено динамическое давление. Силу трения, возникающую при взаимодействии, определяют формулой

$$F_{mp} = -k \frac{\tau}{\rho}$$

где $k = \text{sign}(u_t - v_{cp})$ – величина, совпадающая со знаком скорости движения сечений стержня относительно окружающей среды; τ – касательное напряжение на поверхности контакта стержня со средой, зависящая от выбранной модели трения; ρ – плотность стержня.

Как известно, существуют различные модели взаимодействия с внешней средой [1-3]. Часто полагают [1, 2, 5-17], что взаимодействие с внешней средой происходит согласно закону сухого трения Кулона-Амонтона [1] и что касательное напряжение определяется формулой

$$\tau = \frac{\lambda L}{S} P \quad (1)$$

где P – контактное давление, λ – коэффициент трения, L – периметр стержня, S – площадь поперечного сечения стержня.

В статье [4] рассмотрен случай, когда касательное напряжение τ пропорционально деформации, а внешняя среда неподвижна:

$$\tau = -\chi \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_{mp} = k \frac{\chi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k = \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2)$$

χ – коэффициент пропорциональности, $\frac{\chi}{\rho}$ имеет размерность ускорения.

При этом, чтобы избежать трудностей, связанных с решением задачи со свободной границей, сигнатура $k = \text{sign}(u_t)$ в законе Кулона (2) заменяется функцией Хевисайда $H \left(t - \frac{x}{a} \right)$. Следует отметить, что этот частный случай имеет физический смысл лишь в том случае, когда скорость u_t положительна в течении всего процесса деформирования.

В работе [3] приведены несколько моделей взаимодействия в грунтовой среде, в частности, модель Винклеровского типа:

$$\begin{cases} \tau = K_+(P, J) \cdot u & \text{при } \frac{du}{dt} \geq 0, 0 \leq u \leq u^*; \\ \tau = f \left(\frac{du}{dt} \right) \cdot P, & \text{при } \frac{du}{dt} \geq 0, u > u^*; \\ \tau = K_-(P, J) \cdot u, & \text{при } \frac{du}{dt} < 0, 0 \leq u \leq u^*; \\ \tau = 0, & \text{при } \frac{du}{dt} < 0, u > u^*; \end{cases} \quad (3)$$

где P – нормальное к поверхности контакта сооружение-грунт напряжение; $K_+(P, J)$ – коэффициент взаимодействия; $K_-(P, J)$ – коэффициент взаимодействия при

возвратном движении сооружения относительно грунта; $f\left(\frac{du}{dt}\right)$ – коэффициент трения, который в общем случае является функцией скорости взаимодействия; u^* – критическое значение относительного смещения, при котором происходит переход от одной стадии взаимодействия в другую.

В данной работе предлагаются следующие видоизменённые модели, в которых переход от модели Кулона (1) к модели Винклера

$$\tau = \tau_B = -\chi \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_{\text{мп}} = k \frac{\chi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k = \text{sign}(u_t - v_{\text{ср}}), \quad (4)$$

происходит при некотором критическом значении перемещения $u = u_0^*$

$$\tau = \begin{cases} \tau_K = \frac{\lambda L}{S} P, & \text{при } |u| < u_0^*, \\ \tau_B = -\chi \frac{\partial u}{\partial x} & \text{при } |u| > u_0^*, \end{cases} \quad (5)$$

или деформации $\varepsilon = \varepsilon^*$:

$$\tau = \begin{cases} \tau_K = \frac{\lambda L}{S} P, & \text{при } |\varepsilon| < \varepsilon^*, \\ \tau_B = -\chi \frac{\partial u}{\partial x} & \text{при } |\varepsilon| > \varepsilon^*, \end{cases} \quad (6)$$

где $v_{\text{ср}}$ – скорость внешней среды.

Далее (5) и (6) будем называть моделями Винклера-Кулона (ВКа) и (ВКб) соответственно.

Рассмотрим осредненное по сечениям полуграниченного стержня одномерное движение. Время t будем отсчитывать от момента приложения давления, а ось Ox направим вдоль оси стержня.

Постановка задачи

Найти в области $x > 0$, $t > 0$ функцию $u(x, t)$ решение уравнений описывающих напряженно-деформированное состояние в возмущенной и невозмущенной частях стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\tau}{\rho}, \quad 0 < x < at, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > at, \quad t > 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (9)$$

граничному условию

$$\sigma(0, t) = -\sigma_0(t), \quad t > 0, \quad (\sigma_0(0) > 0), \quad (10)$$

и динамическому условию непрерывности на фронте упругой волны $x = at$:

$$(\sigma + \rho a \cdot u_t)|_{x=at-0} = (\sigma + \rho a \cdot u_t)|_{x=at+0}, \quad (11)$$

где $\sigma = -E \frac{\partial u}{\partial x}$.

Замечание 1. В уравнении (7) касательное напряжение τ зависит от выбранной модели взаимодействия (5) или (6).

