ISSN 2079-6641 (Print)
ISSN 2079-665X (Online)

ВЕСТНИК КРАУНЦ

http://krasec.ru

ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ИКИР

КамГУ

15 ЛЕТ

DOI: 10.26117/2079-6641

Vestnik KRAUNTs
Fiziko-matematicheskie nauki

Bulletin KRASEC
Physical and Mathematical Sciences

2025. Т. 51. № 2 2025. vol. 51. no. 2 12 +

Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki
2025, vol. 51, no. 2

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

ВЕСТНИК КРАУНЦ

(Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»)

Физико-математические науки. 2025. Т. 51. № 2

г. Петропавловск-Камчатский

Журнал основан в августе 2010 г. Выходит 4 раза в год
Научное издание
Цена свободная
Информационная продукция для детей старше 12 лет
ISSN 20279-6641 (печатная версия), ISSN 2079-665X (электронная версия)
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-58548 от 14 июля 2014 г. выдано
Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Официальные сайты журнала: http://krasec.ru, https://journals.rcsi.science/2079-6641/index#

Ministry of Education and Science of Russian Federation
Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS
Vitus Bering Kamchatka State University
Bulletin KRASEC
(Kamchatka Regional Association «Scientific-Education Centre»)
Physical and Mathematical Sciences. 2025. vol. 51. no. 2
Petropavlovsk-Kamchatskiy City
Semi-annual edition founded in August, 2010
Scientific publication
Free price
Information products for children 12+
ISSN 2079-6641 (Print), ISSN 2079-665X (Online)
Mass Media Registrations Certificate PI No FS 77-58548 issued July 14, 2014
Official websites of the journal: http://krasec.ru, https://journals.rcsi.science/2079-6641/index#

Содержание

Contents

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ И ЧИТАТЕЛИ!

Журнал Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки вошел в перечень рецензируемых научных изданий ВАК (№ 411 список от 31.12.2023), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук, как журнал, входящий в **международные** реферативные базы данных и системы цитирования (MathSciNet и zbMath) и согласно таблицы ВАК обладает **категорией К1** с 01 января 2024 года.

За последнее время произошло расширение редакционной коллегии журнала, была создан редакционный совет, в который вошли ведущие ученые, в том числе из таких стран как Китай, Индия, Иран, ЮАР, Турция, Италия, Венгрия, Германия, Польша, Узбекистан, Казахстан. Это позволило расширить спектр направлений журнала.

Основные рубрики журнала соответствуют следующим обновленным шифрам научных специальностей:

— Математика

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

— Математическое моделирование

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

— Информационные и вычислительные технологии

1.1.6. Вычислительная математика

2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей

— Физика

1.3.3. Теоретическая физика

1.3.6. Оптика

1.3.7. Акустика

1.3.8. Физика конденсированного состояния

1.6.9. Геофизика

1.6.18. Науки об атмосфере и климате

— Приборы м методы измерений

1.3.2. Приборы и методы экспериментальной физики

2.2.4. Приборы и методы измерений (по видам измерений)

2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды

Журнал также публикует специальные выпуски, посвященные конференциям разного уровня по тематике журнала.

Журнал «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» находится в свободном доступе. Тип лицензии CC поддерживаемый журналом: (CC

BY 4.0). Полнотекстовые выпуски журнала размещается на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

4 августа 2025 году журналу исполнилось 15 лет. За этот период своей деятельности, благодаря авторам и читателям, журнал получил хорошее устойчивое развитие, расширилась география участников и редакционной коллегии, сформировалась база рецензирования, повысились индексы цитируемости, журнал вошел в более 30-ти баз цитирования, всем статьям присваивается цифровой индентификатор DOI.

В №2 журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» за 2025 г. было опубликовано 8 статей авторов из России, Узбекистана и Азербайджана. Среди 27 авторов: 5 — доктора наук, 8 — кандидаты наук, 14 — молодые ученые, аспиранты и преподаватели, научные сотрудники без степени.

Редакционная коллегия заинтересована в дальнейшем сотрудничестве, в формировании широкого высокопрофессионального научного коллектива авторов, публикующихся на его страницах, в создании своей устойчивой читательской аудитории.

Редакционная коллегия

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 9 - 27. ISSN 2079-6641

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-9-27

Обзор

Полный текст на русском языке

УДК 001

Научный журнал «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки». Итоги работы за последние 15 лет и перспективы развития

Р. И. Паровик*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Российская Федерация

Аннотация. В статье подводится итог деятельности научного рецензируемого журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» (далее журнала) за 15 последних лет, раскрываются проблемы и перспективы развития журнала. Результаты работы журнала за этот период оцениваются за счет наукометрических данных и инфографики, взятой из профиля журнала на сайте электронной библиотеки e-library. Наукометрические данные были выбраны следующими: импакт-фактор РИНЦ, индексы Хирша, Херфиндаля, Джини и ряда других. Проводится сопоставления динамики наукометрических показателей с другими журналами близкими по тематике и зарегистрированными на территории Камчатского края за последние 15 лет. Показано, что наукометрические данные журнала в общем случае имеют положительную динамику. Даются статистические данные по посещению и просмотру официального сайта журнала, которые указывают на широкую читательскую аудиторию как в России, так и за рубежом.

Ключевые слова: наукометрические показатели, инфографика, импакт-фактор, Science Index, Science Space

Получение: 12.09.2025; Исправление: 14.09.2025; Принятие: 17.09.2025; Публикация онлайн: 22.09.2025

Для цитирования. Паровик Р.И. Научный журнал «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки». Итоги работы за последние 15 лет и перспективы развития // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 9-27. EDN: SFCDPD. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-9-27.

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: parovik@krasec.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 9 - 27. ISSN 2079-6641

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-9-27

Review

Full text in Russian

MSC 91B82

Scientific Journal "Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences". Results of Work Over the Past 15 Years and Development Prospects

R. I. Parovik*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatsky Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

Abstract. The article summarizes the activities of the peer-reviewed scientific journal «Vestnik KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences» (hereinafter referred to as the journal) over the past 15 years, and reveals the problems and prospects for the journal's development. The results of the journal's work for this period are assessed using scientometric data and infographics taken from the journal's profile on the e-library website. The following scientometric data were selected: the RSCI impact factor, the Hirsch, Herfindahl, Gini and other indices. A comparison of the dynamics of scientometric indicators with other journals similar in subject matter and registered in the Kamchatka Territory over the past 15 years is made. It is shown that the scientometric data of the journal generally have positive dynamics. Statistical data on visits and views of the journal's official website are provided, which indicate a wide readership both in Russia and abroad.

Key words: scientometric indicators, infographics, impact factor, Science Index, Science Space.

Received: 12.09.2025; Revised: 14.09.2025; Accepted: 17.09.2025; First online: 22.09.2025

For citation. Parovik R.I. Scientific journal "Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences". Results of work over the past 15 years and development prospects. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 9-27. EDN: SFCDPD. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-9-27.

Funding. The work was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to the writing of the article and is solely responsible for the submission of the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: parovik@krasec.ru

Введение

Федеральная служба
по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
(Роскомнадзор)

СВИДЕТЕЛЬСТВО

О РЕГИСТРАЦИИ СРЕДСТВА МАССОВОЙ ИНФОРМАЦИИ
ПИ № ФС77-58548 от 14 июля 2014 г.

Название: Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки

Адрес редакции: 683032, Камчатский край, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4

Примерная тематика и (или) специализация: Научная, реклама в соответствии с законодательством Российской Федерации о рекламе

Форма периодического распространения (вид - для периодического печатного издания): Периодическое печатное издание, журнал

Язык(и): русский, английский

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Учредитель (соучредители) (адрес): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга" (683032, , Камчатский край, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4), Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук (684034, Камчатский край, Елизовский р-н, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7)

Заместитель руководителя М.Ю. Ксензов

Начальник Управления разрешительной работы в сфере массовых коммуникаций М.В. Виноградов

052329

Рис. 1. Свидельство о регистрации СМИ
Figure 1. Certificate of registration of MM

4 августа 2025 года научному журналу «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» исполнилось 15 лет с момента его создания. Журнал был зарегистрирован Федеральной службой по надзору за соблюдением законодательства в сфере массовых коммуникаций и охране культурного наследия (свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ ФС 77-41501 от 04.08.2010 г.), перерегистрирован (свидетельство ПИ No ФС77-58548 от 14.07.2014 г.) в связи с переименованием одного из Учредителей (рис. 1). Учредителями журнала являются: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук и Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга».

Журнал с 2016 года выходит 4 раза в год в печатной (ISSN: 2079-6641) и электронной (ISSN: 2079-665X) версиях на русском и английском языках. Объем выпуска до 250 страниц.

Журнал издается на средства учредителей и статьи публикуются в нем бесплатно, статьи размещаются в свободном доступе.

Журнал придерживается прозрачной политики и публикационной этики. Более детально о политиках журнала и правилах публикации в нем можно узнать на официальном сайте [1].

Журнал является рецензируемым (слепое рецензирование). Для экспертной оценки рукописей привлекаются ведущие специалисты по основным научным направлениям (рубрикам) выпуска журнала.

В настоящей статье мы приведем наукометрические показатели журнала и их инфографику, взятую с сайта e-library.ru [2], так как они отражают, более достоверную и полную информацию по журналу за 2010-2024 гг.

Необходимо отметить, что пять лет назад был осуществлен подобный анализ показателей журнала, результаты которого были отражены в статье [3].

В настоящей статье также рассматриваются некоторые проблемы и перспективы развития журнала.

Тематика журнала

В журнале публикуются результаты фундаментальных и прикладных исследований в области физико-математических наук по следующим разделам (рубрикам) математика, математическое моделирование, физика, информационные и вычислительные технологии, приборы и методы измерений.

Необходимо отметить, что в разные годы были в журнале такие разделы как нанотехнологии (2012-2014 гг), методика преподавания математики и информатики (2013-2022 гг). Здесь возникновение первого раздела обусловлено тем, что в 2010-2015 гг наблюдался рост публикаций по нанотехнологиям. Возникновение второго раздела было связано с деятельностью кафедр математики и физики, а также информатики КамГУ им. Витуса Беринга, который создавался как педагогический институт и обладал сильными позициями по методике преподавания физико-математических дисциплин.

На рис. 2 приведено распредление публикаций по научным направлениям, имевшимся в журнале с 2010 по 2024 г.

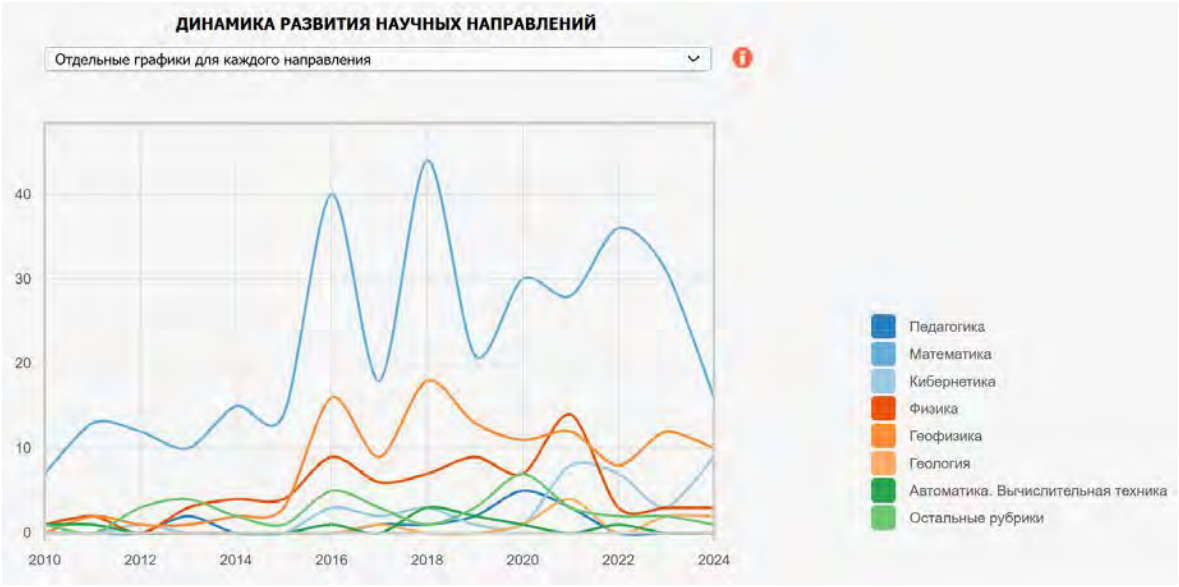


Рис. 2. Динамика научных направлений за 2010-2024 гг
Figure 2. Dynamics of scientific directions for 2010-2024

На рис. 2 приведена динамика научных направлений журнала за 2010-2024 гг. Динамика показывает количество статей по научным направлениям за этот период. Видно, что больше всего статей было по математике и физике (геофизике).

Такая динамика подтверждается инфографикой на рис. 3 по распределению числа публикаций в рубриках за 2010-2014 гг (610 статей).

Исходя из этих данных, журнал был включен в рейтинг Science Index электронной библиотеки e-library по тематикам «Математика» и «Физика».

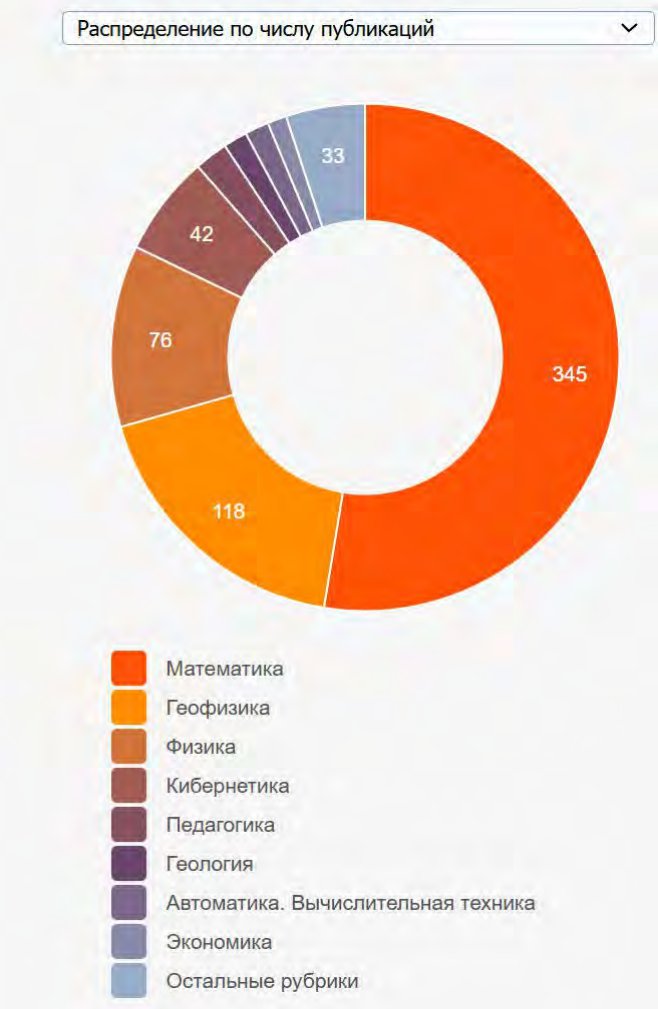


Рис. 3. Распределение по числу публикаций в рубриках за 2010-2024
Figure 3. Distribution by number of publications in sections for 2010-2024

Рейтинг журнала в Science Index

Science Index — это информационно-аналитическая система, построенная на основе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) и предлагающая целый ряд дополнительных сервисов для авторов научных публикаций, научных организаций и издательств. Science Index позволяет проводить комплексные аналитические и статистические исследования публикационной активности российских ученых и научных организаций и получать в результате более точную и объективную оценку результатов научной деятельности отдельных ученых, научных групп, организаций и их подразделений.

На рис. 4 мы видим, что последние 10 лет наблюдается практически рост индекса Science Index. Однако место в рейтинге по тематикам «Математика» и «Физика» изменилось незначительно, хотя и с положительной динамикой. Например, в 2016 году было 90 место по Математике и 109 место по Физике. В 2024 году — 87 место по Математике и 104 место по Физике (рис. 5).

Рис. 4. Показатель журнала в общем рейтинге Science Index за 2010-2024, нормированный на 1000

Figure 4. The journal's performance in the overall Science Index ranking for 2010-2024, normalized to 1000

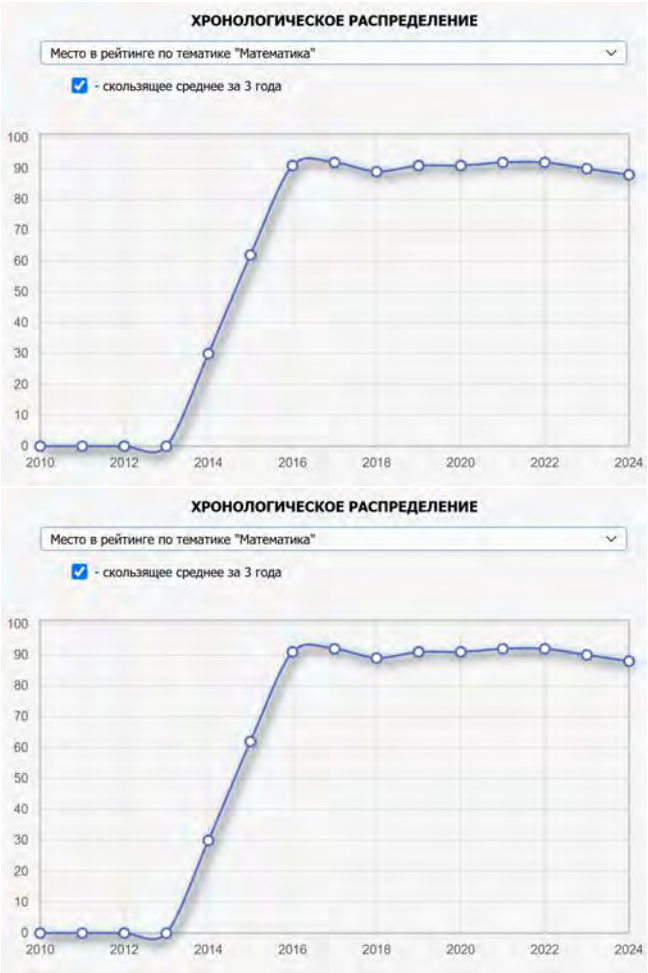


Рис. 5. Рейтинг журнала по тематике «Математика» и по тематике «Физика»

Figure 5. Journal ranking by subject «Mathematics» and by subject «Physics»

На рис. 6 приведен фрагмент общего рейтинга журнала в Science Index за 2024 год.

