



Символьное исследование и численные эксперименты на разностной схеме для волновых процессов в соосных цилиндрических оболочках, заполненных несжимаемой вязкой жидкостью

*А. В. Месянжин**

АО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», 410005, Россия, г. Саратов,
ул. Большая Садовая, д. 239

Аннотация. Исследуются волновые процессы в системе двух соосных бесконечно длинных цилиндрических упругих оболочек, пространство между которыми заполнено вязкой несжимаемой жидкостью. На основе связанной задачи гидроупругости и метода возмущений получена математическая модель в виде системы обобщенных уравнений Кортвега-де Вриза. Для её численного решения с использованием базисов Грёбнера построена неявная консервативная разностная схема типа Кранка-Николсона. Качество схемы анализируется методом первого дифференциального приближения, позволяющего оценить локальную погрешность аппроксимации. Для анализа глобальной погрешности предложена и применена функция накопления ошибки. Теоретический анализ дополнен численными экспериментами, в которых исследуется передача волнового возмущения от внешней оболочки к внутренней при различных параметрах жидкости. Показано, что погрешность схемы локализована преимущественно на фронтах волн, зависит от волнового числа и параметров нелинейности, а также остаётся управляемой в ходе расчётов. Результаты подтверждают корректность, устойчивость и эффективность предложенной разностной схемы для моделирования волновых процессов в рассматриваемых сложных механических системах.

Ключевые слова: базисы Гребнера, разностные схемы, первое дифференциальное приближение, уравнение Кортвега-де Вриза, нелинейные оболочки, вязкая жидкость


Получение: 30.12.2025; Исправление: 04.02.2026; Принятие: 07.02.2026; Публикация онлайн: 29.03.2026

Для цитирования. Месянжин А. В. Символьное исследование и численные эксперименты на разностной схеме для волновых процессов в соосных цилиндрических оболочках, заполненных несжимаемой вязкой жидкостью // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2026. Т. 54. № 1. С. 104-123. EDN: RWPRSV. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-104-123>.

Финансирование. Финансирование не проводилось.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Месянжин А. В., 2026

© ИКИР ДВО РАН, 2026 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Symbolic Investigation and Numerical Experiments on a Finite-Difference Scheme for Wave Processes in Coaxial Cylindrical Shells Filled with an Incompressible Viscous Fluid

*A. V. Mesyanzhin**

JSC "Design Bureau of Industrial Automatics 239 B. Sadovaya St, Saratov,
410005, Russian Federation

Abstract. Wave processes in a system of two coaxial infinitely long cylindrical elastic shells, the space between which is filled with a viscous incompressible fluid, are studied. Based on the coupled hydroelasticity problem and the perturbation method, a mathematical model in the form of a system of generalized Korteweg–de Vries equations is obtained. For its numerical solution, an implicit conservative difference scheme of the Crank–Nicolson type is constructed using Gröbner bases. The quality of the scheme is analyzed by the method of the first differential approximation, which makes it possible to estimate the local approximation error. To analyze the global error, an error accumulation function is proposed and applied. The theoretical analysis is supplemented by numerical experiments that investigate the transfer of a wave disturbance from the outer shell to the inner one at various fluid parameters. It is shown that the error of the scheme is localized mainly on the wave fronts, depends on the wavenumber and nonlinearity parameters, and remains controllable during the calculations. The results confirm the correctness, stability, and efficiency of the proposed difference scheme for modeling wave processes in the considered complex mechanical systems.

Key words: Gröbner bases, difference schemes, first differential approximation, Korteweg–de Vries equation, nonlinear shells, viscous fluid


Received: 30.12.2025; Revised: 04.02.2026; Accepted: 07.02.2026; First online: 29.03.2026

For citation. Mesyanzhin A. V. Symbolic Investigation and Numerical Experiments on a Finite-Difference Scheme for Wave Processes in Coaxial Cylindrical Shells Filled with an Incompressible Viscous Fluid. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2026, 54: 1, 104-123. EDN: RWPRSV. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2026-54-1-104-123>.

Funding. No funding was received.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article and is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

*Correspondence:  E-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Mesyanzhin A. V., 2026

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2026 (original layout, design, compilation)



Введение

Распространение волн в сплошных средах в рамках линейных моделей хорошо изучено и составляет предмет линейной волновой динамики [1]. В последние десятилетия активно развивается нелинейная волновая динамика [2] для исследования волн деформации в стержнях, пластинах и оболочках. В ранних работах [3] показана возможность существования нелинейных уединенных волн в упругих и вязкоупругих телах, получены соответствующие уравнения (Кортевега–де Вриза, Бюргерса–Кортевега–де Вриза) и дана их качественная оценка. Современные результаты по математическим моделям и экспериментальному обнаружению уединенных волн в стержнях представлены в [4].

Изучается также распространение уединенных волн в цилиндрических оболочках с нелинейностью материала [5] и в ребристых оболочках с нелинейностью Шамеля [6], для которых найдены солитонные решения.

Параллельно развивается гидроупругость – направление, изучающее взаимодействие конструкций с жидкостью. Первые работы в этой области выполнены в линейной постановке [7, 8]. Современные исследования [9, 10] чаще рассматривают взаимодействие оболочек с идеальной жидкостью. В работах [11–13] методами нелинейной гидроупругости численно моделируются уединенные волны в стенках кольцевых каналов с учётом нелинейности материала и геометрии.

Физическая модель и математическая постановка

Рассмотрим физическую модель механической системы, состоящей из двух соосных бесконечно длинных упругих оболочек (рисунок 1), заполненных вязкой несжимаемой жидкостью, где: δ – ширина щели, занимаемой жидкостью; $R^{(i)}$ – радиусы срединных поверхностей оболочек (индекс $i=1$ относится к внешней оболочке, $i=2$ – к внутренней); $h_0^{(i)}$ – толщины оболочек; $R_1 = R^{(1)} - \frac{h_0^{(1)}}{2}$ – внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + \frac{h_0^{(2)}}{2}$ – внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - \frac{h_0^{(2)}}{2}$ – внутренний радиус внутренней оболочки.

В начальный момент времени, во внешней оболочке на рисунке 1 возникает уединенная волна деформации заданной амплитудой. Волна деформации через вязкую несжимаемую жидкость передается на внутреннюю оболочку. Применение модели вязкой несжимаемой жидкости позволяет учесть мгновенную передачу волны деформации между оболочками. Обозначим длину волны l за характерный размер, u_m – амплитуду продольного перемещения, w_m – прогиб оболочки.

Будем предполагать, что радиусы $R^{(i)}$ оболочек малы относительно характерной длины волны продольной деформации l самих оболочек. Толщины оболочек $h_0^{(i)}$ будем считать малыми относительно радиусов $R^{(i)}$ соответствующих оболочек.

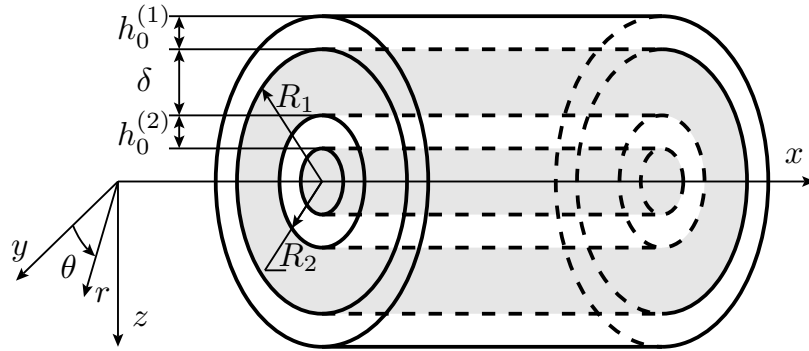


Рис. 1. Физическая модель

Figure 1. Physical model

Для исследования рассмотренной физической модели необходимо построить математическую модель, включающие в себя как уравнения динамики жидкости, так и уравнения упругости оболочек с соответствующими граничными условиями. Учитывая, бесконечность и соосность упругих оболочек можем рассматривать осесимметричный случай постановки задачи.

На границе оболочек и жидкости на рисунке (1) при $r = R_i - W^{(i)}$ ($i = 1, 2$) выполняются условия прилипания жидкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} &= V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \\ -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} &= V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $U^{(i)}$ – продольное упругое перемещение i -ой оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ – прогиб оболочки (положительный к центру кривизны).