Введем безразмерные функции и безразмерные переменные следующим образом

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \frac{a^2 T^2}{l^2} = 1; \quad \bar{u}(x, t) = \frac{u(x, t)}{U_0}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0} \left(\tau_0 = \frac{\lambda L}{S} P \right) \quad (12)$$

Далее черточки над безразмерными величинами опускаются.

При этом задача (7) – (11) в безразмерных переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k\mu\tau, \quad \mu = \tau_0 \frac{T^2}{\rho U_0}, \quad 0 < x < t, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > t, \quad t > 0, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (15)$$

$$u_x(0, t) = -\sigma_0(t), \quad (\sigma_0(0) > 0), \quad t > 0, \quad (16)$$

$$(u_x + u_t)|_{x=t-0} = (u_x + u_t)|_{x=t+0} \quad (17)$$

Замечание 2. В (16), (17) все величины являются нормированными (см. (26)).

Метод решения задачи

В предлагаемой работе приближенное решение сформулированной выше задачи (13)–(17) получено методом интегральных соотношений (МИС) [5–7] при различных моделях трения.

Согласно МИС искомое решение удовлетворяет уравнению (13) в среднем, т. е. следующему интегральному соотношению

$$\int_0^t \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] dx = \mu \int_0^t k\tau dx. \quad (18)$$

В правой части (18) имеет место равенство

$$\int_0^t k\tau dx = k \int_0^t \tau dx,$$

поскольку изменение знака $k = \text{sign}(u_t - v_{cp})$ происходит в точках $(x_n(t), t)$, $1 \leq n \leq N(t)$, где $N(t)$ число изменений знака на рассматриваемом отрезке времени.

Первое приближение решения уравнения (18) ищется в виде

$$u(x, t) = A_0(t) + A_1(t)x + A_2(t)x^2, \quad (19)$$

$$u_t(x, t) = a_0(t) + a_1(t)\frac{x}{t} + a_2(t)\left(\frac{x}{t}\right)^2, \quad (20)$$

где

$$a_i(t) = t^i \frac{dA_i}{dt}, \quad (i = 0, 1, 2). \quad (21)$$

Далее, удовлетворяя граничным условиям (16), (17) и воспользовавшись интегральным соотношением, получаем уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{dA_2}{dt} \right) + 3 \frac{da_0}{dt} + \frac{3}{2} \left(\frac{da_1}{dt} - \frac{a_1}{t} \right) - 2t \frac{dA_2}{dt} - 6A_2 - 3 \cdot k \cdot (A_1 + A_2 t) + 3 \cdot k \cdot \tau = 0, \quad (22)$$

$$t^2 \frac{dA_2}{dt} + A_2 t + a_0 + a_1 + A_1 = 0. \quad (23)$$

Полученная система уравнений (22), (23) рассматривается, с привлечением (19) – (21) для случая экспоненциального динамического давления:

$$\frac{\sigma_0(t)}{\sigma_0(0)} = \exp(-\alpha t), \quad \sigma_0(0) = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}. \quad (24)$$

при следующих начальных условиях

$$a_0(0) = 1, \quad A_2(0) = 0. \quad (25)$$

Задача исследуется на фазовой плоскости (x, t) следующим образом. Область $t > 0$ на фазовой плоскости отображается преобразованием $\zeta = \frac{x}{t}$ на отрезок единичной длины $0 \leq \zeta \leq 1$, который разбивается точками $\zeta_m = 0.1m = \frac{x_m}{t}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 10$) на 10 равных частей. Затем, с использованием системы Maple18 на этих сечениях находятся изменение нормированной скорости и деформации:

$$\bar{u}_t = \frac{u_t(\zeta, t)}{u_t(0, 0+)}, \quad \bar{\varepsilon} = \bar{u}_x = \frac{u_x(\zeta, t)}{|u_x(0, 0+)|}, \quad (26)$$

которые на графиках обозначаются соответственно через u_t и $\varepsilon = u_x$.

Расчеты и анализ результатов

1. Модель ВКа: касательное напряжение имеет вид (5).

На Рис.1-5 приведены графики скорости и деформации, а на Рис.1а-5а перемещения и деформации для случая неподвижной внешней среды, построенные при следующих значениях параметров деформирования модели ВКа: $\alpha = 0.25$; $\mu = 0.1$; $u_0^* = 2; 4; 5; 6; 8$, $v_{cp} = 0$.