1507.	Вестник Пермского федерального исследовательского центра Science Index (34%)	4,845
1508.	Рыбное хозяйство ВАК, Science Index (34%)	4,843
1509.	Труды Института системного анализа Российской академии наук ВАК, Science Index (34%)	4,842
1510.	Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки ВАК, Science Index (34%)	4,837
1511.	Антенны Scopus (част.), ВАК, Science Index (34%)	4,830
1512.	Научно-методический электронный журнал "Концепт" ВАК, Science Index (34%)	4,829
1513.	Судостроение RSCI, ВАК, Science Index (34%)	4,828
1514.	Художественная культура ВАК, Science Index (34%)	4,827
1515.	Андрология и генитальная хирургия Scopus, ВАК, Science Index (34%)	4,824
1516.	Известия МГТУ МАМИ RSCI, ВАК, Science Index (34%)	4,824
1517.	Записки Института истории материальной культуры ВАК, Science Index (34%)	4,824
1518.	Российский внешнеэкономический вестник ВАК, Science Index (34%)	4,823
1519.	Новости систематики высших растений Scopus, RSCI, ВАК, Science Index (34%)	4,822
1520.	Вестник Национального медико-хирургического центра им. Н.И. Пирогова RSCI, ВАК, Science Index (34%)	4,820
1521.	Вестник рентгенологии и радиологии RSCI, ВАК, Science Index (34%)	4,820
1522.	Вестник Камчатского государственного технического университета ВАК, Science Index (34%)	4,816

Рис. 6. Фрагмент таблицы общего рейтинга журнала в Science Index за 2024 год
Figure 6. Fragment of the General Rating table of the journal in Science Index for 2024

В 2024 году журнал занял 1510 место в общем рейтинге Science Index. Здесь необходимо отметить, что журнал достаточно сильно поднялся в общем рейтинге за 2023 год с 1854 до 1585 места (269 пунктов). Это обусловлено подключением в 2025 году к системе Science Space электронной библиотеки e-library, которая позволили исправить многие некорректные ссылки на статьи в журнале.

Информационно-аналитическая система Science Space предназначена для издателей научной информации и позволяет комплексно и эффективно решать целый ряд задач, возникающих в процессе издательской деятельности. Работая в Science Space, издательство получает дополнительные инструменты для библиометрического анализа публикаций в своих журналах, их цитируемости и востребованности.

Отметим также, что исходя из фрагмента рейтинга Science Index за 2024 год (рис. 6), журнал находится выше, чем журнал Вестник Камчатского государственного технического университета (1522 место), хотя в 2023 году он был на 1547 месте, а наш журнал на 1585-м.

Рассмотрим рейтинг Science Index за 2024 год из 128 журналов по тематике «Математика» (рис. 7) и по тематике «Физика» (рис. 8) из 133 журналов соответственно.

Рис. 7. Фрагмент таблицы рейтинга Science Index по тематике «Математика» 2024 год
Figure 7. Fragment of the Science Index ranking table by subject «Mathematics» 2024

Рис. 8. Фрагмент таблицы рейтинга Science Index по тематике «Физика» 2024 год
Figure 8. Fragment of the Science Index ranking table by subject «Physics» 2024

Из рис. 7 по тематике «Математика» в 2024 году журнал обошел Дальневосточный математический журнал, который является одним из ключевых по математике на Дальнем Востоке. По тематике «Физика» в 2024 году журнал (рис. 8) вошел в группу журналов достаточно высокого уровня, некоторые из которых входят в Scopus, RSCI, WOS.

Выход на 1510 место для нашего журнала является важным этапом в его развитии. Журналы, которые занимают места до 1500-го имеют право подать заявку на включение в ядро РИНЦ — список лучших российских научных

журналов, отобранных по критериям качества и включаемых в базу данных Web of Science или Scopus для их русскоязычной версии (RSCI).

На место в рейтинге Science Index влияет число цитирований из РИНЦ, и больше всего из ядра РИНЦ (Scopus, WOS) (рис. 9).

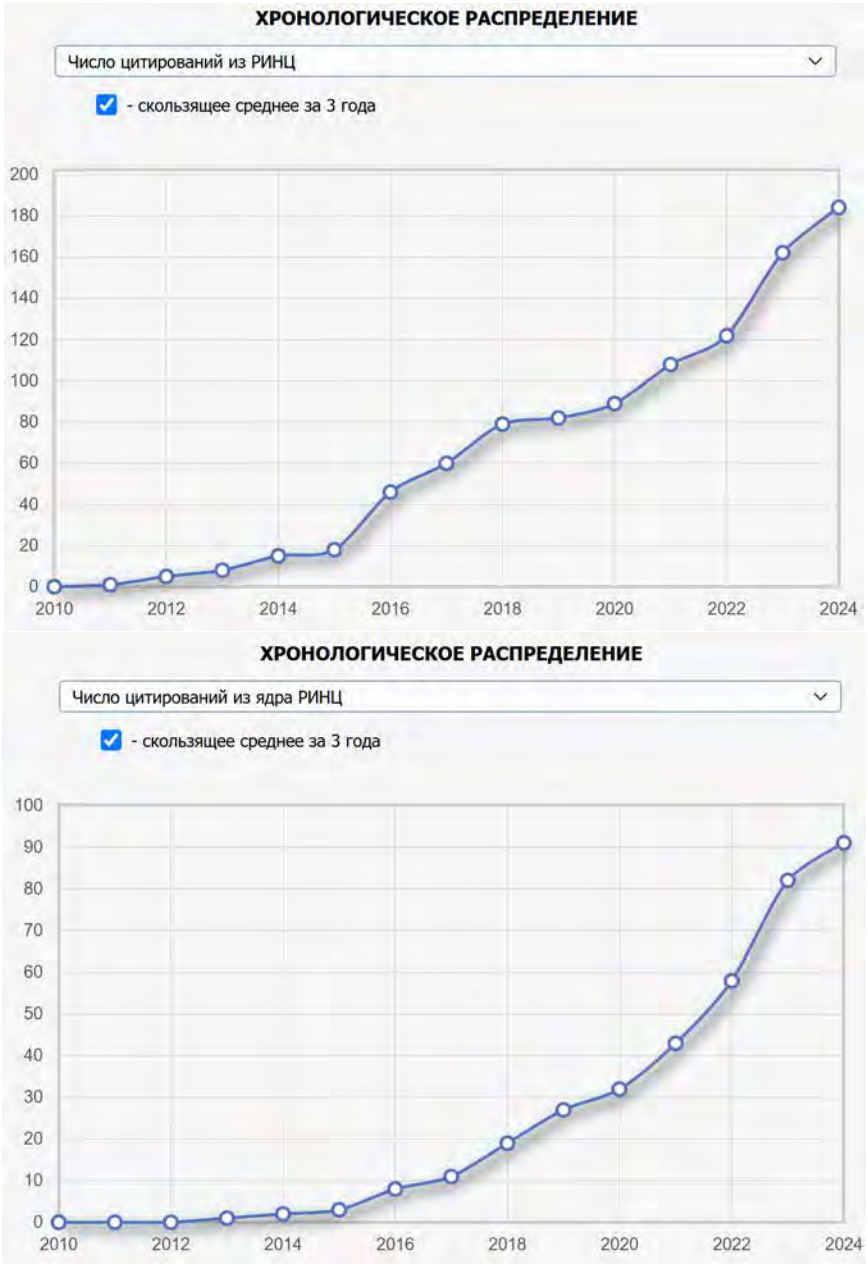


Рис. 9. Число цитирований из РИНЦ и ядра РИНЦ
Figure 9. Number of citations from the RSCI and the RSCI core

Здесь мы видим рост числа цитирований, включая и самоцитирования журнала за последние 14 лет.

На рис. 10 представлены источники цитирования журнала. Больше всего цитирования идут из журналов перечня ВАК и журналов из перечня RSCI.

Цитирование играет важную роль при формировании импакт-фактора журнала.

Рис. 10. Источники цитирования журнала
Figure 10. Journal Citation Sources

Импакт-фактор журнала — это количественный показатель, отражающий среднюю частоту цитирования статей, опубликованных в журнале, за определённый период.

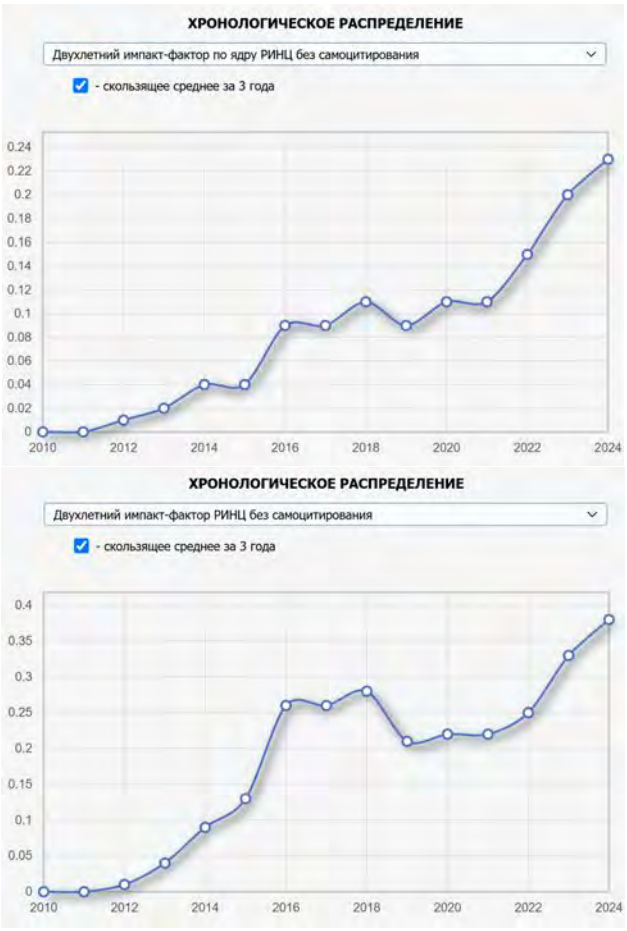


Рис. 11. Двулетний импакт-фактор по ядру РИНЦ и РИНЦ без самоцитирования
Figure 11. Two-year impact factor for the RSCI core and RSCI without self-citation

На рис. 11 приведен двулетний импакт-фактор по ядру РИНЦ и РИНЦ без самоцитирования.

Динамика ожидаема, импакт-фактор растет в силу роста цитирования (рис. 9), в тоже время коэффициент самоцитирования падает (рис. 12).

Рис. 12. Пятилетний коэффициент самоцитирования
Figure 12. Five-year self-citation rate

Некоторые другие наукометрические данные

Индекс Херфиндаля (Хиршмана) по организациям авторов рассчитывается как сумма квадратов процентных долей количества статей, опубликованных различными организациями, по отношению к общему количеству статей в журнале в текущем году, в которых организация идентифицирована. Чем больше различных организаций, авторы из которых публикуются в журнале, и чем равномернее распределены между ними публикации, тем меньше величина этого показателя. Максимальное значение равно 10000 и достигается, когда в журнале публикуются авторы только из одной организации. Этот показатель показывает является ли журнал «домашним».

Аналогично определяется индекс Херфиндаля для цитирующих журналов. Максимальное значение равно 10000, при котором ссылки следуют из одного журнала, т.е. полное самоцитирование.

Из рис. 13 видно, что длительное время индекс Херфиндаля уменьшался. Такая динамика связана с тем, что в журнале стали публиковаться авторы из других организаций, а также стали часто ссылаться авторы из других журналов.

Рис. 13. Индекс Херфиндаля по организации авторов и по цитирующим журналам
Figure 13. Herfindahl index by author organization and by citing journals

Необходимо отметить, что начиная с 2021 года традиционно четвертый выпуск журнала, посвящен работам сотрудников ИКИР. Поэтому именно с 2021 года наблюдается некоторый рост индекса Херфиндаля по организациям. Кроме того, авторы, которые публиковались ранее в журнале стали повторно подавать свои статьи в журнал. Эту динамику косвенно подтверждает топ-10 журналов, цитирующие данный журнал (рис. 14).

Рис. 14. Топ-10 журналов, цитирующие статьи в данном журнале
Figure 14. Top 10 journals citing articles in this journal

Индекс Джини отражает степень неравномерности распределения статей в журнале по числу их цитирований. Может принимать значения от нуля до единицы. Нулевое значение индекса соответствует ситуации, когда все статьи в журнале за год получили одинаковое количество цитирований.

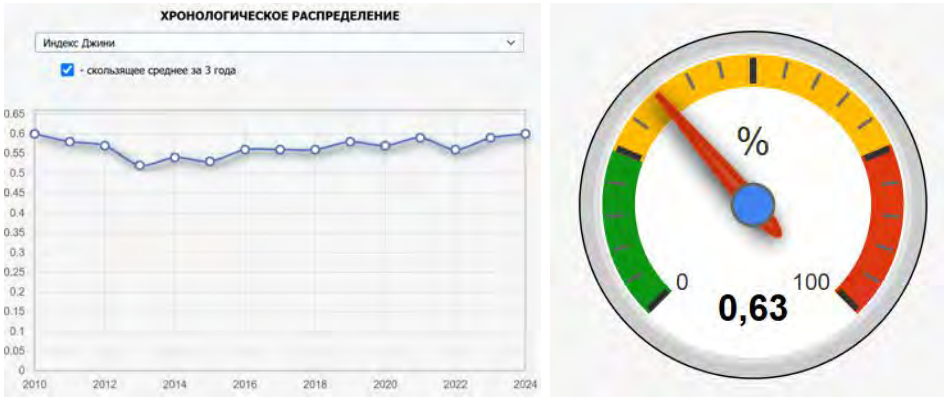


Рис. 15. Индекс Джини
Figure 15. Gini index

Из рис. 15 мы видим, что наблюдается достаточное неравномерное распределение цитирования статей. В заключении по наукометрическим показателям приведем число загрузок статей и просмотров описаний (рис. 16).

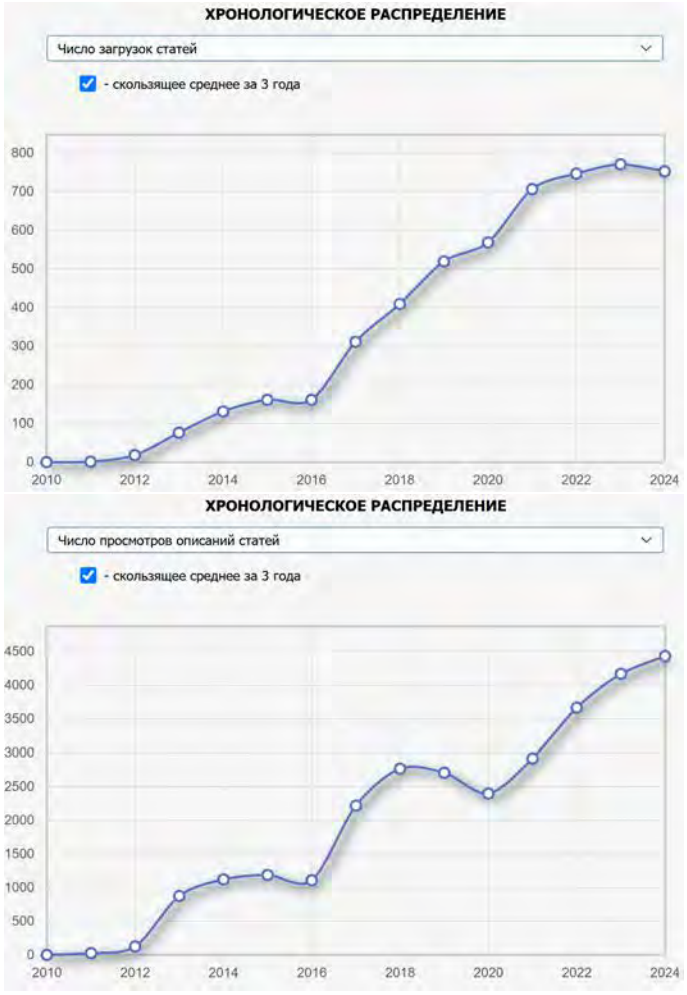


Рис. 16. Число загрузок статей и просмотров описаний
Figure 16. Number of article downloads and description views

Из рис. 16 мы видим рост загрузок и просмотров статей, что дает надежду на привлечение новых авторов (статей) в журнал, что в свою очередь должно положительно отразиться на наукометрических индексах.

Перечень ВАК и категория К1

Журнал входит в перечень ВАК с 15.01.2018 по настоящее время, как входящий в Международные реферативные базы данных и системы цитирования (MathSiNet, zbMath), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук.

Последний перечень журналов ВАК, входящих в Международные реферативные базы данных и системы цитирования был датирован 31.12.2023 [4]. Однако согласно итоговому распределению журналов Перечня ВАК по категориям К1, К2, К3 в 2023 году от 08 декабря 2023 года, наш журнал попал в категорию К1 [5] (Табл.).