Запишем уравнения упругости i -ой цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Киргофа–Лява в случае больших деформаций, считая материал оболочки нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i :

$$\sigma_i = E e_i \mp m e_i^3, \quad (2)$$

где $E^{(i)}$ – модуль Юнга, $m^{(i)}$ – константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение [14, 15] (далее полагается, что оболочки изготовлены из одного и того же материала):

$$\begin{aligned} \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \left[U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \{1 \mp \right. \\ \left. \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle_x - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} (W_{xx}^{(i)} + U_x^{(i)} W_{xx}^{(i)})_{xx} - \left\{ W_x^{(i)} \left(U_x^{(i)} + \frac{1}{2} U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} W_x^{(i)2} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{24} W_{xx}^{(i)2} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \left[1 \mp \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\}_x - \\
& - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} + \frac{1}{2} \mu_0 U_x^{(i)2} + \frac{1}{2} \mu_0 W_x^{(i)2} + \frac{h_0^{(i)2}}{24} \mu_0 W_{xx}^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R} \right) [1 \pm \\
& \pm \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)] \right\rangle + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1),
\end{aligned} \quad (3)$$

где q_x^i , q_n – напряжения со стороны жидкости, которая находится между оболочками; \tilde{q}_x , \tilde{q}_n – напряжения со стороны жидкости, заполняющей внутреннюю оболочку; ρ_0 , μ_0 – плотность материала и коэффициент Пуассона оболочек.

Введем безразмерные переменные:

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \quad (4)$$

Здесь c_0 – скорость звука в оболочке. Пусть

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon). \quad (5)$$

Применяя метод возмущений по малому параметру ε и предполагая выполнение гидродинамической теории смазки и ползущих течений для расчета напряжений q_x^i , q_n со стороны жидкости, придём к следующему виду уравнений гидроупругости:

$$\begin{aligned}
\phi_t^{(1)} + 6\sigma_0 \phi^{(1)} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\sigma_1 \phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0, \\
\phi_t^{(2)} + 6\sigma_0 \phi^{(2)} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\sigma_1 \phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma \phi^{(2)} &= 0,
\end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi^{(i)}$, которая представляет собой производную продольного упругого перемещения i -ой оболочки по оси x , $\eta = (x^* - ct^*)c_1$ волновая переменная, $\tau = \varepsilon t^* c_2$ медленное время, а c_1, c_2 некоторые константы образованные параметрами задачи.

Система уравнений (6) рассматривалась в [12, 16] и имеет при $\sigma = 0$ решение в виде солитона с пьедесталом, которое обобщает решение Слюняева–Пелиновского [17] при $D = 0$

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = D + \frac{k^2}{F + \sqrt{F^2 \mp k^2 \sigma_1} \cosh(\xi)}. \quad (7)$$

здесь $\xi = k(\eta - (6D \mp D\sigma_1 + \sigma_0) t)$, $F = \mp 2D\sigma_1 + \sigma_0$.

Также, система уравнений (6) с верхним знаком – при σ_1 и при $\sigma = 0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) имеет в качестве точного следующее решение

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_0}{2\sigma_1} \pm \frac{k}{\sqrt{\sigma_1}} \text{th}(\xi), \quad (8)$$

здесь $\xi = k\left(\eta + \left(2k^2 - \frac{3\sigma_0^2}{2\sigma_1}\right) t\right)$. Численное исследование при $\sigma \neq 0$ проводилось в [12, 16].

Построение разностной схемы

Используем базисы Грёбнера разностного идеала для построения схемы типа Кранка-Николсона [18] в соответствии с работами [19, 20]. Представим систему уравнений (6) в интегральной форме для произвольного контура Ω :

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-3\sigma_0\phi^{(1)2} - 2\sigma_1\phi^{(1)3} - \phi_{\eta\eta}^{(1)} \right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) dt d\eta = 0,$$

$$\oint_{\partial\Omega} \left(-3\sigma_0\phi^{(2)2} - 2\sigma_1\phi^{(2)3} - \phi_{\eta\eta}^{(2)} \right) dt +$$

$$+ \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} (\phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)}) dt d\eta = 0. \quad (9)$$

Для перехода к дискретной формулировке положим $u_j^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем конкретный контур Ω , представленный на рисунке 2.

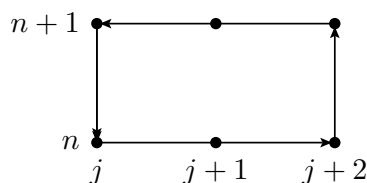


Рис. 2. Базовый разностный шаблон с направлением интегрирования по контуру

Figure 2. Basic difference stencil with integration direction along the contour

Дополним систему (9) интегральными соотношениями, связывающими дискретные функции и их дискретные производные, записанные в интегральной форме:

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta}^{(i)} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta}^{(i)} d\eta = u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_{j+2}) - u_{\eta}^{(i)}(t, \eta_j). \quad (10)$$

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а для второй производной по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ получим из (9), (10) образующие разностного идеала.

Поскольку используемый пакет `PyGIn` для работы с разностными идеалами работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (6) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F^{(i)} = 3\sigma_0 u^{(i)2} + 2\sigma_1 u^{(i)3}$. За счет выбора допустимого упорядочение так чтобы $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим следующую разностную схему для системы уравнений (6), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения

теплопроводности [12, 16]:

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u_{j+1}^{(1)2n+1} - u_{j-1}^{(1)2n+1}) + (u_{j+1}^{(1)2n} - u_{j-1}^{(1)2n})}{4h} + \\
& + 2\sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{(1)3n+1} - u_{j-1}^{(1)3n+1}) + (u_{j+1}^{(1)3n} - u_{j-1}^{(1)3n})}{4h} + \\
& + ((u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1}) + \\
& + (u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n}))/4h^3 + \\
& + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0, \\
& \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + 3\sigma_0 \frac{(u_{j+1}^{(2)2n+1} - u_{j-1}^{(2)2n+1}) + (u_{j+1}^{(2)2n} - u_{j-1}^{(2)2n})}{4h} + \\
& + 2\sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{(2)3n+1} - u_{j-1}^{(2)3n+1}) + (u_{j+1}^{(2)3n} - u_{j-1}^{(2)3n})}{4h} + \\
& + ((u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1}) + \\
& + (u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n}))/4h^3 + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \\
& - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \sigma \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Анализ схемы методом первого дифференциального приближения

В работах [21, 22] сформулирован метод дифференциальных приближений разностной схемы (first differential approximation). Технически его применяли только для уравнений эволюционного типа фактически строя базис Грёбнера заменой в членах ряда производных по времени производными по пространству

Построение первого дифференциального приближения (FDA) основано на алгебраических операциях и может быть эффективно реализовано с использованием систем компьютерной алгебры [23–25]. Если разностная схема не совместна или имеет меньшее пространство решений по сравнению с исходной системой дифференциальных уравнений, то при построении FDA будут получены лишние уравнения, что позволяет остановить вычисления. Эта проверка проще и требует меньше ресурсов, чем проверка совместности в разностном случае.

Базисы Грёбнера можно использовать как для проверки совместности исходной системы дифференциальных уравнений и аппроксимирующей её разностной схемы, так и через FDA. Хотя алгоритмы построения базисов Грёбнера встроены в большинство систем компьютерной алгебры, они имеют ограничения при работе с дифференциальными уравнениями, разностными схемами и формально бесконечными рядами Тейлора, необходимыми для FDA.

Алгоритмически построение FDA с использованием базисов Грёбнера можно представить как работу с бесконечным модулем, где упорядочение проводится

сначала по зависимым переменным, а затем по независимым *POT* (позиция старше терма – упорядочение сначала по зависимым переменным, а затем по независимым). При этом вычисления выполняются до первых ненулевых членов ряда по шагам времени τ и по пространству h .