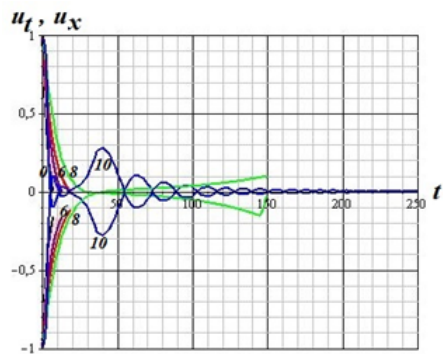


Рис.1

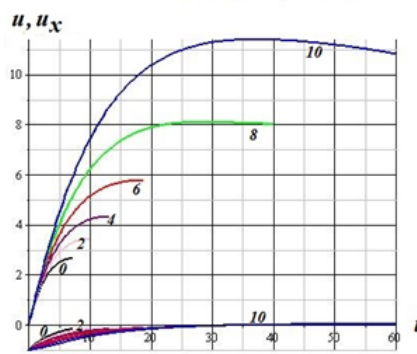


Рис.1а

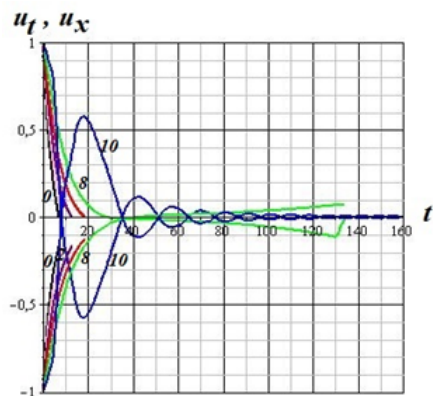


Рис.2

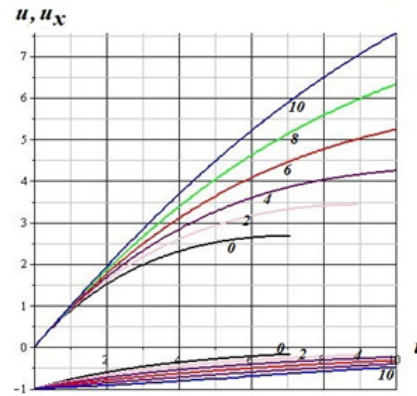


Рис.2а

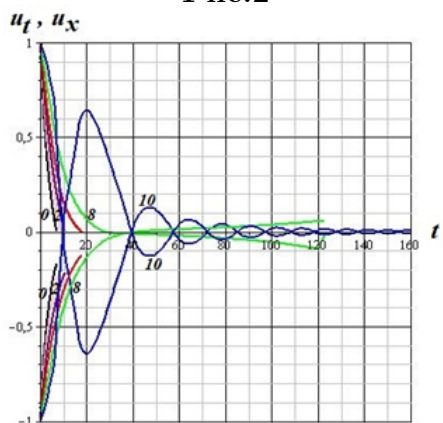


Рис.3

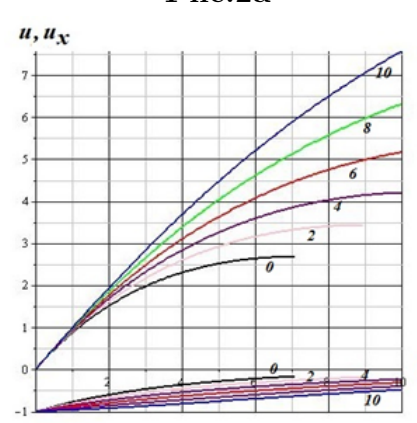


Рис.3а

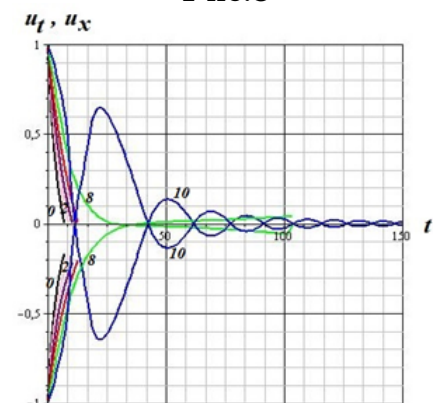


Рис.4

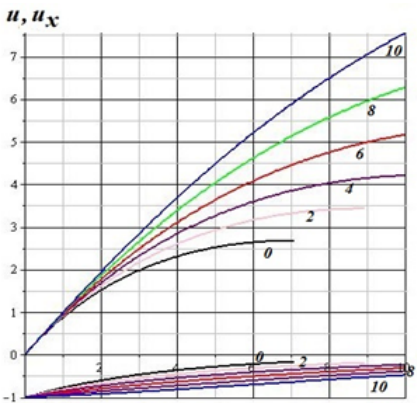


Рис.4а

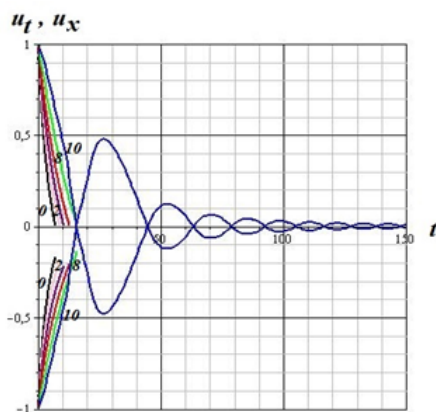


Рис.5

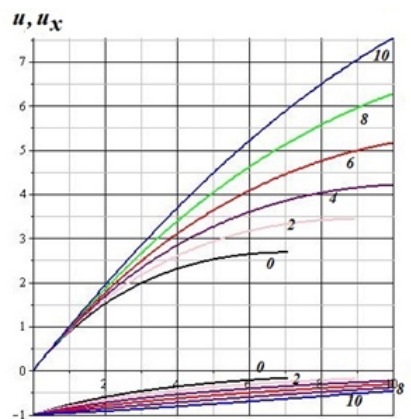


Рис.5а

Рис.1-5. Изменение скорости и деформации (соответственно выше и ниже оси $0, t$) в зависимости от времени при $u_0^* = 2$ (Рис.1), $u_0^* = 4$ (Рис.2), $u_0^* = 5$ (Рис.3), $u_0^* = 6$ (Рис.4), $u_0^* = 8$ (Рис.5) и скорости внешней среды $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).; Рис.1а – Рис.5а. Изменение перемещения и деформации (соответственно выше и ниже оси $0 t$) в зависимости от времени при $u_0^* = 2$ (Рис.1а), $u_0^* = 4$ (Рис.2а), $u_0^* = 5$ (Рис.3а), $u_0^* = 6$ (Рис.4а), $u_0^* = 8$ (Рис.5а) и скорости внешней среды $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

Figures 1-5. Change in speed and deformation (above and below the $0, t$ – axis, respectively) depending on time at $u_0^* = 2$ (Fig. 1), $u_0^* = 4$ (Fig. 2), $u_0^* = 5$ (Fig. 3), $u_0^* = 6$ (Fig. 4), $u_0^* = 8$ (Fig. 5) and the speed of the external environment $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).; Fig. 1a – Fig. 5a. Change in displacement and deformation (above and below the $0, t$ – axis, respectively) depending on time at $u_0^* = 2$ (Fig. 1a), $u_0^* = 4$ (Fig. 2a), $u_0^* = 5$ (Fig. 3a), $u_0^* = 6$ (Fig. 4a), $u_0^* = 8$ (Fig. 5a) and the speed of the external environment $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

Таблица 1

Время перехода сечений стержня $\zeta_m = 0.1m$ от Кулоновского трения на трение по Винклеру [The transition time of the rod cross-sections $\zeta_m = 0.1m$ from Coulomb friction to Winkler friction].

ζ u_0^*	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
2	7.361319	10.06624	13.223971	18.829277	150.85678	$u(1, t) < u_0^* = 2$
4	7.1123525	8.9775645	12.932347	18.821236	134.42969	$u(1, t) < u_0^* = 4$