Таблица

Категорирование журналов ВАК [5]/Categorization of HAK journals [5]

ИНДЕКСАЦИЯ ЖУРНАЛА	ПРИСВОЕНИЕ КАТЕГОРИИ К1	ПРИСВОЕНИЕ КАТЕГОРИИ К2	ПРИСВОЕНИЕ КАТЕГОРИИ К3
ВАК	На основании рейтингования	На основании рейтингования	На основании рейтингования
Web of Science, включая RSCI	Российские и зарубежные журналы, индексируемые в Q1, Q2, Q3 и AHCI, RSCI	Российские журналы, индексируемые в Q4 и ESCI	Зарубежные журналы, индексируемые в Q4
Scopus	Российские и зарубежные журналы, индексируемые в Q1, Q2 и Q3	Российские журналы, индексируемые в Q4	Зарубежные журналы, индексируемые в Q4
PubMed, MathSciNet, zbMATH, Chemical Abstract, GeoRef, Springer	Журналы, индексируемые в указанных базах данных	—	—

Результаты категорирования Перечня ВАК (Табл. 1) начали действовать с 1 января 2024 года на срок 3 года. Однако электронная библиотека e-library не

руководствуется Табл. 1, а руководствуется основным перечнем ВАК. Поэтому в профиле журнала отсутствует информация о категории журнала ВАК, хотя он входит в перечень ВАК (рис. 17).

Рис. 17. Информация о журнале в его профиле e-library
Figure 17. Information about the journal is in its e-library profile

Такая же проблема наблюдается у журнала «Вулканология и сейсмология» (рис. 18)

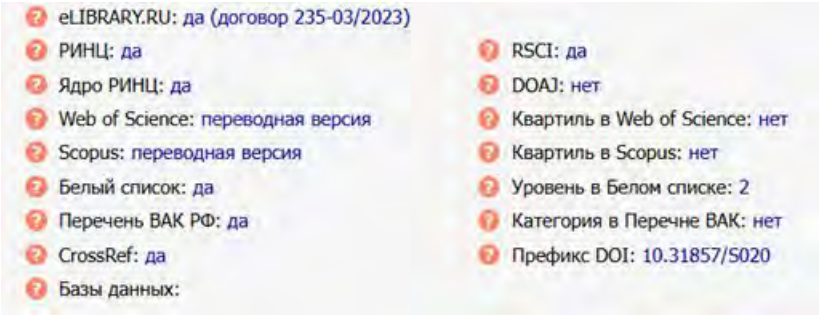


Рис. 18. Информация о журнале «Вулканология и сейсмология» в профиле e-library
Figure 18. Information about the journal «Volcanology and Seismology» in the e-library profile

Отсутствие записи о категории журнала в профиле может привести к следующим негативным последствиям. Диссертационные советы, подстраховывая себя, не охотно учитывают публикации в таких журналах для защиты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук. Здесь необходимо добиться категорирования журнала, которого можно достичь вхождением в основной перечень ВАК.

Здесь также необходимо отметить следующее ВАК и Минобрнауки формируют единый государственный перечень научных изданий (ЕГПНИ). Основная идея этого списка - объединение списка ВАК и Белого списка журналов. Возможно, если журнал войдет в ЕГПНИ, тогда журналу присвоят категорию. К сожалению, в список ЕГПНИ от 09.09.2025 г. наш журнал не вошел. На сайте оператора этого списка Российского центра научной информации РЦНИ [6], указано, что до конца 2025 года должны появится требования для вхождения в него.

Официальный сайт журнала

Официальный сайт расположен на хостинге Beget (https://cp.beget.com/main). Сайт разработан согласно требованиям Scopus, прошел экспертизу Elpub [7], имеет свою независимую электронную редакцию. Рассмотрим статистику официального сайта журнала (https://krasec.ru/).

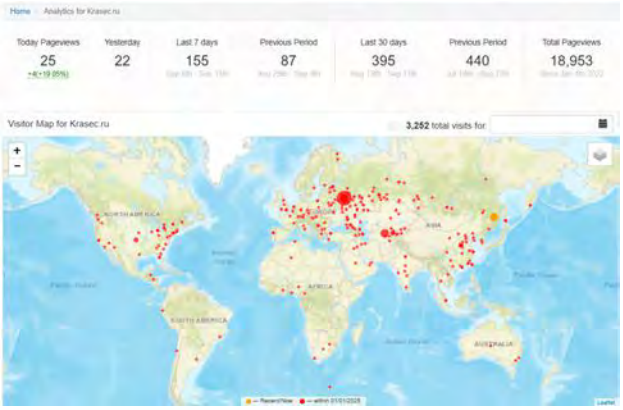


Рис. 19. Число посещений сайта с 01.01.2025 г. по 09.09.2025 г
Figure 19. Number of site visits from 01.01.2025 to 09.09.2025

Country	Locations	Visits	Uniques
Russia	112 Locations	1,602	964
Uzbekistan	8 Locations	515	262
United States	37 Locations	355	262
China	27 Locations	316	282
Azerbaijan	3 Locations	42	18
Serbia	3 Locations	36	9
Kyrgyzstan	2 Locations	31	17
India	8 Locations	29	26
Iran	3 Locations	23	21
Canada	6 Locations	23	19
United Kingdom	5 Locations	19	10
Kazakhstan	7 Locations	14	11
France	3 Locations	14	11
Germany	4 Locations	12	11
Hong Kong	3 Locations	12	10

Рис. 20. Распределение по странам числа посещений сайта с 01.01.025 г. по 09.09.2025 г
Figure 20. Distribution of site visits by country from 01.01.025 to 09.09.2025

Видно, из рис. 19 и 20, что просмотр сайта практически охватывает все мировые континенты. Необходимо также отметить, что широкий интерес вызывает журнал в странах Северной Америки, Азии и Европы. Последнее вселяет надежду на расширение географии публикаций и привлечение новых иностранных авторов.

Заключение

В заключении хочется подвести итог 15-летней работы журнала. За этот период выросли наукометрические показатели журнала: Science Index, импакт-фактор, число просмотров и загрузок статей, а также ряда других показателей. Особенно рост чувствуется последние 5 лет [3]. Этот рост связан, с одной стороны, с улучшением качества публикуемых статей, и переходом на платформу в Science Space, которая позволила исправить большое количество неправильных ссылок на статьи в журнале. Однако существует ряд нерешенных задач, которые должны способствовать развитию журнала. Первое — это вхождение в ядро РИНЦ (преодоление границы Science Index в 1500 пунктов), получение категории ВАК в РИНЦ. Чтобы дальше улучшить показатели журнала, нужно корректно давать ссылки на журнал из тех журналов, которые входят в ядро РИНЦ, избегать неоправданного и избыточного самоцитирования. Конечно, также необходимо рассмотреть возможность подать заявку в международную базу в Scopus. Ведь тогда, после попадания в Scopus, журнал автоматически попадает и в ядро РИНЦ. Второе — переход на электронную модель, отказ от печатной версии. Это позволит в оперативном порядке выкладывать отрецензированные работы в режиме on-first в различных базах данных и сайтах, а также экономить финансовые средства. Электронная версия журнала сократит время, затраченное на обработку и подготовку печатного оригинал-макета, а также позволит корректировать статьи в реальном времени.

Список литературы

1. *Официальный сайт журнала Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, [сайт] https://krasec.ru/ (дата обращения: 17.09.2025).
2. *Электронная научна библиотека e-library*, [сайт] https://elibrary.ru/ (дата обращения: 17.09.2025).
3. Паровик Р.И. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. Итоги за 10 лет и перспективы развития // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 32, №3, С. 8-14.
4. *Информационное письмо ВАК при Минобрнауки России от 6 декабря 2022 № 02-1198 "О категорировании Перечня рецензируемых научных изданий"*, [сайт] https://vak.gisnauka.ru/s3-files/01cc80c69fae4988a0246a8f5e2774e7:fisgna/public/media/uploaded/news_files/cca86efb-449a-4d5b-971d-20dceb9cbf9f/9bffa730-88ef-4d2a-b58b-c84bab9_rruI2b9.pdf (дата обращения: 17.09.2025).
5. *Приравнивание научных журналов, входящих в наукометрические базы данных, к журналам Перечня ВАК с распределением по категориям*, [сайт] https://vak.gisnauka.ru/s3-files/01cc80c69fae4988a0246a8f5e2774e7:fisgna/public/media/news_files/95b18614-ac93-490c-9650-0b545506660c/31e23623-a6c8-41d7-8399-448ad24_qgmZMPL.pdf (дата обращения: 17.09.2025).
6. *Российский центр научной информации*, [сайт] https://rcsi.science/ (дата обращения: 17.09.2025).
7. *Система комплексной поддержки и сопровождения научного журнала Elpub*, [сайт] https://elpub.ru/ (дата обращения: 17.09.2025).

Информация об авторе

Паровик Роман Иванович✉ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор ДВО РАН, ведущий научный сотрудник ИКИР ДВО РАН, заместитель главного редактора журнала "Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки", с. Паратунка, Камчатский край, РФ, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Official website of the journal Vestnik KRAUNC. Physical and mathematical sciences. https://krasec.ru/(access date: 17.09.2025)

[2] Electronic scientific library e-library. https://elibrary.ru/(access date: 17.09.2025)

[3] Parovik R.I. Bellutin KRASEC. Physical and mathematical sciences. Results for 10 years and development prospects. Bellutin KRASEC. Phys.-mat. Sciences. 2020. vol. 32. no. 3 . pp. 8-14.

[4] Information letter of the Higher Attestation Commission under the Ministry of Education and Science of Russia dated December 6, 2022 No. 02-1198 "On categorization of the List of peer-reviewed scientific publications". https://vak.gisnauka.ru/s3-files/01cc80c69fae4988a0246a8f5e2774e7:fisgna/public/media/uploaded/news_files/cca86efb-449a-4d5b-971d-20dceb9cbf9f/9bffa730-88ef-4d2a-b58b-c84bab9_rruI2b9.pdf(access date: 17.09.2025)

[5] Final distribution of journals of the HAC List by categories K1, K2, K3 in 2023 from December 08, 2023. Equation of scientific journals included in scientometric databases to journals of the HAC List with distribution by categories. https://vak.gisnauka.ru/s3-files/01cc80c69fae4988a0246a8f5e2774e7:fisgna/public/media/uploaded/news_files/95b18614-ac93-490c-9650-0b545506660c/31e23623-a6c8-41d7-8399-448ad24_qgmZMPL.pdf(access date: 17.09.2025)

[6] Russian Center for Scientific Information. https://rcsi.science/(access date: 17.09.2025)

[7] The system of complex support and maintenance of the scientific journal Elpub. https://elpub.ru/(access date: 17.09.2025)

About the author

Parovik Roman Ivanovich✉ – DSc. (Phys.& Math.), Associate Professor, Professor of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Leading Researcher of the Institute of Radiation and Radiation Therapy of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Deputy Editor-in-Chief of the Journal "Bellutin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences", Paratunka, Kamchatka, Russian Federation, ORCID 0000-0002-1576-1860.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 28 - 44. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-28-44

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

О разрешимости одной обратной задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области

А. Б. Бекиев*

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, 230112, г. Нукус, ул. Ч. Абдирова, дом 1, Узбекистан

Аннотация. В данной работе для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области рассмотрена обратная задача по поиску неизвестной правой части. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным и ее присоединенным функциям соответствующей спектральной задачи. Собственные функции соответствующей спектральной задачи и ее присоединенные функции являются полной системой и образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Единственность решения обратной задачи вытекает из полноты системы собственных и присоединенных функций. Установлены достаточные условия на заданные начальные функции, которые гарантируют теоремы существования и устойчивости решения задачи. В замкнутой области показана абсолютная и равномерная сходимость найденного решения обратной задачи в виде ряда, а также рядов, полученных почленным дифференцированием по t и x соответственно три и четыре раза. Доказана также, устойчивость решения обратной задачи по нормам пространств $L_2(0,1)$, $W_2^n(0,1)$ и $C(\Omega)$, относительно изменения входных данных.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, обратная задача, метод разделения переменных, единственность, существование, устойчивость решения

Получение: 29.03.2025; Исправление: 23.06.2025; Принятие: 29.06.2025; Публикация онлайн: 17.09.2025

Для цитирования. Бекиев А. Б. О разрешимости одной обратной задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 28-44. EDN: TNKVGB. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-28-44.

Финансирование. Работа выполнялась без поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: ashir1976@mail.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 28 - 44. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-28-44

Research Article

Full text in Russian

MSC 35R30

On Solvability of One Inverse Problem for a Fourth Order Equation in the Rectangular Domain

A. B. Bekiev*

Karakalpak State University named after Berdakh, 230112, Nukus city, Ch.Abdirov St. 1, Uzbekistan

Abstract. In this paper, for the fourth order equation in the rectangular domain, the inverse problem of finding the unknown right-hand side is considered. The solution of the problem is constructed as a sum of series of eigenfunctions and its associated functions of the corresponding spectral problem. The eigenfunctions of the corresponding spectral problem and its associated functions are complete system and form a Riesz basis in the space $L_2(0,1)$. The uniqueness of the solution to the inverse problem follows from the completeness of the system of eigen and associated functions. Sufficient conditions are established for the given initial functions, which guarantee existence and stability theorems for the solution of the problem. In a closed region, the absolute and uniform convergence of the found solution to the inverse problem is shown in the form of a series, as well as series obtained by term-by-term differentiation with respect to t and x, three and four times, respectively. It has also been proven that the solution to the inverse problem is stable according to the norms of spaces $L_2(0,1)$, $W_2^n(0,1)$ and $C(\Omega)$, with respect to changes in input data.

Key words: fourth order equation, inverse problem, method of separation of variables, uniqueness, existence, stability.

Received: 29.03.2025; Revised: 23.06.2025; Accepted: 29.06.2025; First online: 17.09.2025

For citation. Bekiev A. B. On solvability of one inverse problem for a fourth order equation in the rectangular domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 28-44. EDN: TNKVGB. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-28-44.

Funding. The work was carried out without the support of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for the submission of the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: ashir1976@mail.ru

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется краевым задачам для уравнения в частных производных четвертого порядка, т.к. описывает различные математические модели в физических, химических, биологических процессах. Теория этих задач наряду с огромным прикладным значением считается новой теорией, развивающейся в классической математической физике.

Изучение задачи динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, вибрации кораблей, поперечные колебания стержня, балок и пластины и т.д., сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка рассмотрены в работах [1–13]. В монографии [14] дается классификация уравнений четвертого порядка с двумя независимыми переменными и исследуются некоторые краевые задачи для этих уравнений. Там же можно найти наиболее полную библиографию по уравнениям четвертого порядка. В работах [15–17] рассмотрены начально-граничные задачи для уравнения колебания балки и пластины. В этих работах доказано единственность, существование и устойчивость решения задачи для уравнения колебания балки и пластины. В работе [18] рассмотрена смешанная задача с нелокальными условиями, содержащими интегральный оператор для уравнения четвертого порядка. Получены априорные оценки, доказана единственность и существование решения задачи.

Обратные задачи имеют многочисленные приложения и возникают в различных областях науки и техники, например, некоторые задачи сейсмологии, геофизики, разведка полезных ископаемых, биологии, медицины, компьютерной томографии и т.д. приводят к изучению обратных задач. Различные обратные задачи для дифференциальных уравнений исследуются во многих работах [19–25].

В данной работе рассмотрены обратные задачи с нелокальными условиями для уравнения четвертого порядка. Корректность краевых задач для уравнений с частными производными четвертого порядка, устанавливается доказательством существования и единственности решения.

Постановка задачи

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{ttt} - u_{xxxx} = f(x). \tag{1}$$

Задача 1. Найти в области Ω функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям

$$u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{4,3}_{x,t}(\Omega), f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1]; \tag{2}$$

$$Lu(x,t) = f(x),\ (x,t) \in \Omega; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(x,\beta) = \xi(x),\ u_t(x,\beta) = \mu(x),\ 0 \le x \le 1; \end{gathered} \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t),\ u_x(0,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t),\ u_{xxx}(1,t) = 0,\ 0 \le t \le \beta, \quad (5)$$

где $\varphi(x)$, $\xi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$ - заданные функции, причем $\varphi^{(2i)}(0) = \varphi^{(2i)}(1)$, $\xi^{(2i)}(0) = \xi^{(2i)}(1)$, $i = 0,1$; $\varphi'(0) = \varphi'''(1) = \xi'(0) = \xi'''(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\mu(0) = \mu(1)$.

Под классическим решением обратной краевой задачи (2)–(5) понимаем пару $\{u(x,t), f(x)\}$ функций $u(x,t) \in C^{4,3}_{x,t}(\Omega)$ и $f(x) \in C(0,1)$, удовлетворяющую условиям (2)–(5) в обычном смысле.

Единственность и существования решения обратной задачи

Решаем задачи (2)–(5) методом разделения переменных $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тогда имеем для функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$\begin{gathered} X^{IV}(x) - \eta X(x) = 0,\ \ 0 < x < 1, \\ X(0) = X(1),\ X'(0) = 0, X''(0) = X''(1), X'''(1) = 0, \end{gathered} \quad (6)$$

где η -постоянная разделения.