Применение обычного похода [21] к построению FDA для уравнений эволюционного типа для первой разностной схемы (11) дает 6 членов при h^2 133 члена при τ^2

$$\begin{aligned} &6\sigma_0\phi_1\phi_{1x} + 6\sigma_1\phi_1^2\phi_{1x} + \phi_1 + \phi_{1t} + \phi_{1xxx} - \phi_2 + h^2\left(\sigma_0\phi_1\phi_{1xxx} + 3\sigma_0\phi_{1xx}\phi_{1x} + \right. \\ &+ 6\sigma_1\phi_1\phi_{1xx}\phi_{1x} + 2\sigma_1\phi_{1x}^3 + \left. \frac{\phi_{1xxxx}}{4}\right) + \tau^2\left(-\frac{\sigma^2\phi_2}{12} - \frac{\sigma\sigma_0\phi_1\phi_{2x}}{2} - \dots \right. \\ &\left. \dots + \frac{\phi_{1xxxxxxx}}{12} + \frac{\phi_{1xxxxx}}{4} + \frac{\phi_{1xxx}}{2} - \frac{\phi_2}{3} - \frac{\phi_{2xxxxx}}{4} - \frac{\phi_{2xxx}}{2}\right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Соответственно для второй схемы 6 членов при h^2 и 155 слагаемых при τ^2

$$\begin{aligned} &\sigma\phi_2 + 6\sigma_0\phi_2\phi_{2x} + 6\sigma_1\phi_2^2\phi_{2x} - \phi_1 + \phi_2 + \phi_{2t} + \phi_{2xxx} + \\ &+ h^2\left(\sigma_0\phi_2\phi_{2xxx} + 3\sigma_0\phi_{2xx}\phi_{2x} + 6\sigma_1\phi_2\phi_{2xx}\phi_{2x} + 2\sigma_1\phi_{2x}^3 + \frac{\phi_{2xxxx}}{4}\right) + \\ &+ \tau^2\left(\frac{\sigma^3\phi_2}{12} + \frac{7\sigma^2\sigma_0\phi_2\phi_{2x}}{2} + \dots + \frac{\phi_{2xxxxxxx}}{12} + \frac{\phi_{2xxxxx}}{4} + \frac{\phi_{2xxx}}{2}\right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В работах [27, 28] предлагается перейти с лексикографического упорядочения на упорядочение по полной степени обратно-лексикографического. Это сокращает объем вычислений в случае нелинейных уравнений. В нашем случае для первой схемы 15 слагаемых при h^2 и один член при τ^2

$$\begin{aligned} &6\sigma_0\phi_1\phi_{1x} + 6\sigma_1\phi_1^2\phi_{1x} + \phi_1 + \phi_{1t} + \phi_{1xxx} - \phi_2 + \\ &+ h^2\left(3\sigma_0^2\phi_1^2\phi_{1x} + 6\sigma_0\sigma_1\phi_1^3\phi_{1x} + \frac{\sigma_0\phi_1^2}{2} + \frac{\sigma_0\phi_1\phi_{1t}}{2} - \frac{\sigma_0\phi_1\phi_2}{2} - \frac{3\sigma_0\phi_{1xx}\phi_{1x}}{2} + \right. \\ &+ 3\sigma_1^2\phi_1^4\phi_{1x} + \frac{\sigma_1\phi_1^3}{2} + \frac{\sigma_1\phi_1^2\phi_{1t}}{2} - \frac{\sigma_1\phi_1^2\phi_2}{2} - 3\sigma_1\phi_1\phi_{1xx}\phi_{1x} - \\ &\left. - \sigma_1\phi_{1x}^3 - \frac{\phi_{1txx}}{4} - \frac{\phi_{1xx}}{4} + \frac{\phi_{2xx}}{4}\right) + \tau^2\left(-\frac{\phi_{1ttt}}{12}\right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно для второй 18 членов при h^2 и один член при τ^2

$$\begin{aligned} &\sigma\phi_2 + 6\sigma_0\phi_2\phi_{2x} + 6\sigma_1\phi_2^2\phi_{2x} - \phi_1 + \phi_2 + \phi_{2t} + \phi_{2xxx} + \\ &+ h^2\left(\frac{\sigma\sigma_0\phi_2^2}{2} + \frac{\sigma\sigma_1\phi_2^3}{2} - \frac{\sigma\phi_{2xx}}{4} + 3\sigma_0^2\phi_2^2\phi_{2x} + 6\sigma_0\sigma_1\phi_2^3\phi_{2x} - \right. \\ &- \frac{\sigma_0\phi_1\phi_2}{2} + \frac{\sigma_0\phi_2^2}{2} + \frac{\sigma_0\phi_2\phi_{2t}}{2} - \frac{3\sigma_0\phi_{2xx}\phi_{2x}}{2} + 3\sigma_1^2\phi_2^4\phi_{2x} - \\ &- \frac{\sigma_1\phi_1\phi_2^2}{2} + \frac{\sigma_1\phi_2^3}{2} + \frac{\sigma_1\phi_2^2\phi_{2t}}{2} - 3\sigma_1\phi_2\phi_{2xx}\phi_{2x} - \sigma_1\phi_{2x}^3 + \\ &\left. + \frac{\phi_{1xx}}{4} - \frac{\phi_{2txx}}{4} - \frac{\phi_{2xx}}{4}\right) + \tau^2\left(-\frac{\phi_{2ttt}}{12}\right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В работах [28, 29] развит метод проверки качества разностных схем на точных решениях.

Подстановка точного решения (7) при $\sigma = 0$ в первое дифференциальное приближение дает следующее выражение члена при h^2

$$\begin{aligned}
 & -k^3 \left(-2\sqrt{AB}^3 C s_0 (BD + k^2) + \sqrt{AB}^2 (BD + k^2)^2 (-2C s_1 + 12s_0^2) + \right. \\
 & + 4\sqrt{A} s_1 \left(-Ak^6 \sinh^2(\xi) + 3k^4 (BD + k^2) \left(\sqrt{AB} \cosh(\xi) - 2A \sinh^2(\xi) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 3s_1 (BD + k^2)^4 \right) + B \left(6\sqrt{A} k^4 s_0 \left(\sqrt{AB} \cosh(\xi) - 2A \sinh^2(\xi) \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 24\sqrt{A} s_0 s_1 (BD + k^2)^3 - B C k^2 \left(-\sqrt{AB}^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. 2\sqrt{A} \left(\sqrt{AB} \cosh(\xi) - 3A \sinh^2(\xi) \right) + 4AB \cosh(\xi) \right) \right) \sinh(\xi) / (4B^6)
 \end{aligned} \tag{16}$$

здесь $A = \mp k^2 \sigma_1 + (\mp 2D \sigma_1 + \sigma_0)^2$, $B = \mp 2D \sigma_1 + \sigma_0 + \sqrt{A} \cosh(\xi)$ и $C = 6D(\mp D \sigma_1 + \sigma_0) + k^2$. И следующий вид при τ^2

$$-C^3 k^5 \cdot \left(6A^{\frac{3}{2}} \sinh^2(\xi) + \sqrt{AB}^2 - 6AB \cosh(\xi) \right) \sinh(\xi) / (12B^4). \tag{17}$$

Структура выражения (16) для h^2 дает вид зависимости $\sim k^6$. Амплитуда ошибки пропорциональна волновому числу k , т.е. чем короче волна, тем больше ошибка. Структура выражения для τ^2 дает оценку амплитуду ошибки $\sim k^{12}$. Ошибка также осциллирует с $\sinh(\xi)$, $\cosh(\xi)$, то есть меняется по форме волны. Влияние нелинейных параметров σ_0 , σ_1 и постоянной D (пьедестал) содержится в A , B , C .

Подстановка точных решений позволяет сделать вывод, что ошибка локализована в области изменения решения — максимальна там, где $\sinh(\xi)$ и $\cosh(\xi)$ велики, то есть на фронтах волны. Также ошибка симметрична/антисимметрична относительно центра волны, в зависимости от четности функций \sinh , \cosh .

Представление FDA в допустимом упорядочении `degrevlex` дает возможность численно вычислять FDA. Это связано с тем, что это представление имеет малое количество членов, а также имеет максимум третью производную, в отличие от стандартного представления `lex`, в котором содержится 9-ая производная. Также FDA можно считать не на каждом временном слое, а через заданный временной интервал, что позволяет незначительно увеличить объем вычислений. Число строк кода для вычисления FDA используя пакет `numpy` (<https://numpy.org/>) составило для системы (11) всего 85 строк.

В левой колонке на рисунке 3 представлены вычисления на основе точных формул (17) (FDA τ^2), (16) (FDA h^2) и значения FDA в виде их суммы. В нижней строке представлена относительная погрешность определяемая по формуле:

$$\text{error} = \frac{|\text{точное} - \text{численное}|}{1 + |\text{численное}|}.$$

В правой колонке на рисунке 3 приведены численные расчеты по формулам (14), (15) и значения FDA в виде их суммы. В нижней строке представлена относительная погрешность определяемая с помощью функции накопления [29].