5	7.1123525	8.9775645	10.624842	18.035378	123.39638	$u(1, t) < u_0^* = 5$
6	7.1123677	8.9775649	10.624799	12.896174	103.79843	$u(1, t) < u_0^* = 6$
8	7.1123525	8.9775645	10.624842	12.896173	15.896107	$u(1, t) < u_0^* = 8$

Переход в состояние равновесия при всех переходных значениях перемещения (u_0^*) осуществляется на всех сечениях (кроме фронта волны ($\zeta = 1$)) практически в одно и тоже время $t = t^*(\zeta; u_0^*)$ (Табл. 1, Рис.1-4). На фронте волны скорость и

деформация обращаются в нуль в некоторые моменты времени $t_1(u_0^*)$:

$$t_1(2) < t^*(0;2), t_1(4) < t^*(0.2;4), t_1(6) < t^*(0.6;6), t_1(8) \approx t^*(0.8;8).$$

Далее, с ростом t ($t > t_1(u_0^*)$), скорость и деформация стремятся к нулю (Рис.1-4), совершая колебательное движение около оси t .

Переход с Кулонового трения на трение по Винклеру также зависит от u_0^* :

- если $u_0^* = 2$ и $u_0^* = 4$, совершается во всех сечениях;
- если $u_0^* = 5$, совершается только в сечениях $\zeta = 0.6$, $\zeta = 0.8$ и $\xi = 1$;
- если $u_0^* = 6$, совершается только в сечениях $\zeta = 0.8$ и $\zeta = 1$;
- если $u_0^* = 8$, изменения закона трения не происходит, т.е. имеет место только закон сухого трения Кулона.

Влияние параметра μ и движения внешней среды. Рассмотрим, в качестве примера, случай когда $\mu = 0.5$, $u_0^* = 5$. На Рис. 6 приведены графики скорости и деформации для случая неподвижной среды.

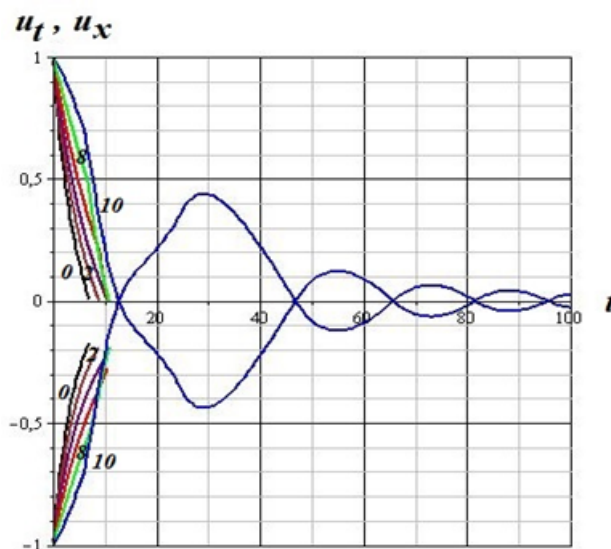


Рис. 6. Изменение скорости и деформации (соответственно выше и ниже оси $0t$) в зависимости от времени при $\mu = 0.5$, $u_0^* = 5$ и скорости внешней среды $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$)

Figure 6. Change in speed and deformation (above and below the $0, t$ – axis, respectively) depending on time at $\mu = 0.5$, $u_0^* = 5$ and the speed of the external environment $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

При $\mu = 0.5$ характер изменения кривых во всех сечениях схож со случаем $\mu = 0.1$. Однако, время перехода в состояние равновесия существенно уменьшается в сечениях $\zeta = 0.6$ и $\zeta = 0.8$, но увеличивается на фронте волны (Табл.2).