Спектральная задача (6) несамосопряженная и имеет следующую систему собственных чисел, собственных и присоединенных функций [11]:

$$\begin{gathered} \lambda_k = 2k\pi,\ \ k = 1,2,..., \\ X_0(x) = 1,\ X_{1k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \sin(\lambda_k x),\ X_{2k}(x) = 2\cos(\lambda_k x),\ \ k = 1,2,.... \end{gathered} \quad (7)$$

Для задачи (6) сопряженная задача имеет вид:

$$\begin{gathered} Y^{IV}(x) - \eta Y(x) = 0,\ \ 0 < x < 1, \\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = Y'(1),\ Y''(1) = 0, Y'''(0) = Y'''(1). \end{gathered} \quad (8)$$

Решение задачи (8) примет вид [11]:

$$Y_0(x) = 2x,\ \ Y_{1k}(x) = 2\sin(\lambda_k x),\ \ Y_{2k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \cos(\lambda_k x),\ k = 1,2,.... \quad (9)$$

Система функций (7) и (9) биортогональная и образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Рассмотрим функции

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x,t)\, Y_0(x)\, dx, \quad (10)$$

$$u_{i,k}(t) = \int_0^1 u(x,t)\, Y_{ik}(x)\, dx,\ i = 1,\ 2;\ k = 1,2,.... \quad (11)$$

На основе (10) и (11) введем следующие функции

$$u_{0,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,t)\,Y_0(x)\,dx,\ u_{ik,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}u(x,t)\,Y_{ik}(x)\,dx,\ i=1,\,2;\ k=1,2,...,\tag{12}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя функции (12) по t три раза и учитывая уравнение (1), имеем:

$$u'''_{0,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[f(x)+u_{xxxx}(x,t)]\,Y_0(x)\,dx,\ u'''_{ik,\varepsilon}(t)=\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[f(x)+u_{xxxx}(x,t)]\,Y_{ik}(x)\,dx.$$

В этих равенствах вычисляя интегралы правой части, учитывая условия (5), и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем:

$$u'''_0(t)=f_0,\tag{13}$$

$$u'''_{ik}(t)-\nu_k^3u_{ik}(t)=f_{ik},\tag{14}$$

где $\nu_k^3=\lambda_k^4$ и

$$f_0=\int_0^1 f(x)\,Y_0(x)\,dx,\ f_{ik}=\int_0^1 f(x)\,Y_{ik}(x)\,dx.\tag{15}$$

Дифференциальные уравнения (13), (14) имеют общие решения:

$$u_0(t)=f_0\frac{t^3}{6}+a_0\frac{t^2}{2}+b_0t+c_0,\tag{16}$$

$$u_{ik}(t)=a_{ik}e^{\nu_kt}+e^{-\frac{1}{2}\nu_kt}\left(b_{ik}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_kt\right)+c_{ik}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_kt\right)\right)-\nu_k^{-3}f_{ik},\tag{17}$$

где $a_0,\ b_0,\ c_0,\ a_{ik},\ b_{ik},\ c_{ik}$ - произвольные постоянные.

Для определения коэффициенты $a_0,\ b_0,\ c_0,\ a_{ik},\ b_{ik},\ c_{ik}$ и $f_0,\ f_{ik}$ используем условия (4), которые переходят

$$\begin{gathered}u_0(0)=\varphi_0,\ u_0'(0)=\psi_0,\ u_0(\beta)=\xi_0,\ u_0'(\beta)=\mu_0,\\ u_{ik}(0)=\varphi_{ik},\ u_{ik}'(0)=\psi_{ik},\ u_{ik}(\beta)=\xi_{ik},\ u_{ik}'(\beta)=\mu_{ik},\end{gathered}\tag{18}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_0=\int_0^1\varphi(x)\,Y_0(x)\,dx,\ \psi_0=\int_0^1\psi(x)\,Y_0(x)\,dx,\\ \xi_0=\int_0^1\xi(x)\,Y_0(x)\,dx,\ \mu_0=\int_0^1\mu(x)\,Y_0(x)\,dx,\\ \varphi_{ik}=\int_0^1\varphi(x)\,Y_{ik}(x)\,dx,\ \psi_{ik}=\int_0^1\psi(x)\,Y_{ik}(x)\,dx,\\ \xi_{ik}=\int_0^1\xi(x)\,Y_{ik}(x)\,dx,\ \mu_{ik}=\int_0^1\mu(x)\,Y_{ik}(x)\,dx.\end{gathered}\tag{19}$$

Поставляя решения (16), (17) в (18), получим систему уравнений для определения неизвестные $a_0,\ b_0,\ c_0,\ a_{ik},\ b_{ik},\ c_{ik}$ и $f_0,\ f_{ik}$:

$$\begin{cases} c_0 = \varphi_0, \\ b_0 = \psi_0, \\ \dfrac{1}{6}f_0\beta^3 + \dfrac{1}{2}a_0\beta^2 + b_0\beta + c_0 = \xi_0, \\ \dfrac{1}{2}f_0\beta^2 + a_0\beta + b_0 = \mu_0, \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} a_{ik} + b_{ik} - \nu_k^{-3}f_{ik} = \varphi_{ik}, \\ 2a_{ik} - b_{ik} + \sqrt{3}c_{ik} = 2\nu_k^{-1}\psi_{ik}, \\ a_{ik}e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta} + b_{ik}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right) + c_{ik}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right) - \nu_k^{-3}e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}f_{ik} = \xi_{ik}e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}, \\ a_{ik}e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta} - b_{ik}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta - \dfrac{\pi}{3}\right) - c_{ik}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta - \dfrac{\pi}{3}\right) = \nu_k^{-1}\mu_{ik}e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}. \end{cases} \tag{21}$$

Определители систем (20)-(21) примут вид:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\beta) &= -\frac{1}{12}\beta^4, \\ \Delta_k(\beta) &= 2e^{\nu_k\beta}\left(\operatorname{ch}(\nu_k\beta) - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)\cdot\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\nu_k\beta\right) - \right. \\ &\left. -\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)\cdot\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\nu_k\beta\right)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Система (20) имеет единственное решение

$$\begin{cases} a_0 = 2\beta^{-1}\left(-3\varphi_0 - 2\beta\psi_0 + 3\xi_0 - \beta\mu_0\right), \\ b_0 = \psi_0,\ c_0 = \varphi_0, \\ f_0 = 6\beta^{-3}\left(2\varphi_0 + \beta\psi_0 - 2\xi_0 + \beta\mu_0\right). \end{cases} \tag{23}$$

Теперь (22) представляем в виде

$$\Delta_k(\beta) = 2e^{\nu_k\beta}\operatorname{ch}(\nu_k\beta)\cdot\left[1 - A_k\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta + \gamma_k\right)\right], \tag{24}$$

где $\gamma_k = \arcsin\frac{\operatorname{ch}(\frac{1}{2}\nu_k\beta)}{\sqrt{2\operatorname{ch}(\nu_k\beta)-1}}$, $A_k = \frac{\sqrt{2\operatorname{ch}(\nu_k\beta)-1}}{\operatorname{ch}(\nu_k\beta)}$.

Лемма 1. *Для любого $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_k(\beta)| \geq C_0 e^{2\nu_k\beta}, \tag{25}$$

где C_0- положительная постоянная.

Доказательство. Учитывая $A_k < 1$ из (24), имеем

$$|\Delta_k(\beta)| \geq e^{\nu_k\beta}\cdot\left(e^{\nu_k\beta}+e^{-\nu_k\beta}\right)\cdot\left[1-A_k\left|\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\gamma_k\right)\right|\right] \geq e^{2\nu_k\beta}\cdot[1-A_k] \geq C_0 e^{2\nu_k\beta}.$$

Лемма доказана.

Тогда система (21) имеет единственное решение

$$a_{ik} = \frac{1}{\sqrt{3}\nu_k\Delta_k(\beta)}\left\{2\nu_k\varphi_{ik}e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)+\right.$$
$$+\psi_{ik}\left[\sqrt{3}+2e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]- \quad (26)$$
$$\left.-2\nu_k\xi_{ik}e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)+\mu_{ik}\left[\sqrt{3}e^{\nu_k\beta}-2e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\frac{\pi}{3}\right)\right]\right\},$$

$$b_{ik} = \frac{e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}}{\sqrt{3}\nu_k\Delta_k(\beta)}\left\{\varphi_{ik}\left[\sqrt{3}\nu_k e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}+2\nu_k\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]-\right.$$
$$-2\psi_{ik}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}e^{\nu_k\beta}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\frac{\pi}{3}\right)\right]-\xi_{ik}\left[\sqrt{3}\nu_k e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}+ \quad (27)$$
$$\left.+2\nu_k\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]-2\mu_{ik}\left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)-\sqrt{3}e^{\nu_k\beta}\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\nu_k\beta\right)\right]\right\},$$

$$c_{ik} = \frac{e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}}{\sqrt{3}\nu_k\Delta_k(\beta)}\left\{\varphi_{ik}\left[\nu_k e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}-2\nu_k\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]+2\psi_{ik}\left[e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}+\right.\right.$$
$$+\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}e^{\nu_k\beta}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\frac{\pi}{3}\right)\Big]+\xi_{ik}\left[-\nu_k e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}+ \quad (28)$$
$$\left.+2\nu_k\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\mu_{ik}\left[e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}+2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta\right)-3e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\right]\Bigg\},$$

$$f_{ik} = \frac{\nu_k^2}{\Delta_k(\beta)}\left\{\nu_k\varphi_{ik}\left[2e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)-1\right]+\right.$$
$$+\psi_{ik}\left[-2e^{\frac{3}{2}\nu_k\beta}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\frac{\pi}{3}\right)+1\right]+\nu_k\xi_{ik}\left[2e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta+\frac{\pi}{3}\right)- \quad (29)$$
$$\left.-e^{2\nu_k\beta}\right]+\mu_{ik}\left[-2e^{\frac{1}{2}\nu_k\beta}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\nu_k\beta-\frac{\pi}{3}\right)+e^{2\nu_k\beta}\right]\Bigg\}.$$

Следовательно, решения уравнений (13), (14), удовлетворяющие условиям (18) примут вид (16), (17), где коэффициенты a_0, b_0, c_0, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} и f_0, f_{ik} определяются из (23), (26)-(29).

Теперь докажем единственность решения задачи (2)-(5). Пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $\xi(x) \equiv 0$, $\mu(x) \equiv 0$ и выполняются условия (25) при всех $k \in N$. Тогда $\varphi_0 \equiv 0$, $\psi_0 \equiv 0$, $\xi_0 \equiv 0$, $\mu_0 \equiv 0$, $\varphi_{ik} \equiv 0$, $\psi_{ik} \equiv 0$, $\xi_{ik} \equiv 0$, $\mu_{ik} \equiv 0$ и из

(16) - (17) следуют, что $u_0(t) \equiv 0$, $u_{ik}(t) \equiv 0$ на $[0, \beta]$ и $f_{ik} \equiv 0$ при всех $k \in N_0$. Следовательно, из равенства (10)-(11) и (15) имеем, что при всех $t \in [0, \beta]$

$$\int_0^1 u(x,t)\, Y_0(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 f(x)\, Y_0(x)\, dx = 0,$$

$$\int_0^1 u(x,t)\, Y_{ik}(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 f(x)\, Y_{ik}(x)\, dx = 0 \quad k \in N.$$

Отсюда в силу полноты (9) в пространстве $L_2[0, 1]$ и непрерывности функции $u(x,t)$ и $f(x)$ соответственно на области $\overline{\Omega}$ и $(0, 1)$, следуют, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$ и $f(x) \equiv 0$ на $(0, 1)$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2)-(5)*, то оно единственно.*

Лемма 2. *При больших натуральных k справедливы следующие оценки:*

$$\begin{aligned}
|u_{ik}(t)| &\le C_1 \left[|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\mu_{ik}|\right], \\
|u'_{ik}(t)| &\le C_2 \left[k^{1\frac{1}{3}} |\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}| + k^{1\frac{1}{3}} |\xi_{ik}| + |\mu_{ik}|\right], \\
\left|u''_{ik}(t)\right| &\le C_3 \left[k^{2\frac{2}{3}} |\varphi_{ik}| + k^{1\frac{1}{3}} |\psi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\xi_{ik}| + k^{1\frac{1}{3}} |\mu_{ik}|\right], \\
\left|u'''_{ik}(t)\right| &\le C_4 \left(k^4 |\varphi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\psi_{ik}| + k^4 |\xi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\mu_{ik}|\right),
\end{aligned} \tag{30}$$

где C_i *здесь и далее суть положительные постоянные.*

Доказательство. Из (26)-(29) с учетом леммы 1 получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|a_{ik}| &\le C_5 e^{-2k\beta} \left(|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\mu_{ik}|\, e^{\frac{2}{3}k\beta}\right), \\
|b_{ik}| &\le C_6 \left(|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\mu_{ik}|\right), \\
|c_{ik}| &\le C_7 \left(|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}} |\mu_{ik}|\right), \\
|f_{ik}| &\le C_8 \left(k^4 |\varphi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\psi_{ik}| + k^4 |\xi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\mu_{ik}|\right).
\end{aligned} \tag{31}$$

Из (17) имеем

$$|u_{ik}(t)| \le |a_{ik}|\, e^{\nu_k t} + |b_{ik}|\, e^{-\frac{1}{2}\nu_k t} + |c_{ik}|\, e^{-\frac{1}{2}\nu_k t} + \nu_k^{-3} |f_{ik}|. \tag{32}$$

Подставляем (31) в (32). Из этого соотношения следует справедливость первой требуемой оценки в лемме 2. Справедливость остальных оценок доказывается аналогично. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(x)$, $\xi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'''(1) = 0$, $\varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(1)$,$\xi(0) = \xi(1)$, $\xi'(0) = 0$, $\xi''(0) = \xi''(1)$, $\xi'''(1) = 0$, $\xi^{IV}(0) = \xi^{IV}(1)$, $\psi(x)$, $\mu(x) \in C^4[0,1]$, $\psi(0) =$

$\psi(1)$, $\psi'(0)=0$, $\psi''(0)=\psi''(1)$, $\psi'''(1)=0$, $\mu(0)=\mu(1)$, $\mu'(0)=0$, $\mu''(0)=\mu''(1)$, $\mu'''(1)=0$. *Тогда справедливы следующие представления*

$$\begin{gathered}
\varphi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\overline{\varphi}_{1k}^{(5)},\ \varphi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-\overline{\varphi}_{2k}^{(5)}-\overline{\varphi}_{3k}^{(5)}\right]-\frac{1}{\lambda_k^5}\overline{\varphi}_{4k}^{(5)},\\
\xi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\overline{\xi}_{1k}^{(5)},\ \xi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-\overline{\xi}_{2k}^{(5)}-\overline{\xi}_{3k}^{(5)}\right]-\frac{1}{\lambda_k^5}\overline{\xi}_{4k}^{(5)},\\
\psi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\psi}_{1k}^{(4)},\ \psi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\overline{\psi}_{2k}^{(4)}-\overline{\psi}_{3k}^{(4)}\right]+\frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\psi}_{4k}^{(4)},\\
\mu_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\mu}_{1k}^{(4)},\ \mu_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\overline{\mu}_{2k}^{(4)}-\overline{\mu}_{3k}^{(4)}\right]+\frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\mu}_{4k}^{(4)},
\end{gathered}\tag{33}$$

где

$$\overline{\varphi}_{2k}^{(5)}=\int_0^1\varphi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\varphi}_{3k}^{(5)}=\int_0^1\varphi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\xi}_{2k}^{(5)}=\int_0^1\xi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\xi}_{3k}^{(5)}=\int_0^1\xi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\psi}_{2k}^{(4)}=\int_0^1\psi^{(4)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\psi}_{3k}^{(4)}=\int_0^1\psi^{(4)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\mu}_{2k}^{(4)}=\int_0^1\mu^{(4)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\mu}_{3k}^{(4)}=\int_0^1\mu^{(4)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\varphi}_{1k}^{(5)}=2\int_0^1\varphi^{(5)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,\ \overline{\varphi}_{4k}^{(5)}=\int_0^1\varphi^{(5)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\xi}_{1k}^{(5)}=2\int_0^1\xi^{(5)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,\ \overline{\xi}_{4k}^{(5)}=\int_0^1\xi^{(5)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\psi}_{1k}^{(4)}=2\int_0^1\psi^{(4)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\psi}_{4k}^{(4)}=\int_0^1\psi^{(4)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\mu}_{1k}^{(4)}=2\int_0^1\mu^{(4)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\mu}_{4k}^{(4)}=\int_0^1\mu^{(4)}(x)\cos(\lambda_k x)dx.$$

В (19) интегрируя первый и третий интегралы по частям пять раза, а второй и четвертый интегралы по частям четыре раза с учетом условий леммы 3, получим представления (33).

Решение задачи (2)-(5) можно искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t)=u_0(t)\,X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}(t)\,X_{1k}(x)+u_{2k}(t)\,X_{2k}(x)\right],\tag{34}$$

$$f(x) = f_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{1k} X_{1k}(x) + f_{2k} X_{2k}(x)], \tag{35}$$

где $u_0(t)$, $u_{ik}(t)$, $X_0(x)$, $X_{ik}(x)$, f_0, f_{ik} соответственно определены по формулам (16)-(17), (7), (23) и (29).

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ *и* $\mu(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 3. Тогда существует единственное решение задачи* (2)-(5), *которое определяется рядами* (34)-(35).

Доказательство. Ряд (34) почленно формально дифференцируем по t три раза и по x четыре раза. В результате имеем:

$$u_{ttt}(x,t) = u'''_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [u'''_{1k}(t) X_{1k}(x) + u'''_{2k}(t) X_{2k}(x)], \tag{36}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 [u_{1k}(t) X_{1k}(x) + u_{2k}(t) X_{2k}(x)]. \tag{37}$$

Мажорирующий ряд этих рядов примет вид

$$C_4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \left(k^4 |\varphi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\psi_{ik}| + k^4 |\xi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}} |\mu_{ik}| \right). \tag{38}$$

На основании (33) доказывается сходимость ряда (38), т.е. ряд

$$\overline{C}_4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{k} \left| \overline{\varphi}^{(5)}_{ik} \right| + \frac{1}{k^{1\frac{1}{3}}} \left| \overline{\psi}^{(4)}_{ik} \right| + \frac{1}{k} \left| \overline{\xi}^{(5)}_{ik} \right| + \frac{1}{k^{1\frac{1}{3}}} \left| \overline{\mu}^{(4)}_{ik} \right| \right)$$

сходится. Из сходимости (38) в силу признака Вейерштрасса равномерно сходятся ряды (34), (36), (37) в области $\overline{\Omega}$ и ряд (35) на $[0, 1]$. Теорема доказана.