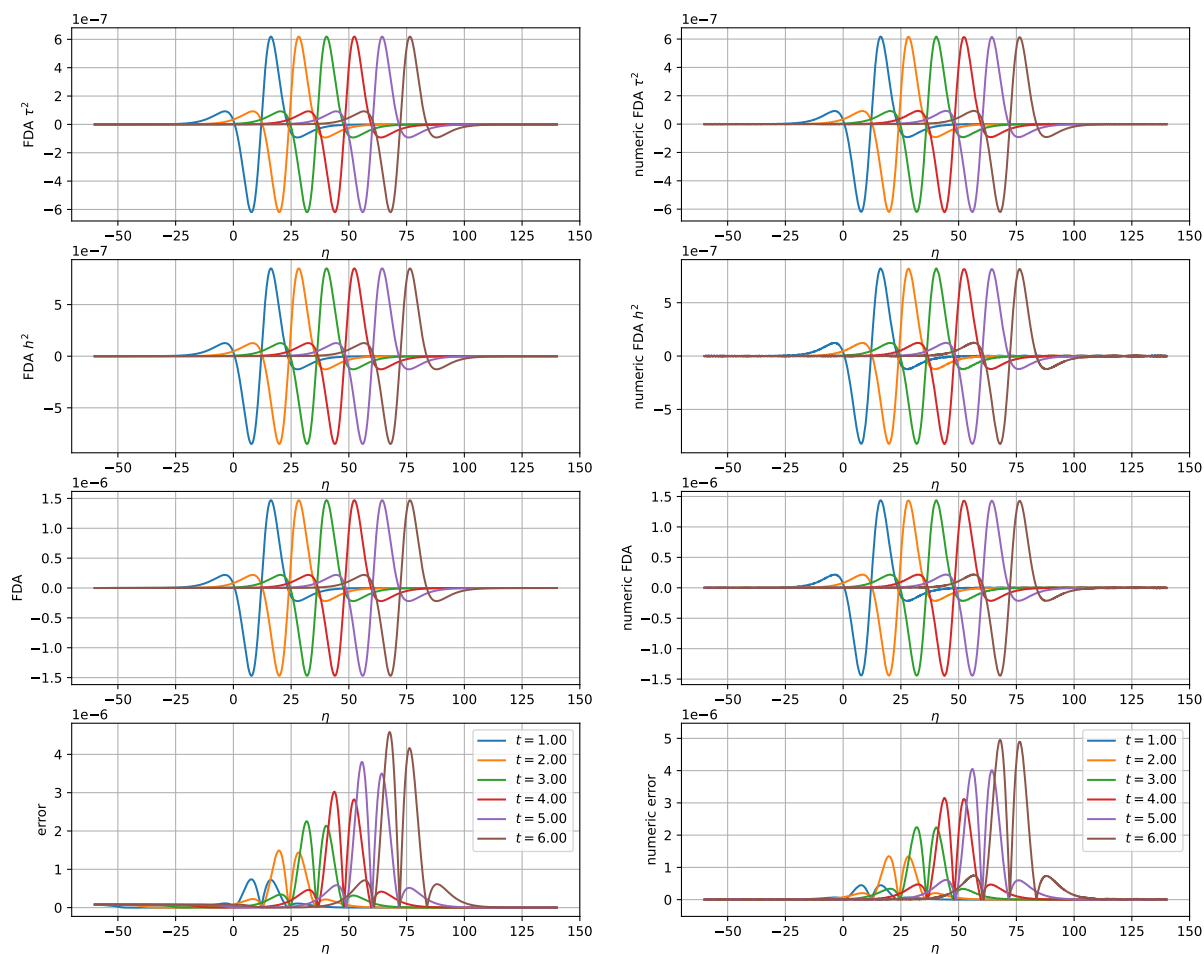


Рис. 3. Начальное условие: точное решение (7) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $k = 0.2$ и $D = -1$
 Figure 3. Initial condition: exact solution (7) for $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $k = 0.2$, and $D = -1$

Погрешность накапливается при каждом шаге по времени, поскольку сама разностная схема аппроксимирует исходную систему дифференциальных уравнений с точностью до FDA. Таким образом, FDA задает локальную погрешность. Для верхней оценки глобальной погрешности можно предложить следующую функцию накопления [29], которая будет характеризовать рост погрешности по шагам по времени

$$\text{acc}_{t_i} = \text{acc}_{t_{i-1}} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|\text{FDA}(t_{i-1})\|}{\|\text{FDA}(t_i)\|} \right) (t_i - t_{i-1}). \quad (18)$$

В формуле (18) добавочный член представляет собой численное значение интеграла по методу трапеций нормализованный на величину $\|\text{FDA}(t_i)\|$

$$\frac{1}{2} (\|\text{FDA}(t_i)\| + \|\text{FDA}(t_{i-1})\|) (t_i - t_{i-1}).$$

В результате используя значения из формулу (18) запишем через FDA функцию для верхней оценки глобальной погрешности на i шаге

$$\text{error}_{\text{FDA}}(x, t_i) = \text{acc}_{t_i} \text{FDA}(x, t_i) \quad (19)$$

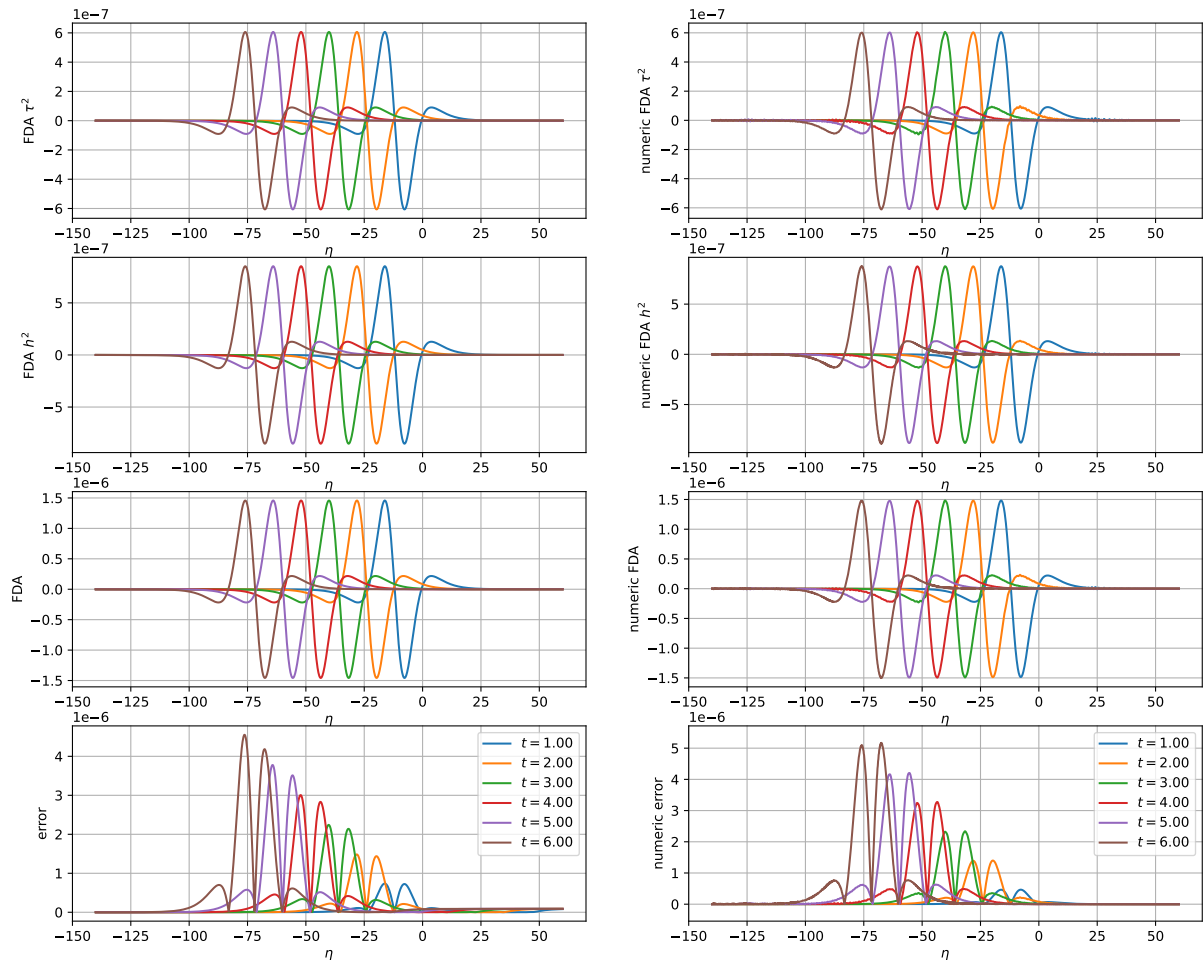


Рис. 4. Начальное условие: точное решение (7) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = -1$, $k = 0.2$ и $D = 1$
 Figure 4. Initial condition: exact solution (7) for $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = -1$, $k = 0.2$, and $D = 1$