Таблица 2

Время перехода сечений стержня в состояние равновесия
[Time of transition of rod sections to the state of equilibrium]

ζ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	t_1 (5) для $\mu = 0.5$
0.1	7.1123525	8.9775645	10.624842	18.035378	123.39638	≈ 9.4
0.5	7.1123525	8.9775645	10.624842	10.558294	0.897603	≈ 12.7

2. Модель ВКБ: касательное напряжение имеет вид (6). Влияние движения внешней среды исследовано при следующих значениях параметров: $\alpha = 0.25$; $\mu = 0.1$; $\varepsilon^* = 0.1$, $v_{cp} = 0$; 0.5; 0.8. Результаты расчетов приведены на рис.7-9.

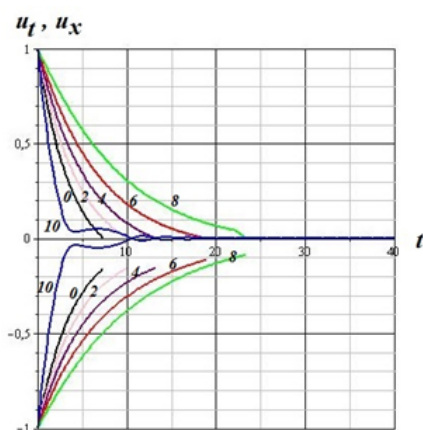


Рис.7

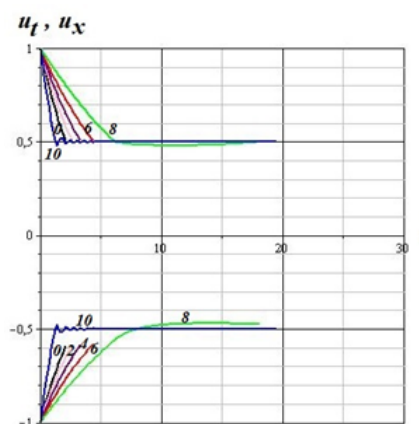


Рис.8

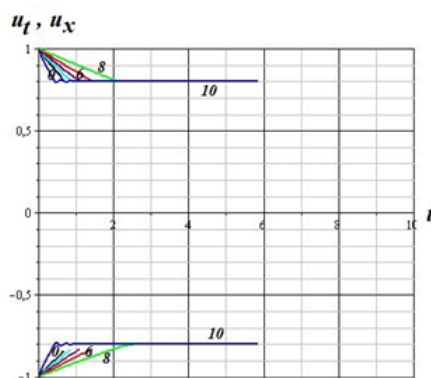


Рис. 9

Рис.7-9. Изменение скорости и деформации (соответственно выше и ниже оси $0t$) в зависимости от времени при $\alpha = 0.25$; $\mu = 0.1$ и скорости внешней среды $v_{cp} = 0$ (Рис.7), $v_{cp} = 0.5$ (Рис.8), $v_{cp} = 0.8$ (Рис.9) ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

Figures 7-9. Change in speed and deformation (above and below the $0t$ – axis, respectively) depending on time for $\alpha = 0.25$; $\mu = 0.1$ and the speed of the external environment $v_{cp} = 0$ (Fig.7), $v_{cp} = 0.5$ (Fig.8), $v_{cp} = 0.8$ (Fig.9) ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

Расчеты показывают, что характер изменения скорости во времени зависит от величины скорости внешней среды. Как следует из рис.7-9 и Табл. 3, скорость и деформация ($|\varepsilon|$) в некоторые моменты времени монотонно убывая, переходят в состояние равновесия на всех сечениях (за исключением фронта волны). При этом, во всех случаях, время перехода в состояние равновесия уменьшается с увеличением скорости внешней среды.

Изменение скорости и деформации на фронте волны происходит иначе:

в случае неподвижной внешней среды ($v_{cp} = 0$) скорость монотонно уменьшается до некоторого малого положительного значения, а затем с ростом t обращается в нуль при $t \approx 20$ и далее колеблясь около оси t , стремится к нулю (теоретически при $t \rightarrow \infty$);

в случаях $v_{cp} = 0.5$ и $v_{cp} = 0.8$, вначале монотонно убывает от единицы до некоторого значения $v_{cp} - \delta$, $\delta \ll 1$, а затем, совершая колебательное движение (с убывающей амплитудой) около оси t (Рис.7-9) переходит в состояние равновесия в момент достижения равенства $u(1, t^*) = v_{cp}$ (Рис.8-9, Табл. 3).