Устойчивость решения задачи

Введем следующие нормы:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \max_{\overline{\Omega}} |u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n[0,1]} = \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \left| f^{(k)}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in N.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для решения* (34), (35) *задачи 1 справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,1]} \le C_9 \left[\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\xi\|_{L_2} + \|\mu\|_{L_2} \right], \tag{39}$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,1]} \le C_{10}\left[\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|\xi\|_{W_2^4} + \|\mu\|_{W_2^3}\right], \tag{40}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_{11}\left[\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|\xi\|_{W_2^1} + \|\mu\|_{W_2^0}\right], \tag{41}$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \le C_{12}\left(\|\varphi\|_{W_2^5} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|\xi\|_{W_2^5} + \|\mu\|_{W_2^4}\right). \tag{42}$$

Доказательство. Используя первую оценку (30) из (34), имеем:

$$\begin{gathered}
\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = u_0^2(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}^2(t) + u_{2k}^2(t)\right] \le \\
\le C_1^2\left[(|\varphi_0| + |\psi_0| + |\xi_0| + |\mu_0|)^2 + \right. \\
\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}}|\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}}|\mu_{ik}|\right)^2\right] \le \\
\le 4C_1^2\left[|\varphi_0|^2 + |\psi_0|^2 + |\xi_0|^2 + |\eta_0|^2 + \right. \\
\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}|^2 + k^{-2\frac{2}{3}}|\psi_{ik}|^2 + |\xi_{ik}|^2 + k^{-2\frac{2}{3}}|\mu_{ik}|^2\right)\right] \le \\
\le C_9\left(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|\xi\|_{L_2}^2 + \|\mu\|_{L_2}^2\right).
\end{gathered} \tag{43}$$

Из неравенства (43) следует справедливость оценки (39).

$$\|f(x)\|_{L_2[0,1]}^2 = f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{1k}^2 + f_{2k}^2\right) \le C_8^2\left[(|\varphi_0| + |\psi_0| + |\xi_0| + |\mu_0|)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(k^4|\varphi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}}|\psi_{ik}| + k^4|\xi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}}|\mu_{ik}|\right)^2\right] \le$$

$$\le 4C_8^2\left\{|\varphi_0|^2 + |\psi_0|^2 + |\xi_0|^2 + |\mu_0|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(k^4|\varphi_{ik}|\right)^2 + \left(k^{2\frac{2}{3}}|\psi_{ik}|\right)^2 + \left(k^4|\xi_{ik}|\right)^2 + \left(k^{2\frac{2}{3}}|\mu_{ik}|\right)^2\right]\right\}.$$

Коэффициенты φ_{ik}, ψ_{ik}, ξ_{ik} и μ_{ik} можно представить в виде:

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\varphi}_{1k}^{(4)}, \varphi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-\overline{\varphi}_{2k}^{(4)} + \overline{\varphi}_{3k}^{(4)}\right] + \frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\varphi}_{4k}^{(4)},$$

$$\xi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\xi}_{1k}^{(4)}, \xi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-\overline{\xi}_{2k}^{(4)} + \overline{\xi}_{3k}^{(4)}\right] + \frac{1}{\lambda_k^4}\overline{\xi}_{4k}^{(4)},$$

$$\psi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^3}\overline{\psi}_{1k}^{(3)},\ \psi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^3}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\overline{\psi}_{2k}^{(3)} - \overline{\psi}_{3k}^{(3)}\right] + \frac{1}{\lambda_k^3}\overline{\psi}_{4k}^{(3)},$$

$$\mu_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^3}\overline{\mu}_{1k}^{(3)},\ \mu_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^3}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\overline{\mu}_{2k}^{(3)} - \overline{\mu}_{3k}^{(3)}\right] + \frac{1}{\lambda_k^3}\overline{\mu}_{4k}^{(3)},$$

где

$$\overline{\varphi}_{2k}^{(4)} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\varphi}_{3k}^{(4)} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\xi}_{2k}^{(4)} = \int_0^1 \xi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\xi}_{3k}^{(4)} = \int_0^1 \xi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\psi}_{2k}^{(3)} = \int_0^1 \psi^{(3)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\psi}_{3k}^{(3)} = \int_0^1 \psi^{(3)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\mu}_{2k}^{(3)} = \int_0^1 \mu^{(3)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\mu}_{3k}^{(3)} = \int_0^1 \mu^{(3)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\overline{\varphi}_{1k}^{(4)} = 2\int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\varphi}_{4k}^{(4)} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\xi}_{1k}^{(4)} = 2\int_0^1 \xi^{(4)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\xi}_{4k}^{(4)} = \int_0^1 \xi^{(4)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\psi}_{1k}^{(3)} = 2\int_0^1 \psi^{(3)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\psi}_{4k}^{(3)} = \int_0^1 \psi^{(3)}(x)\cos(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\mu}_{1k}^{(3)} = 2\int_0^1 \mu^{(3)}(x)\sin(\lambda_k x)dx,\ \overline{\mu}_{4k}^{(3)} = \int_0^1 \mu^{(3)}(x)\cos(\lambda_k x)dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|^2_{L_2[0,p]} &\le 4C_8^2\left\{|\varphi_0|^2+|\psi_0|^2+|\xi_0|^2+|\mu_0|^2+\right.\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|\overline{\varphi}_{1k}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\psi}_{1k}^{(3)}\right|^2+\left|\overline{\xi}_{1k}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\mu}_{1k}^{(3)}\right|^2\right]+\\
&\left.+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{4}\left[\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\psi}_{ik}^{(3)}\right|^2+\left|\overline{\xi}_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\mu}_{ik}^{(3)}\right|^2\right]\right\}\le\\
&\le 4\overline{C}_8^2\left\{|\varphi_0|^2+|\psi_0|^2+|\xi_0|^2+|\mu_0|^2+\right.\\
&\left.+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left[\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\psi}_{ik}^{(3)}\right|^2+\left|\overline{\xi}_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\overline{\mu}_{ik}^{(3)}\right|^2\right]\right\}\le\\
&\le 12\overline{C}_8^2\left(\left\|\varphi^{(4)}\right\|^2_{L_2}+\left\|\psi^{(3)}\right\|^2_{L_2}+\left\|\xi^{(4)}\right\|^2_{L_2}+\left\|\mu^{(3)}\right\|^2_{L_2}\right)\le\\
&\le C_{10}^2\left[\|\varphi\|^2_{W_2^4}+\|\psi\|^2_{W_2^3}+\|\xi\|^2_{W_2^4}+\|\mu\|^2_{W_2^3}\right].
\end{aligned}\tag{44}$$

Из (44) следует справедливость оценки (40).

Пусть $(x,\,t)$— произвольная точка из области $\overline{\Omega}$. Из первой оценки (30) имеем

$$|u(x,t)| \le C_1 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}}|\psi_{ik}| + |\xi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}}|\mu_{ik}|\right). \tag{45}$$

Коэффициенты $\varphi_{ik},\ \xi_{ik}$ представляем в виде

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k}\overline{\varphi}_{1k}^{(1)},\ \ \varphi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left(-\overline{\varphi}_{2k}^{(1)} - \overline{\varphi}_{3k}^{(1)}\right) - \frac{1}{\lambda_k}\overline{\varphi}_{4k}^{(1)},$$

$$\xi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k}\overline{\xi}_{1k}^{(1)},\ \ \xi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left(-\overline{\xi}_{2k}^{(1)} - \overline{\xi}_{3k}^{(1)}\right) - \frac{1}{\lambda_k}\overline{\xi}_{4k}^{(1)}$$

где

$$\overline{\varphi}_{1k}^{(1)} = 2\int_0^1 \varphi'(x)\cos(\lambda_k x)dx,\ \ \overline{\xi}_{1k}^{(1)} = 2\int_0^1 \xi'(x)\cos(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\varphi}_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \varphi'(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,\ \overline{\varphi}_{3k}^{(1)} = \int_0^1 \varphi'(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\varphi}_{4k}^{(1)} = \int_0^1 \varphi'(x)\sin(\lambda_k x)dx,$$

$$\overline{\xi}_{2k}^{(1)} = \int_0^1 \xi'(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,\ \overline{\xi}_{3k}^{(1)} = \int_0^1 \xi'(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \overline{\xi}_{4k}^{(1)} = \int_0^1 \xi'(x)\sin(\lambda_k x)dx.$$

Из (45) имеем

$$|u(x,t)| \le C_1 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\left(k^{-1}\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(1)}\right| + k^{-1}\left|\overline{\xi}_{ik}^{(1)}\right|\right) + C_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(k^{-1\frac{1}{3}}|\psi_{ik}| + k^{-1\frac{1}{3}}|\mu_{ik}|\right) \le$$

$$\le C_{12}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\xi}_{ik}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] +$$

$$+C_{12}\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\mu_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le C_{13}\left[\|\varphi'\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\xi'\|_{L_2} + \|\mu\|_{L_2}\right] \le C_{11}\left[\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|\xi\|_{W_2^1} + \|\mu\|_{W_2^0}\right].$$

Из этого следует оценка (41).

На основании последней оценки (31) имеем

$$|f(x)| \le C_8\left\{|\varphi_0| + |\psi_0| + |\xi_0| + |\mu_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(k^4|\varphi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}}|\psi_{ik}| + k^4|\xi_{ik}| + k^{2\frac{2}{3}}|\mu_{ik}|\right)\right\} \le$$

$$\le C_{14}\left\{|\varphi_0| + |\psi_0| + |\xi_0| + |\mu_0| + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{k}\left(\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(5)}\right| + \left|\overline{\psi}_{ik}^{(4)}\right| + \left|\overline{\xi}_{ik}^{(5)}\right| + \left|\overline{\mu}_{ik}^{(4)}\right|\right)\right\} \le$$

$$\le C_{14}\{|\varphi_0| + |\psi_0| + |\xi_0| + |\mu_0| +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{4}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\varphi}_{ik}^{(5)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\psi}_{ik}^{(4)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\xi}_{ik}^{(5)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\overline{\mu}_{ik}^{(4)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg\}\leq$$

$$\leq C_{15}\left(|\varphi_0|+|\psi_0|+|\xi_0|+|\mu_0|+\left\|\varphi^V\right\|_{L_2}+\left\|\psi^{IV}\right\|_{L_2}+\left\|\xi^V\right\|_{L_2}+\left\|\mu^{IV}\right\|_{L_2}\right)\leq$$

$$\leq C_{12}\left(\|\varphi\|_{W_2^5}+\|\psi\|_{W_2^4}+\|\xi\|_{W_2^5}+\|\mu\|_{W_2^4}\right).$$

Из этого неравенства следует (42). Теорема доказана.

Заключение

В данной работе рассмотрена обратная задача для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда. Единственность решения обратной задачи следует из полноты системы собственных и присоединенных функций. Доказана устойчивость решения обратной задачи.

Полученные результаты могут быт использованы для дальнейшего развития различных прямых и обратных задач с нелокальными условиями для уравнения четвертого порядка.

Список литературы

1. Смирнов М. М. Модельное уравнение смешанного типа четвертого порядка, 1972. 123 с.
2. Амиров Ш., Кожанов А. И. Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска // *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 2, С. 171–180 https://doi.org/10.4213/mzm10617.
3. Huntul M. J., Abbas V. An inverse problem of fourth-order partial differential equation with nonlocal integral condition // *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2022. no. 55, pp. 1–27 https://doi.org/10.1186/s13662-022-03727-3.
4. Apakov Yu. P., Meliquzieva D. M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2023. no. 4(112), pp. 30-40 https://doi.org/10.31489/2023m4/30-40.
5. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2013. № 1, С. 1-10.
6. Бекиев А. Б., Шихиев Р. М. Разрешимость краевой задачи для смешанного уравнения четвертого порядка // *Adyghe International Scientific Journal*, 2022. Т. 22, № 2, С. 11-20.
7. Мегралиев Я. Т., Велиева Б. К. Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с нелокальными условиями // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2019. Т. 29, № 2, С. 166–182 https://doi.org/10.20537/vm190203.
8. Юлдашев Т. К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка // *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2016. Т. 1(47), С. 119-128.
9. Отарова Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка // *Узб. мат. ж.*, 2008. № 2, С. 74-80.
10. Assanova A. T. Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics*, 2020. Т. 97, № 1, С. 6-16 https://doi.org/10.31489/2020m1/6-16.
11. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // *Computers and Mathematics with Applications*, 2011. Т. 62, С. 3884-3893.

12. Уринов А. К., Усмонов Д. А Нелокальная начально-граничная задача для вырождающиегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова-Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 42, №1, С. 123-139 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.

13. Kilichov O. Sh., Ubaydullaev A. N. On one boundary value problem for the fourth-order equation in partial derivatives // *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki.*, 2022. Т. 39, №2, С. 32-41 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2022-39-2-32-41.

14. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, 2000. 144 с.

15. Сабитов К. Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе // *Дифференциальные уравнения*, 2021. Т. 57, №3, С. 364-374.

16. Сабитов К. Б. Колебания пластины с граничными условиями «шарнир–заделка» // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2022. Т. 26, №4, С. 650-671 https://doi.org/10.14498/vsgtu1950.

17. Сабитов К. Б. Колебания консольной балки // *Прикладная математика и Физика*, 2021. Т. 53, №1, С. 5-12 https://doi.org/10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12.

18. Дмитриев В. Б. Краевая задача с нелокальным граничным условием для уравнения четвертого порядка // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2016, С. 32-50.

19. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // *Изв. вузов. Матем.*, 2011. №2, С. 71-85.

20. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

21. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.

22. Кожанов А. И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении // *Математические заметки СВФУ*, 2016. Т. 23, №4, С. 31-45.

23. Кожанов А. И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2004. Т. 44, №4, С. 694-716.

24. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики.* М.: Наука, 1984. 264 с.

25. Камынин В. Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // *Матем. заметки*, 2013. Т. 94, №2, С. 207-217 https://doi.org/10.4213/mzm9370.

Информация об авторе

Бекиев Аширмет Бекиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедры «Дифференциальное уравнение» Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, г. Нукус, Узбекистан, ORCID 0000-0001-8630-4360.

References

[1] Smirnov M. M. Model'noe uravnenie smeshannogo tipa chetvertogo porjadka [Model equation of mixed type of the fourth order], 1972. 123 p. (In Russian).

[2] Amirov Sh., Kozhanov A. I. Global'naja razreshimost' nachal'no-kraevyh zadach dlja nekotoryh nelinejnyh analogov uravnenija Bussineska [The final problem for the fourth-order equation with a lower member], Matem. zametki, 2016. vol. 99, no 2, p. 171–180 DOI: 10.14498/vsgtu1523 (In Russian).

[3] Huntul M. J., Abbas V. An inverse problem of fourth-order partial differential equation with nonlocal integral condition, Advances in Continuous and Discrete Models, 2022. no. 55 (2022), pp. 1–27 https://doi.org/10.1186/s13662-022-03727-3

[4] Apakov Yu. P., Meliquzieva D. M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2023. no. 4(112), pp. 30-40 https://doi.org/10.31489/2023m4/30-40

[5] Amanov D., Murzambetova M. B. Kraevaja zadacha dlja uravnenija chetvertogo porjadka s mladshim chlenom [The final problem for the fourth-order equation with a lower member], Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki, 2013. no 1, p. 1-10.(In Russian).

[6] Bekiev A. B., Shihiev R. M. Razreshimost' kraevoj zadachi dlja smeshannogo uravnenija chetvertogo porjadka [Solvability of the boundary value problem for a mixed fourth-order equation], Adyghe International Scientific Journal, 2022. vol. 22, no 2, p. 11-20. (In Russian).

[7] Megraliev Ja. T., Velieva B. K. Obratnaja kraevaja zadacha dlja linearizovannogo uravnenija Benni–Ljuka s nelokal'nymi uslovijami [Inverse boundary value problem for the linearized Benney-Luke equation with nonlocal conditions], Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mehanika. Komp'juternye nauki, 2019. vol. 29, no. 2. (In Russian).

[8] Yuldashev T. K. Ob odnom smeshannom differencial'nom uravnenii chetvertogo porjadka [On one mixed differential equation of the fourth order], Izvestija Instituta matematiki i informatiki UdGU, 2016. vol. 1(47), p. 119-128 mi.mathnet.ru/iimi329 (In Russian).

[9] Otarova Zh. A. Razreshimost' i spektral'nye svojstva samosoprjazhennyh zadach dlja uravnenija chetvertogo porjadka [Solvability and spectral properties of self-adjoint problems for a fourth-order equation], Uzb. mat. zh., 2008. no. 2, p. 74-80. (In Russian).

[10] Assanova A. T. Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. A nonlocal problem for loaded partial differential equations of fourth order, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics, 2020. vol. 97, no 1, p. 6-16 https://doi.org/10.31489/2020m1/6-16.

[11] Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator. Computers and Mathematics with Applications, 2011. vol. 62, p. 3884-3893.

[12] Urinov A. K., Usmonov D. A Nelokal'naja nachal'no-granichnaja zadacha dlja vyrozhdajushhiegosja uravnenija chetvertogo porjadka s drobnoj proizvodnoj Gerasimova-Kaputo [Nonlocal initial-boundary value problem for degenerate fourth-order equations with a Herasimov-Caputo fractional derivative], Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki, 2023. vol. 42, no. 1, p. 123-139 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139

[13] Kilichov O. Sh., Ubaydullaev A. N. On one boundary value problem for the fourth-order equation in partial derivatives, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki., 2022. vol. 39, no. 2, pp. 32-41 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-32-41

[14] Dzhuraev T. D., Sopuev A. K teorii differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh chetvertogo porjadka [On the theory of partial differential equations of the fourth order], 2000. 144 s. (In Russian).