Согласно рисункам 3 и 4 ошибка локализована в области фронтов волны. Временная ошибка $FDA \tau^2$ имеет осциллирующий характер, максимумы на склонах волны. Пространственная ошибка $FDA h^2$ также осциллирует, но с меньшей амплитудой. Суммарное FDA показывает, как локальная ошибка распределена по пространству. Глобальная погрешность накапливается со временем, но остаётся управляемой. Хорошее совпадение между левой и правой колонками подтверждает корректность численной реализации и формулы накопления ошибки 18.

Также, система уравнений (6) с верхним знаком $-$ при σ_1 и при $\sigma = 0$ имеет в качестве точного решение (8). Подстановка которого дает следующие выражение члена при h^2

$$k^4 (\tanh(\xi) - 1) (\tanh(\xi) + 1) (20k^2\sigma_1 \tanh^4(\xi) - 24k^2\sigma_1 \tanh^2(\xi) + 4k^2\sigma_1 + 3\sigma_0^2 \tanh^2(\xi) - \sigma_0^2) / (2\sigma_1^{\frac{3}{2}}). \quad (20)$$

И следующий вид при τ^2

$$\mp \frac{k^4 (4k^2\sigma_1 - 3\sigma_0^2)^3 (\tanh(\xi) - 1) (\tanh(\xi) + 1) (3 \tanh^2(\xi) - 1)}{48\sigma_1^{\frac{7}{2}}}. \quad (21)$$

Выражения для h^2 -члена согласно (20) можно оценить как $\sim k^6$. Функция от ξ локализована в окрестности $\xi = 0$, то есть ошибка максимальна на фронте волны. Структура выражения для τ^2 -члена имеет вид:

$$\mp \frac{k^4 (4k^2\sigma_1 - 3\sigma_0^2)^3 \cdot \operatorname{sech}^2(\xi) \cdot (3 \tanh^2(\xi) - 1)}{48\sigma_1^{\frac{7}{2}}}.$$

Множитель $\operatorname{sech}^2(\xi)(3 \tanh^2(\xi) - 1)$ — это чётная функция с максимумами вблизи фронтов солитона и нулём в центре ($\xi = 0$, где $\tanh(0) = 0$). Это означает, что временная ошибка наиболее заметна на склонах волны, а не на её вершине. Зависимость от параметров пропорциональна $k^4(4k^2\sigma_1 - 3\sigma_0^2)^3$ — очень сильная зависимость от k ($\sim k^{10}$) и баланса между $k^2\sigma_1$ и σ_0^2 . Если $4k^2\sigma_1 - 3\sigma_0^2 = 0$, то временная ошибка обращается в ноль — это специальное соотношение параметров, при котором порядок схемы по τ повышается на данном точном решении.

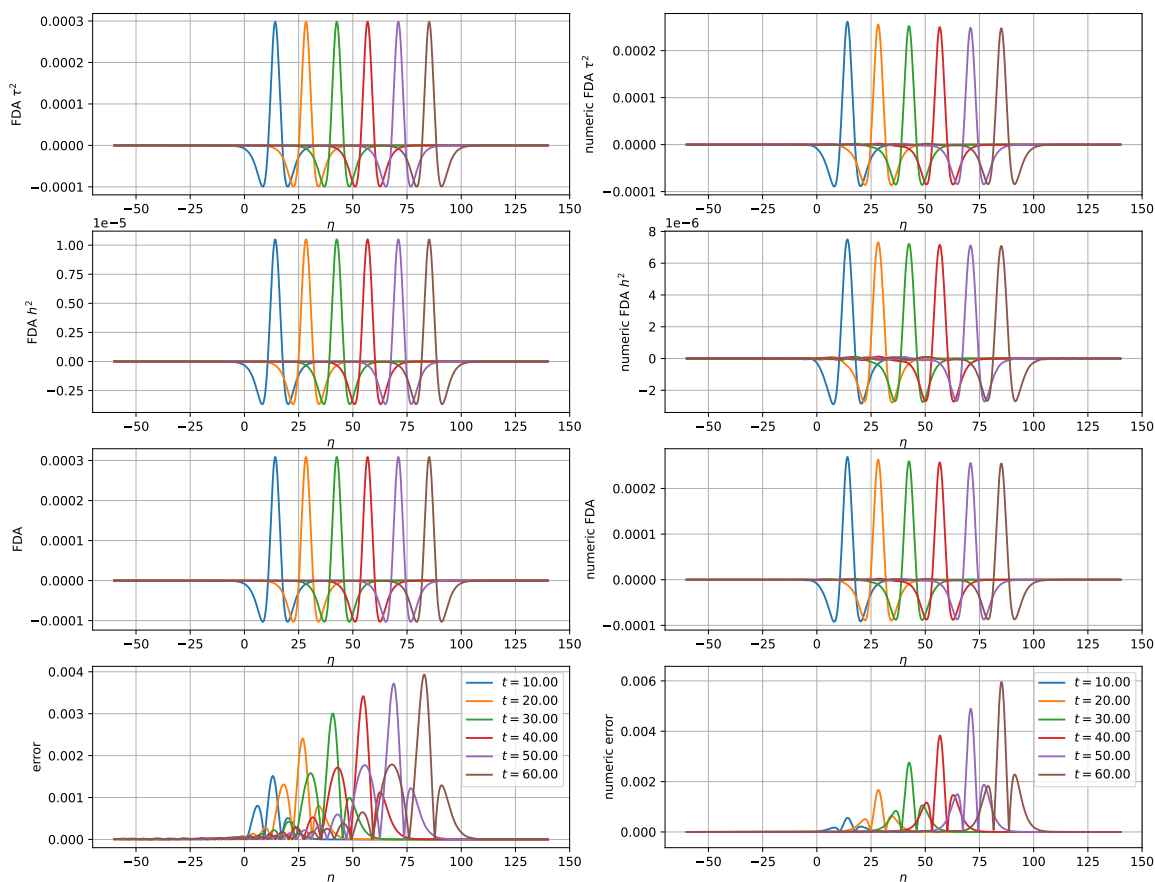


Рис. 5. Начальное условие: точное решение (8) при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$ и $k = 0.2$
 Figure 5. Initial condition: exact solution (8) for $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, and $k = 0.2$

Результаты представленные на рис. 5 позволяют сделать аналогичные выводы.

Ошибка FDA максимальна в областях быстрого изменения решения (фронты волн). Глобальная погрешность растёт со временем, что подтверждает необходимость контроля шагов τ и h . Хорошее совпадение между левой и правой колонками подтверждает корректность численной реализации и формулы накопления ошибки 18.

Все построения самой разностной схемы и первого дифференциального приближения использовался пакет PyGInv <https://github.com/blinkovua/GInv/tree/master/pyginv> (версия GInv [30] написанный на чистом Python с использованием SymPy. Для сокращенной записи (16)–(21) использовался SymPy и возможности текстовых замен самого Python.

Численное моделирование

Программа численных экспериментов реализована в пакетах с открытым исходным кодом SciPy (<https://scipy.org>) и Matplotlib (<https://matplotlib.org/>) и может быть скачана <https://github.com/blinkovua/sharing-mesyngin>.

При проведении расчетов на границах задавались условия $u_x = 0$. Поскольку схемы нелинейны относительно следующего временного слоя, система нелинейных уравнений решалась методом простой итерации. Число итераций до получения разности итераций по норме Фробениуса 10^{-12} не превышало 3.