Аналогично происходит изменение деформации.

Таблица 3

Время перехода в состояние равновесия
[Time to transition to equilibrium]

ζ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$v_{cp} = 0$	7.4344	10.1841	13.3475	18.9392	23.6789	$u(1, 20) \approx 0$
$v_{cp} = 0.5$	2.1117	2.6882	3.3589	4.4245	18.2416	19.5039
$v_{cp} = 0.8$	0.7081	0.8902	1.1115	1.4700	2.6632	5.8689

О влиянии α , характеризующего скорость убывания экспоненциального динамического давления (24)

Рассмотрим, в качестве примера, случай когда параметр $\alpha = 0.5$. В случае неподвижной внешней среды ($v_{cp} = 0$) изменение скорости и деформации аналогично случаю $\alpha = 0.25$, но уменьшается время перехода в состояние равновесия (Табл. 4, Рис.10).

Таблица 4

Время перехода в состояние равновесия
[Time to transition to equilibrium]

ζ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$v_{cp} = 0$	4.8190378	7.2763725	9.9894959	14.366781	17.694549	$u(1; 22) \approx 0$
$v_{cp} = 0.5$	20.674976	30.361289	30.565200	31.484782	35.718527	$u(1; t) < 0.5$
$v_{cp} = 0.8$	32.687616	41.015395	40.830063	40.597819	41.004243	$u(1, t) < 0.8$

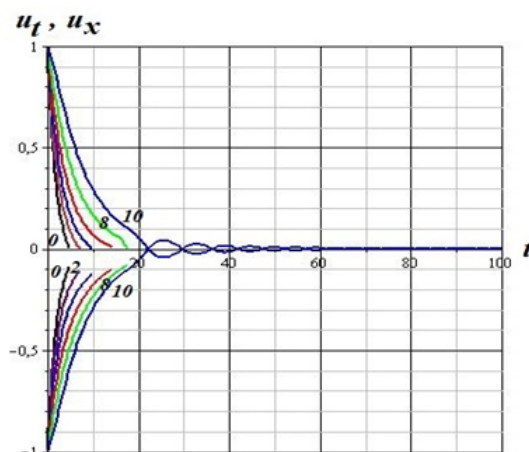


Рис. 10. Изменение скорости и деформации (соответственно выше и ниже оси $0t$) в зависимости от времени при $\alpha = 0.5$; $\mu = 0.1$ и скорости внешней среды $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$)

Figure 10. Change in speed and deformation (above and below the $0t$ – axis, respectively) depending on time for $\alpha = 0.5$; $\mu = 0.1$ and the speed of the external environment $v_{cp} = 0$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$)

Однако, когда *внешняя среда движется* ($v_{cp} = 0.5$, $v_{cp} = 0.8$), время перехода в состояние равновесия значительно увеличивается. При этом, существенно отличается характер изменения скорости и деформации (Рис.11, Рис.12): кривые изображающие скорости вогнутые, монотонно убывают до точки минимума, а затем, монотонно возрастают, достигают ($\zeta \neq 1$) соответственно значений 0.5 и 0.8 и переходят в состояние равновесия.

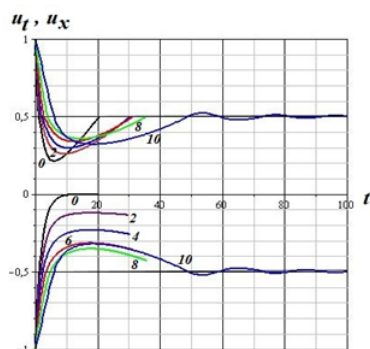


Рис.11

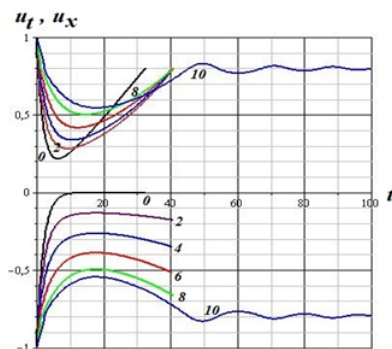


Рис.12

Рис.11-12. Изменение скорости и деформации (соответственно выше и ниже оси $0t$) в зависимости от времени при $\alpha = 0.5$; $\mu = 0.1$ и скорости внешней среды $v_{cp} = 0.5$ и $v_{cp} = 0.8$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$)

Figures 11-12. Change in speed and deformation (respectively above and below the $0t$ axis) depending on time for $\alpha = 0.5$; $\mu = 0.1$ and the speed of the external environment $v_{cp} = 0.5$ and $v_{cp} = 0.8$ ($m = 0, 2, 4, \dots, 10$).

Достоверность результатов

Верификация результатов осуществляется путем сравнения приближенного (МИС) и точного решений (Рис.13) для двух значений коэффициента пропорциональности: $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.3$. В табл. 5, приводятся результаты сравнения точного и приближенного решения для $\mu = 0.3$ погрешность не превосходит 2 процента. Как следует из таблицы 5 и Рис.13 уже первое приближение описывает процесс с удовлетворительной точностью.