[15] Sabitov K. B. Nachal'no-granichnye zadachi dlja uravnenija kolebanij balki s uchjotom ejo vrashhatel'nogo dvizhenija pri izgibe [Initial-boundary problems for the equation of the beam's oscillations, taking into account its rotational motion during bending], Differencial'nye uravnenija, 2021. vol. 57, no 3, P. 364-374. (In Russian).
[16] Sabitov K. B. Kolebanija plastiny s granichnymi uslovijami «sharnir–zadelka» [Oscillations of the console beam], Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki., 2022. vol. 26, no. 4, p. 650-671 DOI: 10.14498/vsgtu1950 (In Russian).
[17] Sabitov K. B. Kolebanija konsol'noj balki [Cantilever beam oscillations], Prikladnaja matematika i Fizika, 2021. vol. 53, no. 1, P. 5-12 DOI 10.52575/2687-0959-2021-53-1-5-12 (In Russian).
[18] Dmitriev V. B. Kraevaja zadacha s nelokal'nym granichnym usloviem dlja uravnenija chetvertogo porjadka [The boundary value problem with nonlocal boundary conditions for the fourth-order equation], Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaja serija, 2016, P. 32-50. (In Russian).
[19] Sabitov K. B., Martem'janova N. V. Nelokal'naja obratnaja zadacha dlja uravnenija smeshannogo tipa [Nonlocal inverse problem for a mixed type equation], Izv. vuzov. Matem., 2011. no 2, S. 71-85 mi.mathnet.ru/ivm7235. (In Russian).
[20] Denisov A. M. Vvedenie d teoriyu obratnykh zadach [Elements of the Theory of inverse Problems]. Moscow, Izd-vo MGU, 1994. P. 208.(In Russian).
[21] Kabanihin S. I. Obratnye i nekorrektnye zadachi, [Obverse and incorrect problems]. Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, 2009. 457 p. (In Russian).
[22] Kozhanov A. I. Obratnye zadachi vosstanovleniia pravoi chasti spetsialnogo vida v parabolicheskom uravnenii [Inverse problems of recovering the right-hand side of a special type of parabolic equations. Mathematical Notes]. Matematicheskie zametki SVFU, 2016, vol. 23, no 4, pp. 31-45.(In Russian).
[23] Kozhanov A. I. Nelinejnye nagruzhennye uravnenija i obratnye zadachi, [Nonlinear loaded equations and inverse problems]. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz., 2004. vol. 44, no 4, P. 694-716. (In Russian).
[24] Romanov V. G. Obratnye zadachi matematicheskoj fiziki, [Inverse Problems of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 1984. 264 p. (In Russian).
[25] Kamynin V. L. Obratnaja zadacha opredelenija mladshego kojefficienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabljudenija, [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in a parabolic equation under the condition of integral observation], Matem. zametki, 2013. vol. 94, no. 2, P. 207-217 https://doi.org/10.4213/mzm9370 (In Russian).

Information about the author

Bekiev Ashirmet Bekievich ✉ – PhD (Phy. & Math.), Dosent, Department of Differential Equation, Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-8630-4360.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 45 - 56. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-45-56

Research Article

Full text in English

MSC 35R11

Non-Local Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate Second Order Equation with Fractional Caputo Derivative and Riemann-Liouville Integral

D. A. Usmonov, A. N. Omonova*

Fergana State University, 150100, Fergana, Murrabbiylar str., 19, Republic Uzbekistan

Abstract. Recently, initial-boundary problems in a rectangular domain for differential equations in partial derivatives of both even and odd order have been intensively studied. In this case, non-degenerate equations or equations that degenerate on one side of the quadrilateral are taken as the object of study. But initial boundary problems (both local and non-local) for equations with two or three lines of degeneracy remain unexplored. In this paper, in a rectangular domain, a second-order equation degenerating on two sides of the rectangular and contains the with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integro operators has been considered. For this equation, an initial-boundary problem is formulated and investigated, with non-local conditions connecting the values of the desired function and its derivatives up to the third order (inclusive), taken on the sides of the rectangle. From the beginning, the uniqueness of the solution of the formulated problem was proved by the method of energy integrals. Then, the spectral problem that arises when applying the Fourier method based on the separation of variables to the considered initial-boundary problem has been investigated. The Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel, which implies the existence of a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. A theorem is proved for expanding a given function into a uniformly convergent series in terms of a system of eigenfunctions. The solution of the considered is written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is studied. An estimate for solution to problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Key words: initial-boundary problem, Caputo fractional derivative, degenerate differential equation, Mittag-Leffler-type functions of two variables.

Received: 23.06.2025; Revised: 09.09.2025; Accepted: 10.09.2025; First online: 22.09.2025

For citation. Usmonov D. A., Omonova A. N. Non-Local initial-Boundary value problem for a degenerate second order equation with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integral. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 45-56. EDN: IEXHAM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-45-56.

Funding. The study was conducted without the support of foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 45 - 56. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-45-56

Научная статья

Полный текст на английском языке

УДК 517.956.4/.44

Нелокальная начально-краевая задача для вырожденного уравнения второго порядка с дробной производной Капуто и интегралом Римана-Лиувилля

*Д. Ф. Усмонов**, *А. Н. Омонова*

Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана,
ул. Муррабиялар 19, Республика Узбекистан

Аннотация. В последнее время интенсивно изучаются начально-краевые задачи в прямоугольной области для дифференциальных уравнений в частных производных как четного, так и нечетного порядка. При этом в качестве объекта исследования берутся невырожденные уравнения или уравнения, вырождающиеся на одной стороне четырехугольника. Однако начально-краевые задачи (как локальные, так и нелокальные) для уравнений с двумя или тремя линиями вырождения остаются неисследованными. В данной работе в прямоугольной области рассматривается уравнение второго порядка, вырождающееся на двух сторонах прямоугольника и содержащее с дробной производной Капуто и интегрооператоры Римана-Лиувилля. Для этого уравнения формулируется и исследуется начально-краевая задача с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и ее производных до третьего порядка (включительно), взятые на сторонах прямоугольника. С самого начала единственность решения сформулированной задачи доказывалась методом интегралов энергии. Затем исследована спектральная задача, возникающая при применении метода Фурье, основанного на разделении переменных, к рассматриваемой начально-краевой задаче. Построена функция Грина спектральной задачи, с помощью которой она эквивалентно сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, что влечет существование счетного числа собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Доказана теорема о разложении заданной функции в равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций. Решение рассматриваемой задачи записывается в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Исследуется равномерная сходимость этого ряда и ряда, полученного из него почленным дифференцированием. Получена оценка решения задачи, из которой следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: начально-краевая задача, дробная производная Капуто, вырожденное дифференциальное уравнение, функции типа Миттаг-Леффлера двух переменных

Получение: 23.06.2025; Исправление: 09.09.2025; Принятие: 10.09.2025; Публикация онлайн: 22.09.2025

Для цитирования. Usmonov D. A., Omonova A. N. Non-Local initial-Boundary value problem for a degenerate second order equation with fractional Caputo derivative and Riemann-Liouville integral // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 45-56. EDN: IEXHAM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-45-56.

Финансирование. Исследование было проведено без поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: usmonov-doniyor@inbox.ru

Introduction

It is well known that the theory of differential equations has a long and rich history. Until the last quarter of the twentieth century, this theory primarily focused on differential equations of integer order. With the development of fractional (differential and integral) analysis in the late twentieth century, researchers began to study differential equations involving fractional derivatives. At present, numerous scientific articles have been published that address initial, boundary, and spectral problems for differential equations (both ordinary and partial) containing differential operators of fractional order in various forms (see, for example, [1]– [5], and the references therein). The books [6] and [7] have played a significant role in the development of this area.

Recently, there has been growing interest in the study of boundary value problems for second-order mixed-type equations involving fractional-order differential operators (see, for example, [8]– [14]).

In the aforementioned and other related works, only non-degenerate equations have been considered. However, both local and non-local boundary value problems for degenerate partial differential equations involving fractional derivatives of the unknown function remain largely unstudied. The investigation of boundary value problems for such equations is of great importance not only from a theoretical standpoint but also from a practical one, as these equations frequently arise in the mathematical modeling of various problems in gas and hydrodynamics, the theory of small surface bendings, mathematical biology, and other scientific fields.

Problem statement

Consider the following degenerate partial integro-differential equation in the domain $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0t}u(t,x) + aI^{\beta}_{0t}u(t,x) + bu(t,x) = \left[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)\right]_x, \tag{1} $$

where T, α, β, α_1, β_1, a, b are given real numbers, $T > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \beta_1 < 1$ $u(t,x)$ - is an unknown function,

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{0t}u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-z)^{-\alpha}u_z(z,x)\,dz $$

- fractional derivative in the sense of Caputo [15] of the function $u(t,x)$ with respect to the argument t,

$$ I^{\beta}_{0t}u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-z)^{\beta-1}u(z,x)\,dz $$

-fractional integral in the Riemann-Liouville [15] sense of the function $u(t,x)$ with respect to the argument t.

Let us study the following initial-boundary value problem for equation (1).

Problem A_{pq}. Find a function $u(t,x)$ with the following properties:
1) $u(t,x)$, $x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x) \in C\left(\bar{\Omega}\right)$, $[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)]_x$, ${}^{C}D^{\alpha}_{0t}u(t,x) \in C(\Omega)$;
2) in the domain Ω satisfies equation (1);
3) The following boundary conditions hold on $\partial\Omega$:

$$pu(t,0) = qu(t,1),\ q\left[x^{\alpha_1}u_x(t,x)\right]\big|_{x=0} = p\left[(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)\right]\big|_{x=1}, t \in [0,T]; \quad (2)$$

$$u(0,x) = \varphi(x),\ \ x \in [0,1], \quad (3)$$

where $\varphi(x)$ is a given continuous function, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$, p, q are given real numbers, $p^2 + q^2 \neq 0$.

Uniqueness of the solution problem A_{pq}

Before proceeding to prove the uniqueness of the solution to the problem A_{pq}, we present the following auxiliary lemmas.

Lemma 1. *If $V(0,x) = 0$ and $\alpha \in (0,1)$, then the following inequality holds [19]:*

$$I(x) = \int_0^t V(t,x)\,{}^{C}D^{\alpha}_{0t}V(t,x)dt \geq 0.$$

Lemma 2. *If $\beta \in (0,1)$, then the following inequality holds [19]:*

$$I(x) = \int_0^t V(t,x)I^{\beta}_{0t}V(t,x)dt \geq 0.$$

Theorem 1. *If $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \neq q$ then problem A_{pq} cannot have more than one solution.*

Proof. Let us assume that there are two solutions $u_1(t,x)$ and $u_2(t,x)$ of the problem A_{pq}. Their difference will be denoted by $u(t,x)$. Then the function $u(t,x)$ is a solution of equation (1) under homogeneous boundary conditions.

We multiply equation (1) by the function $u(t,x)$ and integrate over the domain Ω:

$$\int_0^1 dx \int_0^T u(t,x)\ {}^{C}D^{\alpha}_{0t}u(t,x)dt + a\int_0^1 dx \int_0^T u(t,x)I^{\beta}_{0t}u(t,x)dt + b\int_0^1 dx \int_0^T u^2(t,x)dt =$$

$$= \int_0^T dt \int_0^1 u(t,x)\left[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)\right]_x dx.$$

Applying the rule of integration by parts to the inner integral of the last term and taking into account conditions (2), we have

$$\int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x^2(t,x)dx =$$

$$-\int_0^1 dx \int_0^T u(t,x)\ {}^{C}D_{0t}^{\alpha} u(t,x)dt - a\int_0^1 dx \int_0^T u(t,x) I_{0t}^{\beta} u(t,x)dt - b\int_0^1 dx \int_0^T u^2(t,x)dt,$$

from which, by virtue of Lemma 1, 2 and $a \geq 0$, $b \geq 0$, the equality follows:

$$\int_0^T dt \int_0^1 x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t,x)dx = 0.$$

Therefore, $x^{\alpha_1} (1-x)^{\beta_1} u_x^2(t,x) = 0$, i.e. $u_x(t,x) = 0$ for $(t,x) \in \Omega$. Then $u(t,x) = \tau(t)$, where $\tau(t)$ - is an arbitrary function. Satisfying this function with the conditions $pu(t,0) = qu(t,0)$, and taking into account $p \neq q$, we obtain $u(t,x) \equiv 0$, $(x,t) \in \Omega$. Since $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, then $u(t,x) \equiv 0$, $(t,x) \in \Omega$. Then, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$, $(t,x) \in \bar{\Omega}$.

The proof of Theorem 1 is complete. □

Study of the spectral problem

With the formal application of the Fourier method to the stated problem A_{pq}, the following spectral problem arises: find those values of the parameter λ for which non-trivial solutions of the equation

$$Mv \equiv -[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1} v'(x)]' = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

exist, satisfying the following conditions:

$$\begin{cases} v(x), \quad x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1} v'(x) \in C[0,1]; \\ pv(0) = qv(1), q\left[x^{\alpha_1} v'(x)\right]\big|_{x=0} = p\left[(1-x)^{\beta_1} v'(x)\right]\Big|_{x=1}. \end{cases} \tag{5}$$

It is easy to show that the spectral problem $\{(4),(5)\}$ has a solution $v(x) \not\equiv 0$ only for $p \neq q$, $\lambda > 0$, and it is equivalent to the following integral equation with symmetric kernel:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s) v(s)\, ds, \tag{6}$$

where the function $G(x,s)$ is defined by formula

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{p}{p-q}\displaystyle\int_0^x \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}} + \frac{q}{p-q}\int_0^s \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}} + \frac{q^2\sigma_1}{(p-q)^2}, & x \leq s; \\ \dfrac{p}{p-q}\displaystyle\int_0^s \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}} + \frac{q}{p-q}\int_0^x \frac{dz}{z^{\alpha_1}(1-z)^{\beta_1}} + \frac{q^2\sigma_1}{(p-q)^2}, & x \geq s, \end{cases}$$

where $\sigma_1 = [\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\beta_1)]/\Gamma(2-\alpha_1-\beta_1)$.

Then, according to the theory of integral equations, the integral equation (6) therefore, the problem (4),(5) has a countable number of eigenvalues $0 < \lambda_1 \leq$

$\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_k, ...$ condensing at infinity, and the corresponding eigenfunctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x), ..., v_k(x), ...$ form orthonormal system in the space $L_2(0,1)$.

The following lemmas can be proven on their own. Therefore, we present them without proof.

Lemma 3. *Let the function* $h(x)$ *satisfy the following conditions:*

$$h(x) \in C[0,1], \tag{7}$$

$$x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}h'(x) \in C[0,1], \tag{8}$$

$$ph(0) = qh(1), \tag{9}$$

$$q\left[x^{\alpha_1}h'(x)\right]|_{x=0} = p\left[(1-x)^{\beta_1}h'(x)\right]\big|_{x=1}, \tag{10}$$

$Mh(x) \in L_2(0,1)$. *Then, on the segment* $[0,1]$ *it can be expanded into an absolutely and uniformly convergent series by the system of eigen functions* $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *of the problem* (4), (5)*:*

$$h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k v_k(x),$$

where $h_k = \int_0^1 h(x)v_k(x)dx$.

Lemma 4. *The following series converge uniformly on the segment* $[0,1]$*:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]^2}{\lambda_k^2}.$$

Lemma 5. *If function* $h(x)$ *the conditions* (7), (9), $x^{\alpha_1/2}(1-x)^{\beta_1/2}h'(x) \in L_2(0,1)$ *hold true, then the inequality*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}[h'(x)]^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x)v_k(x)dx$.

Lemma 6. *If function* $h(x)$ *the conditions* (7)-(10), *and* $Mh(x)$ *function conditions* (7), (9) $x^{\alpha_1/2}(1-x)^{\beta_1/2}[Mh(x)]' \in L_2(0,1)$ *hold true, then the inequality*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \leq \int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}\left\{[Mh(x)]'\right\}^2 dx,$$

is valid, where $h_k = \int_0^1 h(x)v_k(x)dx$.

Uniqueness and stability of a solution to problem A_{pq}

The solution to the problem A_{pq} is formally sought in the form

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\,v_k(x), \tag{11}$$

where $v_k(x)$, $k\in N$ are the eigen functions of the problem (4), (5) and $u_k(t)$, $k\in N$ are the unknown functions to be determined.

Substituting (11) into (1) and (3), with respect to $u_k(t)$, $k\in N$ we obtain the following problem:

$${}^{C}D_{0t}^{\alpha}u_k(t)+aI_{0t}^{\beta}u_k(t)+(\lambda_k+b)\,u_k(t)=0,\quad 0<t<T, \tag{12}$$

$$u_k(0)=\varphi_k, \tag{13}$$

where $\varphi_k=\int\limits_0^1\varphi(x)v_k(x)dx$, $k\in N$.

To solve this problem, we apply the operator I_{0t}^{α} to equation (12) and, using the properties $I_{0t}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0t}^{\alpha}u_k(t)=u_k(t)-u_k(0)$ and $I_{0t}^{\alpha}\,I_{0t}^{\beta}u_k(t)=I_{0t}^{\alpha+\beta}u_k(t)$ and condition (13), we obtain the Volterra integral equation of the second kind:

$$u_k(t)+aI_{0t}^{\alpha+\beta}u_k(t)+(\lambda_k+b)\,I_{0t}^{\alpha}u_k(t)=\varphi_k. \tag{14}$$

To solve equation (14), we apply the method of successive approximations:

$$u_{k,m}(t)=u_{k,0}(t)-aI_{0t}^{\alpha+\beta}u_{k,m}(t)-(\lambda_k+b)\,I_{0t}^{\alpha}u_{k,m}(t),\quad m=1,2,3,...,u_{k,0}(t)=\varphi_k. \tag{15}$$

Using formula $I_{0t}^{\alpha}\,I_{0t}^{\beta}u_k(t)=I_{0t}^{\alpha+\beta}u_k(t)$, we calculate $u_{k,m}(t)$:

$$u_{k,m}(t)=\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-a)^{n-j}(-\lambda_k-b)^jI_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j}u_{k,0}(t), \tag{16}$$

where $\gamma=\alpha+\beta$, $C_n^j=\dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

According to the theory of integral equations [18], if there exists $\lim\limits_{m\to+\infty}u_{k,m}(t)$ uniformly in t, then its limit function is a solution of the integral equation (14).