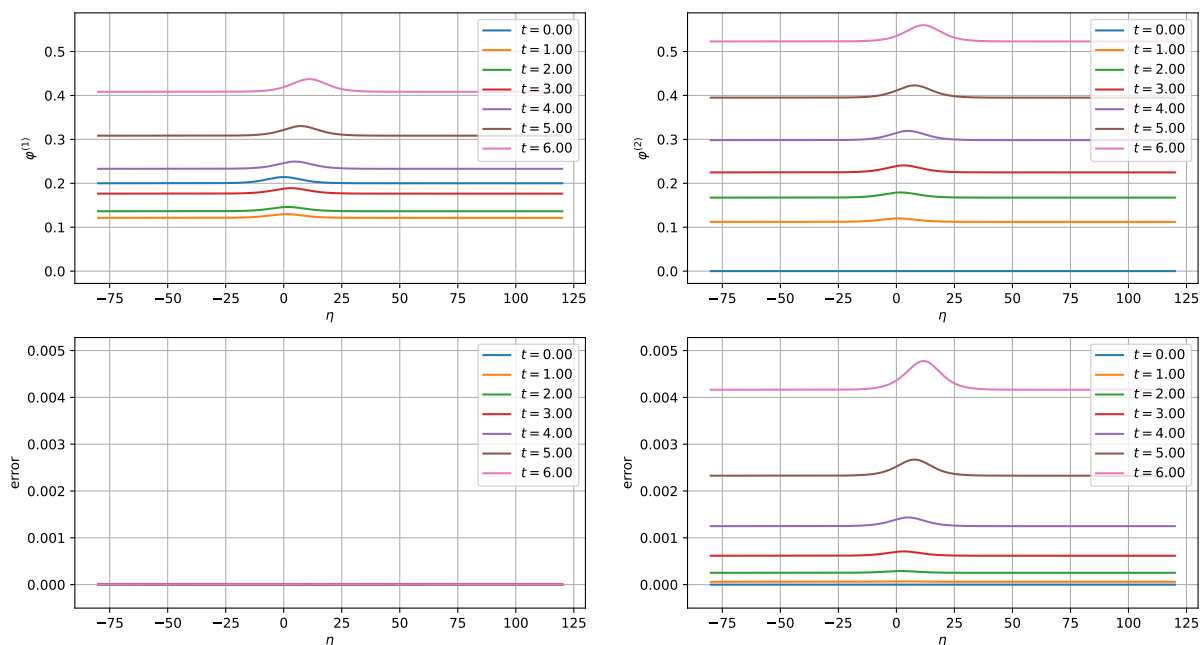


Рис. 6. Начальное условие: внешняя оболочка $\phi_1 = (7)$ при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0.5$, $k = 0.2$ и $D = 0.2$; внутренняя оболочка $\phi_2 = 0$

Figure 6. Initial condition: outer shell $\phi_1 = (7)$ for $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = 0.5$, $k = 0.2$, and $D = 0.2$; inner shell $\phi_2 = 0$

На рис. 6 представлено влияние вязкой жидкости во внутренней оболочке $\sigma = 0.5$. Волна от внешней оболочки передаётся на внутреннюю через жидкость, что видно по появлению ненулевого $\phi^{(2)}$ со временем. Форма волны сохраняется, но с некоторым запаздыванием и искажением. Ошибка локализована в области фронтов волн и незначительно накапливается со временем.

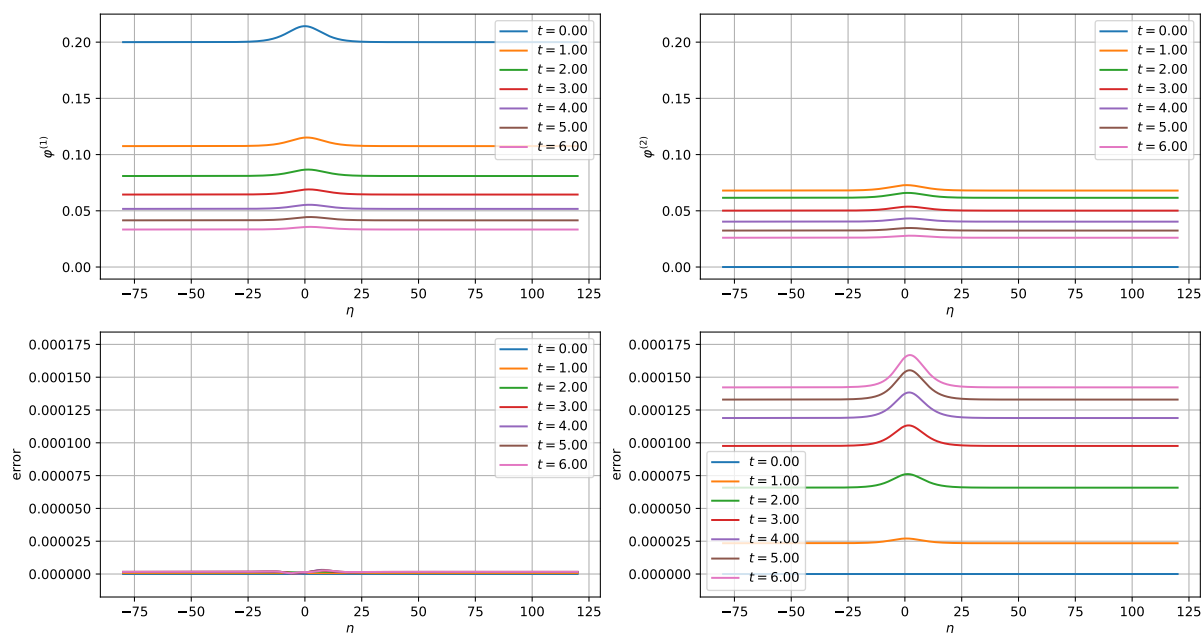


Рис. 7. Начальное условие: внешняя оболочка $\phi_1 = (7)$ при $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = -0.5$, $k = 0.2$ и $D = 0.2$; внутренняя оболочка $\phi_2 = 0$

Figure 7. Initial condition: outer shell $\phi_1 = (7)$ for $\sigma_0 = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma = -0.5$, $k = 0.2$, and $D = 0.2$; inner shell $\phi_2 = 0$

На рис. 7 $\sigma = -0.5$ моделирует иной тип взаимодействия через жидкость. Также наблюдается передача возмущения на внутреннюю оболочку, но динамика отличается из-за знака σ . Ошибка также локализована на фронтах, её величина и распределение отличаются от случая $\sigma > 0$.

На рис. 8 волна передаётся на внутреннюю оболочку, сохраняя форму, близкую к начальному солитону. Ошибка сосредоточена на склонах волны и растёт со временем, но остаётся управляемой.

На рисунке 9 динамика отличается от случая $\sigma > 0$, что отражается как на форме волн, так и на распределении ошибки. Ошибка также локализована на фронтах, её величина и осцилляционный характер зависят от знака σ .

Моделирование показало, что возмущение от внешней оболочки передаётся на внутреннюю через вязкую несжимаемую жидкость. Скорость и форма передачи зависят от параметра σ , который моделирует наличие и свойства жидкости во внутренней оболочке. Ошибка разностной схемы сосредоточена в областях быстрого изменения решения – на фронтах волн. Это согласуется с теоретическим анализом первого дифференциального приближения (FDA), согласно которому ошибка пропорциональна производным высокого порядка,