Рис. 13. Графики скоростей на конце ($x = 0$) стержня: кривые 1 и 2 – точное решение, 3 и 4 – приближенное решение, соответственно для $\mu = 0.3$ и $\mu = 0.1$.
Figure 13. Graphs of velocities at the end ($x = 0$) of the rod: curves 1 and 2 are the exact solutions, 3 and 4 are the approximate solutions, for $\mu = 0.3$ and $\mu = 0.1$, respectively.

Таблица 5

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Точ. решение (27)	1	0.7	0.47	0.3	0.18	0.09	0.02
Прибл. решение	1	0.72	0.49	0.32	0.19	0.10	0.03
Погрешность	0	0.02	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01

Замечание 3. Точное решение упрощенной задачи получено в [6]. Графики точного решения на Рис.13 построены по решению, полученному авторами в более удобном для расчетов виде:

$$\begin{aligned}
 u_t(0, t) = & I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) - \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau + \\
 & + \frac{\mu^2}{4\alpha} \int_0^t (1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) I_0\left(\frac{1}{2}\mu\tau\right) d\tau,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где $I_0(t)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Заключение

В данной работе рассматривается задача о взаимодействии полугораниченного стержня с внешней средой (неподвижной и подвижной) при динамическом воздействии. Взаимодействие учитывается по двум вариантам видоизмененного закона трения Винклеровского типа:

- имеет место переход от модели трения Кулона (постоянное касательное напряжение) к модели Винклера (касательное напряжение пропорционально деформации) при некотором фиксированном значении перемещения;

- имеет место переход от модели трения Кулона к модели Винклера при некотором фиксированном значении деформации.

Дана постановка задачи о взаимодействии при динамическом нагружении конца стержня. Приближенное решение сформулированной задачи получено методом интегральных соотношений с использованием системы Maple18. Расчеты произведены для случая экспоненциального нагружения.

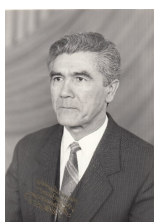
Результаты расчетов приведены в виде графиков скорости перемещения и деформации, а также таблиц. Дается подробный анализ влияния параметров трения и нагружения на процесс деформирования.


Список литературы

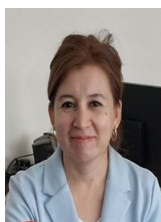
1. Никитин Л.В. *Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением*. М.: Московск. лицей, 1973. 261 с.
2. Begmatov A., Mamatova N.T. Sudden loading of an elastoplastic rod interacting with the environment// *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2022. vol. 23, no. 1, pp. 118–131 DOI: 10.1134/S0021894422010187.
3. Султанов К.С. *Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений*. Ташкент: Фан, 2016. 392 с.
4. Филиппов А.Н. Динамическое воздействие на трубопровод с учетом сухого трения на его поверхности// *Изв. РАН. МТТ.*, 2019. №6, С. 20–29 DOI: 10.1134/S0572329919050076.
5. Бегматов А. Связанная задача о соударении жесткого тела, движущегося с постоянной скоростью, и вязкопластического стержня конечной длины// *Проблемы механики*, 2023. №2, С. 34–42.
6. Бегматов А. Соударение жесткого тела и вязкопластического стержня конечной длины при наличии сухого трения с внешней средой// *Проблемы механики*, 2024. №1, С. 12–18.
7. Begmatov A., Mamatova N. Impact of rigid body and viscous-plastic rod of finite length// *E3S Web of Conferences*, 2023. vol. 401, 02003 DOI: 10.1051/e3sconf/202340102003.
8. Zhang Y., Li X. Wave propagation in elastic rods with friction interaction// *Intern. Journal of Mechanical Sciences*, 2024. vol. 245, 108102 DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108102.
9. Wang L., Chen J. Dynamic response of elastic bars under impulsive loading// *Applied Mathematical Modelling*, 2021. vol. 93, pp. 1–15 DOI: 10.1016/j.apm.2020.12.021.
10. Patel M., Sharma D. Dynamic behavior of rod structures subjected to impulsive excitation// *Engineering Structures*, 2024. vol. 301, 051005 DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117287.
11. Lee S., Park J. Analytical and numerical study of wave motion in elastic bars// *Journal of Applied Mechanics*, 2024. Т. 91, №5, 051005 DOI: 10.1115/1.4064768.
12. Ivanov A., Smirnov P. Mathematical modeling of wave propagation in deformable media// *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2023. vol. 35, pp. 1459–1475 DOI: 10.1007/s00161-023-01191-6.
13. Rikhsieva B., Khusanov B. Simulation of soil behavior under longitudinal motion of underground pipeline in one-dimensional statement// *Web of Conferences*, 2023. vol. 383, no. 5, 04091 DOI: 10.1051/e3sconf/202338304091.