Passing to the limit at $m\to+\infty$ in (16) and substituting the expression $u_{k,0}(t)$, we obtain a solution to equation (14) in the form

$$u_k(t)=\varphi_k\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-a)^{n-j}(-\lambda_k-b)^jI_{0t}^{\gamma(n-j)+\alpha j}(1), \tag{17}$$

Using the formula $I_{0t}^{\alpha_2}(1)=\dfrac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2+1)}$, we can write (17) in the form

$$u_k(t)=\varphi_k\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}C_n^j(-a)^{n-j}(-\lambda_k-b)^j\frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j)+\alpha j+1)}. \tag{18}$$

We will prove that the series (18) is convergent a little later.

Using the formula [20] $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{k} B_{k,n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} B_{k,n}$, we can write (18) in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{n=j}^{+\infty} C_n^j (-a)^{n-j}(-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma(n-j)+\alpha j}}{\Gamma(\gamma(n-j)+\alpha j+1)}.$$

If we introduce the notation $n = j + m$ here, we can write the last equation in the form

$$u_k(t) = \varphi_k \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} C_{m+j}^j (-a)^m (-\lambda_k - b)^j \frac{t^{\gamma m+\alpha j}}{\Gamma(\gamma m+\alpha j+1)}.$$

This equation can be written using the Mittag-Leffer function of two variables as follows:

$$u_k(t) = \varphi_k E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)t^\alpha\end{matrix}\right), \quad t\in[0,T], \tag{19}$$

where E_2 -Mittag-Leffer function of two variables [21]

$$E_2\left(\begin{matrix}\gamma_1,\alpha_1,\beta_1;\gamma_2,\alpha_2;\\ \delta_1,\alpha_3,\beta_2;\delta_2,\alpha_4;\delta_3,\beta_3;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m+\beta_1 n}(\gamma_2)_{\alpha_2 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_3 m+\beta_2 n)} \frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_4 m)} \frac{y^n}{\Gamma(\delta_3+\beta_3 m)}, \tag{20}$$

$x, y, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in R$,

$$(\gamma_1)_{\alpha_1 m+\beta_1 n} = \frac{\Gamma(\gamma_1+\alpha_1 m+\beta_1 n)}{\Gamma(\gamma_1)}.$$

If $\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2>0$ and $\beta_2+\beta_3-\beta_1>0$, then the series (20) is absolutely and uniformly convergent for arbitrary $\forall(x,y)$ [22].

It is not difficult to show that the following formulas are valid for the function E_2:

$$I_{0t}^\beta\left(E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)t^\alpha\end{matrix}\right)\right) = t^\beta E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1+\beta,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)t^\alpha\end{matrix}\right),$$

$${}^C D_{0t}^\alpha\left(E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right)\right) = -(\lambda_k+b)\,E_{\alpha,1}(-(\lambda_k+b)\,t^\alpha) +$$

$$-at^{\gamma-\alpha}E_2\left(\begin{matrix}2,1,1;1,0;\\ 1+\gamma-\alpha,\gamma,\alpha;2,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right),$$

$$E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right) =$$

$$= E_{\alpha,1}(-(\lambda_k+b)t^\alpha) - at^\gamma E_2\left(\begin{matrix}2,1,1;1,0;\\ \gamma+1,\gamma,\alpha;2,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right),$$

$$E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1+\gamma-\alpha,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right)-E_2\left(\begin{matrix}2,1,1;1,0;\\ 1+\gamma-\alpha,\gamma,\alpha;2,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right)=$$

$$=(\lambda_k+b)\,t^\alpha E_2\left(\begin{matrix}2,1,1;1,0;\\ 1+\gamma,\gamma,\alpha;2,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)\,t^\alpha\end{matrix}\right),$$

where $E_{\alpha_2,\beta_2}(z)$ - Mittag-Leffler function [15]:

$$E_{\alpha_2,\beta_2}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha_2 k+\beta_2)},\ \alpha_2>0.$$

Using these formulas, it can be proven that (19) is a solution to problem (12), (13).

It can be shown directly that (19) can be written in the form

$$u_k(t)=\varphi_k\int_0^1\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\eta}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}e^{1,\,1/2}_{1,\,-\alpha}\left[-at^\gamma(1-\xi)^\gamma\eta\right]e^{1,\,1/2}_{1,\,-\gamma}\left[-(\lambda_k+b)\,t^\alpha\xi^\gamma\eta\right]d\eta\,d\xi,\quad t\in[0,T],\tag{21}$$

where $e^{\mu_3,\delta_3}_{\alpha_3,\beta_3}(z)$ - Wright-type function [5]:

$$e^{\mu_3,\delta_3}_{\alpha_3,\beta_3}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha_3 k+\mu_3)\Gamma(\delta_3-\beta_3 k)},\ \alpha_3>0,\ \alpha_3>\beta_3.\tag{22}$$

If $z<0$, $\mu_3\geq 0$, $\delta_3\geq\beta_3$, the following inequality holds for function (22) [see page 87 in [5]]:

$$e^{\mu_3,\delta_3}_{\alpha_3,\beta_3}(z)<\frac{1}{\Gamma(\mu_3)\Gamma(\delta_3)}\tag{23}$$

If we say $a\geq 0$, $b\geq 0$ and note that $\lambda_k>0$, then using inequality (23), we obtain the following inequality for (21):

$$|u_k(t)|\leq|\varphi_k|,\ t\in[0,T].\tag{24}$$

Substituting (19) into (11), we find a formal solution to the problem A_{pq} :

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_k E_2\left(\begin{matrix}1,1,1;1,0;\\ 1,\gamma,\alpha;1,1;1,1;\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-at^\gamma\\ -(\lambda_k+b)t^\alpha\end{matrix}\right)v_k(x),\quad \gamma=\alpha+\beta.\tag{25}$$

Theorem 2. *If $a\geq 0$, $b\geq 0$, $p\neq q$ and function $\varphi(x)$ satisfy the conditions of Lemma 6, then of the series* (25) *determines the unique solution of the problem A_{pq}.*

Proof. To prove the theorem, it is sufficient to prove that the series (25) and the series corresponding to the functions $x_1^\alpha(1-x)^{\beta_1}u_x(x,t)$ converge uniformly in $\overline{\Omega}$, and the series corresponding to the functions $[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)]_x$, ${}^C\!D^\alpha_{0t}u(t,x)\in C(\Omega)$ converges uniformly on any compact $\Omega_1\subset\Omega$.

Consider the series corresponding to the function $[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)]_x$.

Using inequality (24), then from (25) follows the inequality

$$\left|[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)]_x\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k|\left|[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}v_k'(x)]'\right|.$$

Hence, by virtue of equation (4), on any compact set $\Omega_1 \subset \Omega$, we have

$$\left|[x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}u_x(t,x)]_x\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_k v_k(x)|. \tag{26}$$

Based on the Cauchy-Schwartz inequality, we have

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_k v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right)^{1/2}.$$

Here,by Lemmas 6 and 4, the series on the right-hand side converge uniformly with respect to $x \in [0,1]$. Then the series on the left-hand side converges uniformly with respect to $x \in [0,1]$. Therefore, the series (26) converges absolutely and uniformly on the compact set $\Omega_1 \subset \Omega$. The convergence of the remaining series are proved similarly. Theorem 2 has been proved. □

Theorem 3. *If the conditions of Theorem 2 are met, then the following estimate is true for the solution of problem* A_{pq}*:*

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_1\|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}}, \tag{27}$$

where $C_1 = \sup\limits_{[0,1]}\sqrt{G(x,x)}$, $\|f(x)\|_{L_{2,r}} = \int\limits_0^1 r(x)f^2(x)dx$, $r(x) = x^{\alpha_1}(1-x)^{\beta_1}$.

Proof. By virtue of Lemma 4, Lemma 5 and the inequality $|u_k(t)| \le |\varphi_k|$, the following inequalities hold:

$$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||v_k(x)|\right| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le$$

$$\le \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} \le \left[G(x,x)\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}[\varphi'(x)]^2dx\right]^{1/2} \le C_1\|\varphi'(x)\|_{L_{2,r}(0,1)}.$$

From this, inequality (27) follows. Theorem 3 is proven.□

Conclusion

In this paper, a non-local initial-boundary value problem for a degenerate second-order equation with a fractional Caputo derivative and a Riemann–Liouville integral is considered in a rectangular domain. Using the method of separation of variables, a solution to the problem is obtained in the form of a series that converges absolutely and uniformly in the closure of the domain under consideration. In addition, the uniqueness of the solution and its continuous dependence on the given functions are established.

References

1. Dzhrbashyan M. M., Neressyan A. B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order , Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics, 1968. vol. 3, no. 1, pp. 3–29 (In Russian).
2. Dzhrbashyan M. M. Boundary value problem for a fractional order differential operator of Sturm-Liouville type , Bulletin of the Armenian Academy of Sciences. Mathematics, 1970. vol. 5, no. 2, pp. 71–96 (In Russian).
3. Nakhushev A. M. Sturm-Liouville problem for an ordinary second-order differential equation with fractional derivatives in lower terms , Doklady Akademii Nauk SSSR, 1977. vol. 234, no. 2, pp. 308–311 (In Russian).
4. Aleroev T. S. On the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional order differential operator , Differential Equations, 2000. vol. 36, no. 9, pp. 1278–1279 (In Russian).
5. Pskhu A. V. *Partial differential equations of fractional order*. Moscow: Nauka, 2005 (In Russian).
6. Nakhushev A. M. *Fractional calculus and its applications*. Moscow: Fizmatlit, 2003 (In Russian).
7. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives and some of their applications*. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1987 (In Russian).
8. Karimov E. T., Toshternirov B. H. Tricomi type problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with the hyper-Bessel fractional differential operator , Bulletin of the Institute of Mathematics, 2019. vol. 4, pp. 9–14.
9. Abdullaev O. Kh. On a problem for a degenerate mixed-type equation with Caputo and Erdélyi-Kober fractional operators , Ukrainian Mathematical Journal, 2019. vol. 71, no. 6, pp. 723–738 (In Russian).
10. Masaeva O. Kh. Dirichlet problem for a generalized Lavrent'ev-Bitsadze equation with Gerasimov-Caputo fractional derivative , Applied Mathematics and Physics, 2020. vol. 52, no. 4, pp. 246–254 (In Russian).
11. Islomov B. I., Abdullaev O. Kh. Gellerstedt type problems for a loaded equation of parabolic-hyperbolic type with Caputo and Erdélyi-Kober fractional operators , Russian Universities Reports. Mathematics, 2020. no. 10, pp. 33–46 (In Russian).
12. Islomov B. I., Ubaydullaev U. Sh. Inverse problem for a mixed-type equation with fractional order operator in rectangular domain , Russian Universities Reports. Mathematics, 2021. no. 3, pp. 29–46 (In Russian).
13. Urinov A. K., Karimov E. T., Kerbal S. Boundary value problem with integral conjugation condition for a partial differential equation with Riemann-Liouville fractional derivative related to gas flow in a channel surrounded by porous medium , Results in Science and Technology. Series: Contemporary Mathematics and Its Applications. Topical Reviews, 2022. vol. 210, pp. 66–76 (In Russian).
14. Karimov E. T., Ruzhansky M., Toshternirov B. Y. Solvability of the boundary-value problem for a mixed equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and bi-ordinal Hilfer fractional derivative , Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2022, pp. 1–17.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204. Amsterdam North-Holland Mathematics Studies: Elsevier, 2006.
16. Bateman H., Erdélyi A. *Higher Transcendental Functions. Vol. 1*. Moscow: Nauka, 1965 (In Russian).
17. Naimark M. A. *Linear Differential Operators*. Moscow: Nauka, 1969. 528 pp. (In Russian)
18. Mikhlin S. G. *Lectures on Linear Integral Equations*. Moscow: Fizmatlit, 1959 (In Russian).
19. Urinov A. K., Usmonov D. A. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation with a fractional Gerasimov-Caputo derivative , Bulletin of KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences, 2023. vol. 42, no. 1, pp. 123–139 10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.
20. Kapilevich M. B. The solution of singular Cauchy problems in basis series , Ukrainian Mathematical Journal, 1967.. vol. 3, no. 9, pp. 1560-1577.
21. Garg M., Manohar P., Kalla S. L. A Mittag-Leffler-type function of two variables , Integral Transforms and Special Functions, 2013, pp. [to be added] 10.1080/10652469.2013.789872.
22. Hasanov A., Karimov E. T. *arXiv:2501.03918 [math.CA] https://arxiv.org/pdf/2501.03918*, 2024.

Information about the authors

Usmonov Doniyor Abdumutolib ugli ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior teacher, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID https://orcid.org/0000-0002-3574-075X.

Omonova Adiba Nu'monjon qizi✉ – Researcher, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID http://orcid.org/0009-0007-1059-2862.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 57 - 72. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-57-72

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженного гиперболического уравнения четвертого порядка с импульсными воздействиями

***Ш. Ш. Юсубов*[1], *М. Н. Гусейнова*[*2]**

[1] Бакинский государственный университет, AZ1148, г. Баку, ул. З. Халилова, 23, Азербайджан

[2] Национальная авиационная академия, AZ1045, г. Баку, Мардаканский проспект, 30, Азербайджан

Аннотация. В статье рассматривается задача с нелокальными граничными и интегральными условиями для нагруженного гиперболического уравнения четвертого порядка с импульсными воздействиями. Исследуемое уравнение можно интерпретировать как обобщенное уравнение Буссинеска-Лява, возникающее при моделировании поперечных колебаний коротких толстых стержней, а также при изучении волновых процессов в периодически слоистых средах. Рассматриваемое уравнение в общем случае имеет негладкие коэффициенты, принадлежащие пространству Lp. Решение поставленной задачи ищется в функциональном пространстве соболевского типа. Существенно используется представление элементов этого пространства. Элементы этого функционального пространства допускают разрывы первого рода вдоль линий, параллельных характеристическим кривым. Используя это представление, задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению. Доказано, что для установления гомеоморфизма оператора, соответствующего поставленной задаче, между определенными парами банаховых пространств необходимо и достаточно, чтобы соответствующее интегральное уравнение имело единственное решение. Кроме того, установлены существование и единственность решения поставленной задачи. Далее строится соответствующее сопряженное интегральное уравнение, и с помощью априорной оценки доказывается существование и единственность его решения. Фундаментальное решение поставленной задачи определяется как частный случай сопряженного интегрального уравнения. На основе фундаментального решения получено интегральное представление решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, задачи с импульсными воздействиями, нагруженные уравнения.

Получение: 11.06.2025; Исправление: 13.08.2025; Принятие: 29.08.2025; Публикация онлайн: 17.09.2025

Для цитирования. Юсубов Ш. Ш., Гусейнова М. Н. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для нагруженного гиперболического уравнения четвертого порядка с импульсными воздействиями // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 57-72. EDN: FZBWYU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-57-72.

Финансирование. Работа выполнялась без поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: minayye.huseynova@gmail.com

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 57 - 72. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-57-72

Research Article

Full text in Russian

MSC 35L35,35L25,35S15

On the Correct Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Loaded Fourth-Order Hyperbolic Equations with Impulse Effects

***Sh. Sh. Yusubov*[1], *M. N. Huseynova*[*2]**

[1] Baku State University, AZ1148, Baku, Z. Khalilov, 23, Azerbaijan

[2] National Aviation Academy, AZ1045, Mardakan ave, 30, Azerbaijan

Abstract. This article discusses the problem with nonlocal boundary and integral conditions for a loaded fourth-order hyperbolic equation with impulsive effects. The investigated equation can be interpreted as a generalized Bussinesque-Lev equation, which arises when modeling transverse vibrations of short thick rods, as well as when studying wave processes in periodically layered media. The considered equation generally has nonsmooth coefficients belonging to the Lp space. The solution to the posed problem is sought in a functional space of the Sobolev type. The representation of elements of this space is used significantly. The elements of this functional space allow discontinuities of the first kind along lines parallel to the characteristic curves. Using this representation, the problem is reduced to an equivalent integral equation. It is proven that for establishing a homeomorphism of the operator corresponding to the posed problem between certain pairs of Banach spaces, it is necessary and sufficient for the corresponding integral equation to have a unique solution. Furthermore, the existence and uniqueness of the solution to the posed problem are established. Next, the corresponding conjugate integral equation is constructed, and using an a priori estimate, the existence and uniqueness of its solution are proven. The fundamental solution to the posed problem is defined as a particular case of the conjugate integral equation. Based on the fundamental solution, an integral representation of the solution to the posed problem is obtained.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, problems with impulse effects, loaded equations.

Received: 11.06.2025; Revised: 13.08.2025; Accepted: 29.08.2025; First online: 17.09.2025

For citation. Yusubov Sh. Sh., Huseynova M. N. On the correct solvability of a nonlocal boundary value problem for loaded fourth-order hyperbolic equations with impulse effects. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 57-72. EDN: FZBWYU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-57-72.

Funding. The work was carried out without the support of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

[*]**Correspondence:** E-mail: minayye.huseynova@gmail.com

Введение

Детальное изучение окружающего нас мира позволяет выделить достаточно широкий класс процессов с кратковременными воздействиями, длительностью которых удобно пренебречь, предположив, что эти возмущения имеют «мгновенный» характер. Такая идеализация приводит к необходимости изучения динамических систем с прерывистыми траекториями. Однако следует отметить, что разрыв фазовой траектории не обязательно является следствием идеализации кратковременного воздействия. В некоторых случаях такие разрывы являются неотъемлемой характеристикой изучаемого процесса (например, аэродинамический удар при превышении скорости звука [1], процессы конверсии и т.д.). Системы, решения которых представляют собой разрывные функции, принято называть импульсными системами.