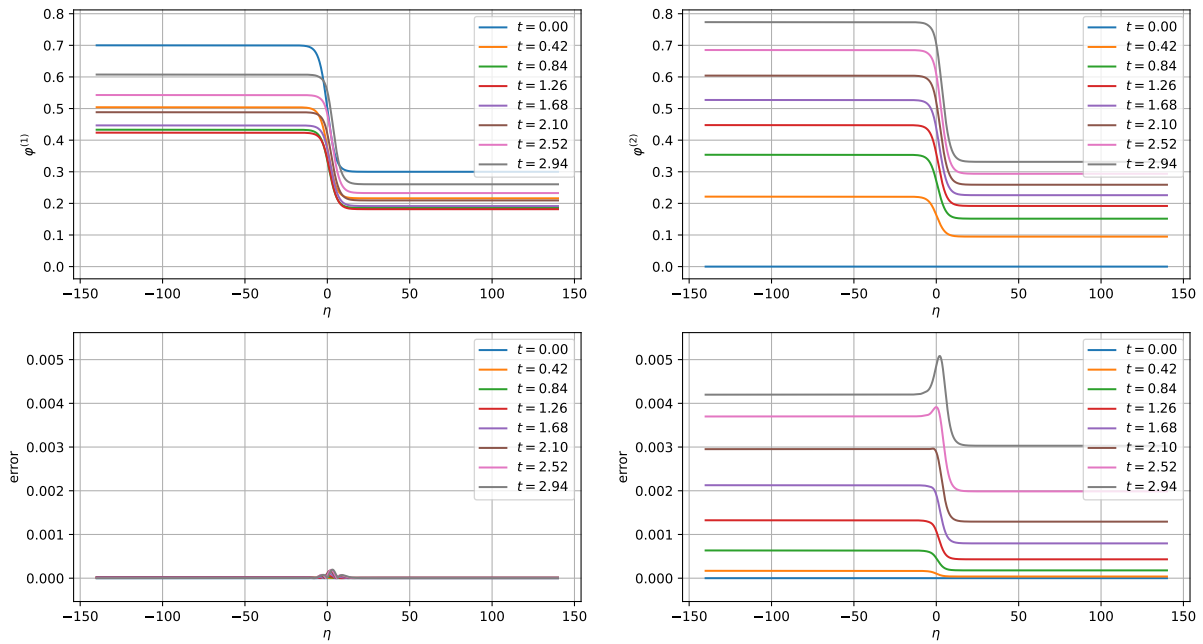


Рис. 8. Начальное условие: внешняя оболочка $\phi_1 = (8)$ при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma = 0.5$ и $k = 0.2$; внутренняя оболочка $\phi_2 = 0$

Figure 8. Initial condition: outer shell $\phi_1 = (8)$ for $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma = 0.5$, and $k = 0.2$; inner shell $\phi_2 = 0$

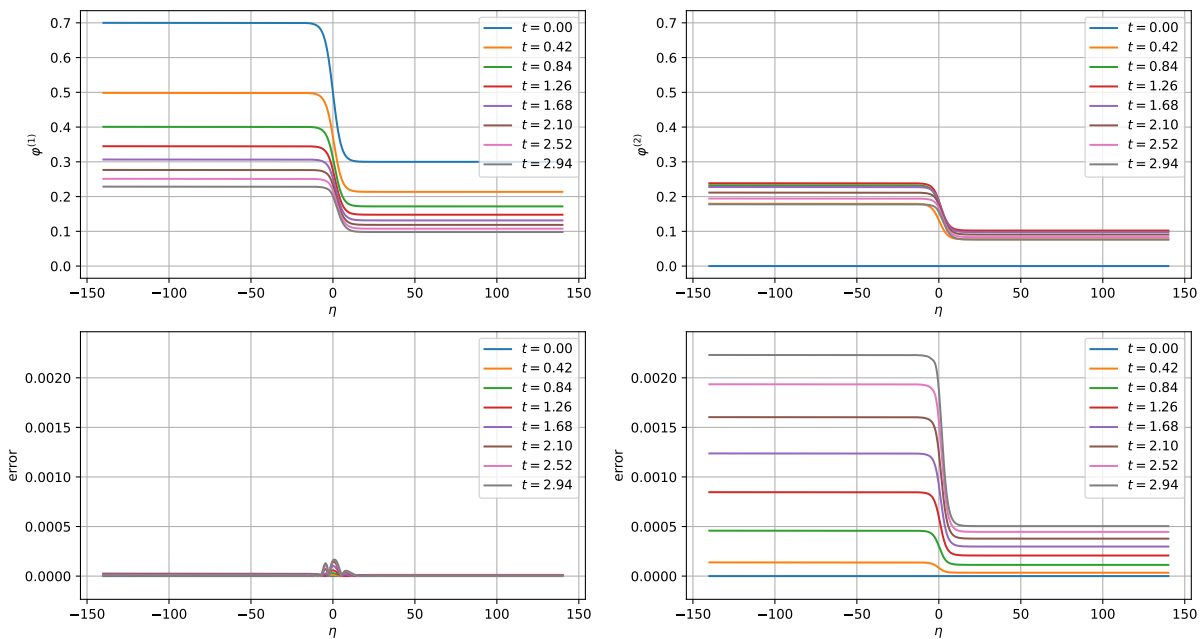


Рис. 9. Начальное условие: внешняя оболочка $\phi_1 = (8)$ при $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma = -0.5$ и $k = 0.2$; внутренняя оболочка $\phi_2 = 0$

Figure 9. Initial condition: outer shell $\phi_1 = (8)$ for $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 1, \sigma = -0.5$, and $k = 0.2$; inner shell $\phi_2 = 0$

максимальным на склонах волны. Ошибка накапливается со временем, но остаётся ограниченной и управляемой. Для оценки глобальной погрешности использована формула накопления (18), которая показывает хорошее соответствие с численными результатами. Знак и величина σ существенно влияют на динамику системы и распределение ошибки. Волновое число k также влияет на величину ошибки: чем короче волна (больше k), тем выше ошибка.

Эти результаты подтверждают корректность и устойчивость предложенной разностной схемы, а также эффективность метода FDA для анализа и контроля погрешности численного решения.

Заключение

На основе связанной задачи гидроупругости и метода возмущений построена математическая модель волновых процессов в системе двух соосных цилиндрических оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью в виде системы обобщенных уравнений КдВ. Для её численного решения с использованием базисов Грёбнера построена неявная консервативная разностная схема типа Кранка–Николсона.

Качество схемы проанализировано методом первого дифференциального приближения, что позволило оценить локальную погрешность аппроксимации и её зависимость от волнового числа и параметров нелинейности. Для анализа глобальной погрешности предложена и применена функция накопления ошибки, показавшая хорошее согласие с результатами численных экспериментов.

Численное моделирование подтвердило возможность передачи волнового возмущения от внешней оболочки к внутренней через вязкую жидкость. Показано, что погрешность схемы локализована преимущественно на фронтах волн, остаётся управляемой в ходе расчётов и зависит от параметров жидкости и геометрических характеристик системы.

Результаты работы подтверждают корректность, устойчивость и эффективность предложенной разностной схемы для моделирования волновых процессов в рассматриваемых сложных механических системах, что открывает перспективы её использования в задачах акустической диагностики и неразрушающего контроля.

Благодарность. Автор выражает благодарность рецензентам за ценные замечания и коллегам за обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
2. Кудряшов Н. А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010. 368 с.
3. Nariboli G. A., Sedov A. Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates// J. Math. Anal. Appl., 1970. vol. 32, pp. 661–677 DOI: 10.1016/0022-247X(70)90290-8.

4. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне// Вычисл. мех. сплош. сред, 2017. Т. 10, № 2, С. 127–136 DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11.
5. Бочкарев А. В., Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой// Акустический журнал, 2017. Т. 63, № 2, С. 145–151 DOI: 10.7868/S0320791917020022.
6. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells// J. Sound Vib., 2021. vol. 491, pp. 115752 DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115752.
7. Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубах / Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952, С. 172–183.
8. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М., Л.: Гостехиздат, 1949. 103 с.
9. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves// Phil. Mag., 1955. vol. 46, pp. 199–221 DOI: 10.1080/14786440208520564.
10. Païdoussis M.P. *Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2.* London: Elsevier Academic Press, 2016. 942 DOI: 10.1016/C2011-0-08058-4 pp.
11. Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии// Вычисл. мех. сплош. сред, 2013. Т. 6, № 3, С. 336–345 DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
12. Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Распространение нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью// Вычисл. мех. сплош. сред, 2017. Т. 10, № 2, С. 172–186 DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.15.
13. Бочкарёв С. А., Матвеев В. П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости// Вычисл. мех. сплош. сред, 2013. Т. 6, № 1, С. 94–102 DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12.
14. Вольмир А. С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек.* М.: Наука, 1972. 432 с.
15. Вольмир А. С. *Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости.* М.: Наука, 1979. 320 с.
16. Блинков Ю. А., Кондратова Ю. Н., Месянжин А. В., Могилевич Л. И. Математическое моделирование нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2016. Т. 16, № 3, С. 331–336 DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336.
17. Слюняев А. В., Пелиновский Е. Н. Динамика солитонов большой амплитуды// ЖЭТФ, 1999. Т. 116, № 1, С. 318–335.
18. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type// Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1947. vol. 43, no. 1, pp. 50–67 DOI: 10.1017/S0305004100023197.
19. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations// Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006. vol. 2, pp. 26 DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051.
20. Блинков Ю. А., Гердт В. П., Маринов К. Б. Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры// Программирование, 2017. № 2, С. 28–34.
21. Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. Первое дифференциальное приближение разностных схем для гиперболических систем уравнений// Сибирский математический журнал, 1969. Т. 10, С. 868–880 DOI: 10.1007/BF00971662.
22. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике:* Наука, 1985. 368 с.
23. Gerdt V.P., Robertz D. Consistency of Finite Difference Approximations for Linear PDE Systems and its Algorithmic Verification / *Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, 2010, pp. 53–59.
24. Gerdt V.P. Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems / *Mathematical Modelling in Computational Physics 2011*, 7125, 2012, pp. 28–42.