14. Settimi V., Lenci S. Periodic wave propagation in nonlocal beams resting on a bilinear Winkler-type foundation// Theoretical and Applied Mechanics, 2023. vol. 50, no. 2, pp. 117–131 DOI: 10.2298/tam231124013s.
15. Mubarak A. M. Asymptotic consideration of Rayleigh waves on a coated orthorhombic elastic half-space reinforced using an elastic winkler foundation// Mathematical and Computational Applications, 2023. vol. 28, no. 6, 109 DOI: 10.3390/mca28060109.
16. Karagiozova D., Yu T. X. Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse// Intern. Journal of Impact Engineering, 2024. vol. 187, 104921 DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2024.104921.
17. Shu Q., Xu H., Tu W., Li M., Shi N. A unified Winkler model for vertical and lateral dynamic analysis of tapered piles in layered soils in the frequency domain// Buildings., 2025. vol. 15(5), 651 DOI: 10.3390/buildings15050651.

Информация об авторах



Бегматов Абдували ✉ – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и математическое моделирование Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан,  ORCID 0009-0005-8819-6646.

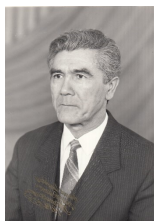



Маматова Нигора Тухтабаевна ✉ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и математическое моделирование Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека,  ORCID 0000-0001-7161-3187.

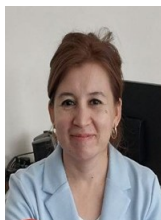
References


- [1] Nikitin L.V., Statics and Dynamics of Rigid Bodies with External Dry Friction. Moscow: Mosk. Lyceum, 1998. 261 p.
- [2] Begmatov A., Mamatova N.T. Sudden Loading of an Elastoplastic Rod Interacting with the Environment. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022. vol. 63. no. 1. pp. 118–131. DOI:10.1134/S0021894422010187.
- [3] Sultanov K.S., Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Structures. Tashkent: Fan, 2016. 392 p.
- [4] Filippov A.N. Dynamic Impact on a Pipeline Taking into Account Dry Friction on Its Surface. *Izv. RAS. MTT*. 2019. No. 6, pp. 20–29. DOI:10.1134/S0572329919050076.
- [5] Begmatov A. A Coupled Problem of the Collision of a Rigid Body Moving at a Constant Velocity and a Viscoplastic Rod of Finite Length. *Problems in Mechanics*. 2023. No. 2, pp. 34–42.
- [6] Begmatov A. Collision of a Rigid Body and a Viscoplastic Rod of Finite Length in the Presence of Dry Friction with the External Environment. *Problems in Mechanics*, 2024. No. 1, pp. 12–18.
- [7] Begmatov A., Mamatova N. Impact of rigid body and viscous-plastic rod of finite length.// *E3S Web of Conferences*. 2023. vol. 401, 02003 DOI: 10.1051/e3sconf/202340102003.
- [8] Zhang Y., Li X. Wave propagation in elastic rods with friction interaction. *Intern. Journal of Mechanical Sciences*. 2024. vol. 245. 108102. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108102.
- [9] Wang L., Chen J. Dynamic response of elastic bars under impulsive loading. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. vol. 93. P. 1–15. DOI: 10.1016/j.apm.2020.12.021.
- [10] Patel M., Sharma D. Dynamic behavior of rod structures subject to impulsiveness excitation. *Engineering Structures*. 2024. vol. 301. 117287. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117287.
- [11] Lee S., Park J. Analytical and numerical study of wave motion in elastic bars. *Journal of Applied Mechanics*. 2024. vol. 91(5). 051005. DOI: 10.1115/1.4064768.
- [12] Ivanov A., Smirnov P. Mathematical modeling of wave propagation in deformable media. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2023. vol. 35. P. 1459–1475. DOI: 10.1007/s00161-023-01191-6.
- [13] Rikhsieva B., Khusanov B. Simulation of soil behavior under longitudinal motion of underground pipeline in one-dimensional statement. *Web of Conferences*. 2023. vol. 383. 04091. DOI: 10.1051/e3sconf/202338304091
- [14] Settini V., Lenci S. Periodic wave propagation in nonlocal beams resting on a bilinear Winkler-type foundation. *Theoretical and Applied Mechanics*. 2023. vol. 50. No. 2. P. 117–131. DOI: 10.2298/tam231124013s.
- [15] Asymptotic consideration of Rayleigh waves on a coated orthorhombic elastic half-space reinforced using an elastic winkler foundation. *Mathematical and Computational Applications*. 2023. vol. 28. no. 6. 109. DOI: 10.3390/mca28060109.
- [16] Long beam on Winkler-type elastic foundation under a localized rectangular pressure pulse. *Intern. Journal of Impact Engineering*. 2024. vol. 187. 104921. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2024.104921.
- [17] Shu Q., Xu H., Tu W., Li M., Shi N. A unified Winkler model for vertical and lateral dynamics analysis of tapered piles in layered soils in the frequency domain. *Buildings*. 2025. vol. 15(5). 651. DOI:10.3390/buildings15050651.

Information about the authors



Begmatov Abduvali ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor of the Department of Mechanics and Mathematical Modeling of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan,  ORCID 0009-0005-8819-6646.



Mamatova Nigora Tukhtabaevna ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor of the Department of Mechanics and Mathematical Modeling of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,  ORCID 0000-0001-7161-3187.