25. La Scala R. Gröbner bases and gradings for partial difference ideals// Mathematics of Computation, 2015. vol. 84, no. 293, pp. 959–985.
26. Блинкова А.Ю., Малых М.Д., Севастьянов Л.А. О дифференциальных приближениях разностных схем// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2021. Т. 21, №4, С. 472–488 DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-4-472-488.
27. Блинков Ю.А., Ребрина А.Ю. Исследования разностных схем для двумерных уравнений Навье–Стокса алгоритмами компьютерной алгебры// Программирование, 2023. № 1, С. 32–37 DOI: 10.31857/S0132347423010028.
28. Блинков Ю.А. Качественное исследование схем типа Кранка-Николсона с использованием первого дифференциального приближения на примере уравнения Котрвега де Вриза// Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках, 2023. №4, С. 18 DOI: 10.24412/2541-9269-2023-4-12-28.
29. Блинков Ю.А. Символьное и численное исследование разностных схем с использованием первого дифференциального приближения на примере уравнения Котрвега де Вриза// Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках, 2024. №4, С. 13 DOI: 10.24412/2541-9269-2024-4-20-32.
30. Блинков Ю.А., Гердт В.П. Специализированная система компьютерной алгебры GINV// Программирование, 2008. Т. 34, №2, С. 67–80.

Информация об авторе



Месяншин Артем Вячеславович ✉ – начальник лабораторного сектора, АО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», г. Саратов, Россия,
ORCID 0000-0002-7984-2168.


References

- [1] Gorshkov A. G., Medvedskiy A. L., Rabinskiy L. N., Tarlakovskiy D. V. Waves in continuous media, Moscow: Fizmatlit, 2004, 472 p.
- [2] Kudryashov N. A. Methods of nonlinear mathematical physics, Dolgoprudny: Intellect, 2010, 368 p.
- [3] Nariboli G. A., Sedov A. Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates, J. Math. Anal. Appl., 1970, vol. 32, pp. 661–677. DOI: 10.1016/0022-247X(70)90290-8
- [4] Erofeev V. I., Kazhaev V. V. Inelastic interaction and splitting of deformation solitons propagating in the rod, Computational Continuum Mechanics, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 127–136. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.11
- [5] Bochkarev A. V., Zemlyanukhin A. I., Mogilevich L. I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium, Acoust. Phys., 2017, vol. 63, pp. 148–153. DOI: 10.1134/S1063771017020026
- [6] Zemlyanukhin A. I., Bochkarev A. V., Andrianov I. V., Erofeev V. I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells, J. Sound Vib., 2021, vol. 491. 115752 p. DOI: 10.1016/j.jsv.2020.115752
- [7] Gromeka I. S. On the velocity of wave-like motion of fluids in elastic tubes, Collected Works, Moscow: Izd-vo AN USSR, 1952, pp. 172–183.
- [8] Zhukovskiy N. E. On hydraulic shock in water pipes, Moscow: Gostekhizdat, 1949, 103 p.
- [9] Womersley J. R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves, Phil. Mag., 1955, vol. 46, pp. 199–221. DOI: 10.1080/14786440208520564
- [10] Paidoussis M. P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2, London: Elsevier Academic Press, 2016, 942 p. DOI: 10.1016/C2011-0-08058-4
- [11] Blinkova A. Yu., Blinkov Yu. A., Mogilevich L. I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion, Computational Continuum Mechanics, 2013, vol. 6, no. 3. 336–345 p. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
- [12] Blinkov Y. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Nonlinear wave propagation in coaxial shells filled with viscous liquid, Computational Continuum Mechanics, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 172–186. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.15
- [13] Bochkarev S. A., Matveenko V. P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid, Computational Continuum Mechanics, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94–102. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12
- [14] Volmir A. S. Nonlinear dynamics of plates and shells, Moscow: Nauka, 1972, 432 p. (In Russian).
- [15] Volmir A. S. Shells in fluid and gas flow: hydroelasticity problems, Moscow: Nauka, 1979, 320 p. (In Russian).
- [16] Blinkov Yu. A., Kondratova Yu. N., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I. Mathematical modeling of nonlinear waves in coaxial shells filled with viscous fluid, Izv. Sarat. Univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 331–336. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-331-336 (In Russian).
- [17] Slyunyaev A. V., Pelinovski E. N. Dynamics of large-amplitude solitons, J. Exp. Theor. Phys., 1999, vol. 89, no. 1, pp. 173–181. DOI: 10.1134/1.558966
- [18] Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1947, vol. 43, no. 1, pp. 50–67. DOI: 10.1017/S0305004100023197

- [19] Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozzhilkin V. V. Gröbner Bases and Generation of Difference Schemes for Partial Differential Equations, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 2006, vol. 2. 26 p. DOI: 10.3842/SIGMA.2006.051
- [20] Blinkov Y. A., Gerdt V. P., Marinov K. B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods, Programming and Computer Software, 2017, vol. 43, no. 2, pp. 84–89. DOI: 10.1134/S0361768817020049
- [21] Yanenko N. N., Shokin Yu. I. First differential approximation of difference schemes for hyperbolic systems of equations, Siberian Mathematical Journal, 1969, vol. 10, pp. 868–880. DOI: 10.1007/BF00971662
- [22] Shokin Yu. I., Yanenko N. N. The Method of Differential Approximation. Application to Gas Dynamics, Nauka, 1985, 368 p.
- [23] Gerdt V. P., Robertz D. Consistency of Finite Difference Approximations for Linear PDE Systems and its Algorithmic Verification, Proceedings of the 2010 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC), 2010, pp. 53–59.
- [24] Gerdt V. P. Consistency Analysis of Finite Difference Approximations to PDE Systems, Mathematical Modelling in Computational Physics 2011, 2012, vol. 7125, pp. 28–42.
- [25] La Scala R. Gröbner bases and gradings for partial difference ideals, Mathematics of Computation, 2015, vol. 84, no. 293, pp. 959–985.
- [26] Blinkova A. Yu., Malykh M. D., Sevast'yanov L. A. On differential approximations of difference schemes, Izv. Sarat. Univ. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 472–488. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-4-472-488 (In Russian).
- [27] Blinkov Y. A., Rebrina A. Y. Investigation of Difference Schemes for Two-Dimensional Navier–Stokes Equations by Using Computer Algebra Algorithms, Programming and Computer Software, 2023, vol. 49, no. 1, pp. 26–31. DOI: 10.1134/S0361768823010024
- [28] Blinkov Yu. A. Qualitative investigation of Crank-Nicolson-type schemes using the first-order differential approximation on the example of the Korteweg-de Vries equation, Mathematical Modeling, Computational and Experimental Studies in Natural Sciences, 2023, no. 4, 18 p. DOI: 10.24412/2541-9269-2023-4-12-28
- [29] Blinkov Yu. A. Symbolic and numerical investigation of finite difference schemes using the first differential approximation: the case of the Korteweg-de Vries equation, Mathematical Modeling, Computational and Experimental Studies in Natural Sciences, 2024, no. 4, 13 p. DOI: 10.24412/2541-9269-2024-4-20-32
- [30] Blinkov Y. A., Gerdt V. P. Specialized computer algebra system GINV, Programming and Computer Software, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 112–123. DOI: 10.1134/S0361768808020096

Information about the author



Mesyanzhin Artem Vyachaslavovich ✉ – Head of the Laboratory Sector, JSC "Design Bureau of Industrial Automation Saratov, Russian Federation,  ORCID 0000-

0002-7984-2168.