Примеры экономических и технических задач, описываемых динамическими системами, решения которых не являются непрерывными функциями, приведены в монографиях [2–4].

Необходимость изучения дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, решения которых являются кусочно-непрерывными функциями с разрывами в фиксированных точках, возникает в теории краевых задач для интегродифференциальных и квазидифференциальных уравнений в связи с построением сопряжённых краевых задач [5], а также при изучении задачи оптимального управления с граничным управлением, описываемым системой гиперболических уравнений. Следует отметить, что разрыв в граничных управлениях приводит к разрыву в решении краевой задачи.

Известно, что нелокальные задачи тесно связаны с нагруженными уравнениями. Необходимо отметить, что вопросы, связанные как с нелокальными условиями, так и с нагруженными уравнениями, являются неклассическими, поэтому при решении этих задач возникают новые трудности [6–11].

Несмотря на наличие большого количества работ [12–20], общая постановка нелокальных задач для нагруженных дифференциальных уравнений высшего порядка с импульсными воздействиями остается малоизученной [21]. Поэтому вопросы разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнений четвертого порядка с нагруженными и импульсными воздействиями остаются важными для приложений.

В работе исследуется нелокальная задача для дифференциального уравнения четвертого порядка с доминирующей смешанной производной

$$(l_{22}y)(t) \equiv D_1^2 D_2^2 y(t) + \sum_{i_1+i_2<4, i_k=\overline{0,2}; k=\overline{1,2}} a_{i_1 i_2}(t) D_1^{i_1} D_2^{i_2} y(t) + a(t) y(\bar{t}) = \varphi_{22}(t).$$

Частный случай этого уравнения известен в литературе как уравнение Буссинеска-Лява [22], [23]. Следует отметить, что подобные уравнения возникают при изучении поведения продольных колебаний короткого толстого стержня, а также при исследовании движения волн в периодических слоистых средах [24].

Релей [25] показал, что для более точного анализа продольных колебаний в толстом коротком стержне необходимо учитывать поперечные деформации.

В данной работе метод, использованный в [10], развивается для нелокальной краевой задачи для нагруженного гиперболического уравнения четвертого порядка с импульсными воздействиями.

Постановка задачи

Определим множества $G = G_1 \times G_2, G_k = \bigcup_{\nu_k=0}^{1} G_k^{\nu_k}$, $G_k^{\nu_k} = (t_k^{\nu_k}, t_k^{\nu_k+1}), \nu_k = \overline{0,1}$; $k = \overline{1,2}$ и $G^{\nu_1\nu_2} = G_1^{\nu_1} \times G_1^{\nu_2}$ на плоскости. Здесь $t_k^i, k = \overline{1,2}; i = \overline{0,2}$, — произвольно заданные точки, такие что $t_k^0 < t_k^1 < t_k^2; k = \overline{1,2}$.

Рассмотрим нагруженное гиперболическое уравнение четвертого порядка с импульсным воздействием

$$(l_{22}y)(t) \equiv D_1^2 D_2^2 y(t) + \sum_{i_1+i_2<4, i_k=\overline{0,2}; k=\overline{1,2}} a_{i_1 i_2}(t) D_1^{i_1} D_2^{i_2} y(t) + a(t) y(\bar{t}) = \varphi_{22}(t) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} \left(l_j^i y\right)(t_2) = \Delta D_1^j y(t_1^i, t_2) = \varphi_j^i(t_2), t_2 \in G_2, i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}, \\ \left(l_2^i y\right)(t_1) = \int_{t_2^0}^{t_2^2} \Big[\gamma_{i1}(t_2) D_1^2 y(t_1, t_2) + \gamma_{i2}(t_2) D_1^2 D_2 y(t_1, t_2) \\ \qquad + \gamma_{i3} D_1^2 D_2^2 y(t_1, t_2) \Big] dt_2 = \varphi_2^i(t_1), t_1 \in G_1, i = \overline{1,4}. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь y— искомая функция, $D_s^k = \frac{\partial^k}{\partial s^k}$— обобщенная частная производная в смысле Соболева, $\bar{t} \in G$— заданная точка, а функции $a_{i_1 i_2}(t), i_1 + i_2 < 4$, $i_k = \overline{0,2}$, $k = \overline{1,2}$ и $a(t)$ измеримы в множество G и удовлетворяют следующему условию: $a_{i_1 i_2}(t), a(t) \in L_p(G), i_k = \overline{0,1}, k = \overline{1,2}$, $1 < p < \infty$, а также сушествуют функции $a_{2i}^0(t_2) \in L_p(G_2), a_{i2}^0(t_1) \in L_p(G_1), i = \overline{0,1}$ такие что, для почти всех $t \in G$

$$|a_{2i}(t)| \le a_{2i}^0(t_2), |a_{i2}(t)| \le a_{i2}^0(t_1), i = \overline{0,1}.$$

А заданные функции $\varphi_{22}(t) \in L_p(G), \varphi_j^i(t_2), i, j = \overline{0,1}, \varphi_2^i(t_1), i = \overline{1,4}$ удовлетворяют следующему условию:

$$\varphi_{22}(t) \in L_p(G), \varphi_j^i(t_2) \in W_p^{(2)}(G_2), i, j = \overline{0,1}, \varphi_2^i(t_1) \in L_p(G_1), i = \overline{1,4}.$$

Функции $\Delta D_1^{\vartheta_1} y(t_1^i, t_2), \vartheta_1 = \overline{0,1}, i = \overline{0,1}, \Delta D_1^2 D_2^{\vartheta_2} y(t_1, t_2^i), \vartheta_2 = \overline{0,1}, i = \overline{0,1}$, определяются с помощью следов функции $y(t)$ следующим образом:

$$\Delta D_1^{\vartheta_1} y(t_1^i, t_2) = D_1^{\vartheta_1} y(t_1^i+, t_2) - D_1^{\vartheta_1} y(t_1^i-, t_2), \vartheta_1 = \overline{0,1}, i = \overline{0,1},$$

$$\Delta D_1^2 D_2^{\vartheta_2} y(t_1, t_2^i) = D_1^2 D_2^{\vartheta_2} y(t_1, t_2^i+) - D_1^2 D_2^{\vartheta_2} y(t_1, t_2^i-), \vartheta_2 = \overline{0,1}, i = \overline{0,1},$$

$$D_1^{\vartheta_1} y(t_1^0-, t_2) \equiv 0, \quad D_1^2 D_2^{\vartheta_2} y(t_1, t_2^0-) \equiv 0, \quad \vartheta_k = \overline{0,1}, k = \overline{1,2}.$$

Решение задачи (1),(2) будем искать в пространстве $V_p^{(2,2)}(G)$.
Здесь

$$V_p^{(2,2)}(G) = \left\{ y \in L_p(G) \mid D_1^i D_2^j y \in L_p(G^{\vartheta_1\vartheta_2}),\ \vartheta_k = \overline{0,1},\ k = \overline{1,2},\ 0 \le i,j \le 2 \right\}.$$

Норма в пространстве $V_p^{(2,2)}(G)$ определяется следующим образом:

$$\|y\|_{V_p^{(2,2)}(G)} = \sum_{i,j=0}^{2} \|D_1^i D_2^j y\|_{L_p(G)}. \tag{3}$$

Сведение задачи (1), (2) к эквивалентному интегральному уравнению

Известно [21], что разложение функции $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ может быть записано в виде:

$$y(t) = (Qb)(t) = b_{00}^0(t_2) + (t_1 - t_0^1)b_{10}^0(t_2) + \theta(t_1 - t_1^1)\left(b_{00}^1(t_2) + (t_1 - t_1^1)b_{10}^1(t_2)\right) \tag{4}$$

$$+ \int_{t_1^0}^{t_1} (t_1 - \xi_1)\left[b_{20}^0(\xi_1) + (t_2 - t_2^0)b_{21}^0(\xi_1) + \theta(t_2 - t_2^1)\left(b_{20}^1(\xi_1) + (t_2 - t_2^1)b_{21}^1(\xi_1)\right)\right] d\xi_1$$

$$+ \int_{t_1^0}^{t_1}\int_{t_2^0}^{t_2} (t_1 - \xi_1)(t_2 - \xi_2)b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1.$$

Здесь

$$b = \left(b_{22}(t), b_{00}^i(t_2),\ i = \overline{0,1},\ b_{10}^j(t_2),\ j = \overline{0,1},\ b_{20}^i(t_1),\ i = \overline{0,1},\ b_{21}^j(t_1),\ j = \overline{0,1}\right) \in H_p^{(2,2)},$$

$$H_p^{(2,2)} = L_p(G) \times \prod_{i=0}^{1} W_p^{(2)}(G_2) \times \prod_{j=0}^{1} W_p^{(2)}(G_2) \times \prod_{i=1}^{4} L_p(G_1),$$

$\theta(x - \xi)$ является функцией Хевисайда:

$$\theta(x - \xi) = \begin{cases} 1, & x > \xi, \\ 0, & x < \xi. \end{cases}$$

Норма в пространстве $H_p^{(2,2)}$ определяется следующим равенством:

$$\|\varphi\|_{H_p^{(2,2)}} = \|\varphi_{22}\|_{L_p(G)} + \sum_{i=0}^{1} \|\varphi_0^i\|_{W_p^{(2)}(G_2)} + \sum_{j=0}^{1} \|\varphi_1^j\|_{W_p^{(2)}(G_2)} + \sum_{i=1}^{4} \|\varphi_2^i\|_{L_p(G_1)}.$$

Из представления (4) следует, что искомая функция $y \in V_p^{(2,2)}$ имеет следы $y(\bar{t}), D_1^i y(t_1^j \pm, t_2), D_1^2 D_2^i y(t_1, t_2^j \pm), i = \overline{0,1}, j = \overline{0,1}$ и операции взятия этих следов непрерывны из пространства $V_p^{(2,2)}$ в $R, L_p(G_2), L_p(G_1)$ соответственно. Для этих операций верны следующие равенства:

$$\Delta D_1^i y(t_1^j, t_2) = b_{i0}^j(t_2), i = \overline{0,1},\ j = \overline{0,1},$$

$$\Delta D_1^2 D_2^i y(t_1, t_2^j) = b_{2i}^j(t_2), i = \overline{0,1},\ j = \overline{0,1}.$$

Используя представление (4), можно показать, что существуют положительные константы ρ_1 и ρ_2 такие, что для любого $b \in H_p^{(2,2)}$ выполняется оценка

$$\rho_1 \|b\|_{H_p^{(2,2)}} \le \|Qb\|_{V_p^{(2,2)}(G)} \le \rho_2 \|b\|_{H_p^{(2,2)}}.$$

Из этих неравенств следует, что оператор Q осуществляет изоморфизм между пространствами $H_p^{(2,2)}$ и $V_p^{(2,2)}(G)$. Следовательно, пространства $V_p^{(2,2)}(G)$ и $H_p^{(2,2)}$ изоморфны.

Теперь выберем элемент

$$b = \left(b_{22}(t), b_{00}^i(t_2),\ i = \overline{0,1},\ b_{10}^j(t_2),\ j = \overline{0,1},\ b_{20}^i(t_1),\ i = \overline{0,1},\ b_{21}^j(t_1),\ j = \overline{0,1}\right) \in H_p^{(2,2)}$$

таким образом, чтобы соответствующая функция $y(t)$, заданная равенством (4), удовлетворяла граничным условиям (2). Тогда последние четыре условия из (2) можем написать в следующем виде:

$$c_{i1} b_{20}^0(t_1) + c_{i2} b_{20}^1(t_1) + c_{i3} b_{21}^0(t_1) + c_{i4} b_{21}^1(t_1) = \sigma_i(t_1), t_1 \in G_1, i = \overline{1,4}. \tag{5}$$

Здесь

$$c_{i1} = \int_{t_2^0}^{t_2^2} \gamma_{i1}(t_2) dt_2, \qquad c_{i2} = \int_{t_2^0}^{t_2^2} \theta(t_2 - t_2^1)\gamma_{i1}(t_2)\, dt_2,$$

$$c_{i3} = \int_{t_2^0}^{t_2^2} \left((t_2 - t_2^0)\gamma_{i1}(t_2) + \gamma_{i2}(t_2)\right) dt_2,$$

$$c_{i4} = \int_{t_2^0}^{t_2^2} \theta(t_2 - t_2^1)\left[(t_2 - t_2^1)\gamma_{i1}(t_2) + \gamma_{i2}(t_2)\right] dt_2, i = \overline{1,4},$$

$$\sigma_i(t_1) = \varphi_2^i(t_1) - \int_{t_2^0}^{t_2^2} d_i(t_2) b_{22}(t_1, t_2)\, dt_2, i = \overline{1,4},$$

$$d_i(t_2) = \int_{t_2}^{t_2^2} (\xi_2 - t_2)\gamma_{i1}(\xi_2)\, d\xi_2 + \int_{t_2}^{t_2^2} \gamma_{i2}(\xi_2)\, d\xi_2 + \gamma_{i3}(t_2), i = \overline{1,4}.$$

Система (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_{20}^0(t_1), b_{20}^1(t_1), b_{21}^0(t_1), b_{21}^1(t_1)$. Предположим, что матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1}^4$ имеет обратную матрицу $C^{-1} = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^4$. Тогда из системы уравнений (5) имеем

$$\begin{cases} b_{20}^i(t_1) = \sum\limits_{j=1}^4 \mu_{1+i,j}\sigma_j(t_1), t_1 \in G_1, i = \overline{0,1}, \\ b_{21}^i(t_1) = \sum\limits_{j=1}^4 \mu_{3+i,j}\sigma_j(t_1), t_1 \in G_1, i = \overline{0,1}. \end{cases} \tag{6}$$

Теперь учтем первые четыре условия из (2) и равенства (6) в разложении (4). Тогда

$$y(t) = \varphi_0^0(t_2) + (t_1 - t_1^0)\varphi_1^0(t_2) + \theta(t_1 - t_1^1)\left(\varphi_0^1(t_2) + (t_1 - t_1^1)\varphi_1^1(t_2)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{4} m_i(t_2)\int_{t_1^0}^{t_1}(t_1-\xi_1)\sigma_i(\xi_1)\,d\xi_1+\int_{t_1^0}^{t_1}\int_{t_2^0}^{t_2}(t_1-\xi_1)(t_2-\xi_2)b_{22}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1, \quad (7)$$

где

$$m_i(t_2)=\mu_{1i}+(t_2-t_2^0)\mu_{3i}+\theta(t_2-t_2^1)\left(\mu_{2i}+(t_2-t_2^1)\mu_{4i}\right), i=\overline{0,1}.$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 1. *Если* $\det C\neq 0$, *то любая функция* $y\in V_p^{(2,2)}(G)$ *удовлетворяющая условиям* (2) *представима в виде* (7).

После этого мы ищем решение задачи (1), (2) в виде (7), где $b_{22}(t)\in L_p(G)$ неизвестная функция. Теперь выберем функцию $b_{22}(t)$ таким образом, чтобы функция $y(t)$, определяемая равенством (7), была решением данной задачи (1), (2). Для этого учитываем выражение $y(t)$ из (7) в уравнение (1):

$$(Ab_{22})(t)=\Psi(t), t\in G, \quad (8)$$

где $A=I+A_1+A_2$, I— единичный оператор.

$$(A_1b_{22})(t)=\int_{t_2^0}^{t_2}\left[a_{21}(t)+(t_2-\xi_2)a_{20}(t)\right]b_{22}(t_1,\xi_2)\,d\xi_2 \quad (9)$$

$$+\int_{t_1^0}^{t_1}\left[a_{12}(t)+(t_1-\xi_1)a_{02}(t)\right]b_{22}(\xi_1,t_2)\,d\xi_1+\int_{t_1^0}^{t_1}\int_{t_2^0}^{t_2}g(t_1,t_2,\xi_1,\xi_2)b_{22}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1,$$

$$(A_2b_{22})(t)=-\sum_{i=1}^{4}z_{1i}(t)\int_{t_2^0}^{t_2^2}d_i(t_2)b_{22}(t_1,t_2)dt_2-\sum_{i=1}^{4}z_{2i}(t)\int_{t_1^0}^{t_1}\int_{t_2^0}^{t_2^2}d_i(\xi_2) \quad (10)$$

$$\times b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1-\sum_{i=1}^{4}z_{3i}(t)\int_{t_1^0}^{t_1}\int_{t_2^0}^{t_2^2}(t_1-\xi_1)d_i(\xi_2)$$

$$\times b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1-\sum_{i=1}^{4}z_{4i}(t)\int_{t_1^0}^{\overline{t_1}}\int_{t_2^0}^{t_2^2}(\overline{t_1}-\xi_1)d_i(\xi_2)$$

$$\times b_{22}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 d\xi_1-a(t)\int_{t_1^0}^{\overline{t_1}}\int_{t_2^0}^{\overline{t_2}}(\overline{t_1}-\xi_1)(\overline{t_2}-\xi_2)b_{22}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 d\xi_1,$$

$$\Psi(t)=\varphi_{22}(t)-\sum_{i=1}^{4}\left[D_2m_i(t_2)a_{21}(t)+m_i(t_2)a_{20}(t)\right]\varphi_2^i(t_1) \quad (11)$$

$$-\sum_{i=1}^{4}\left[D_2m_i(t_2)a_{11}(t)+m_i(t_2)a_{10}(t)\right]\int_{t_1^0}^{t_1}\varphi_2^i(\xi_1)d\xi_1-\sum_{i=1}^{4}\left[D_2m_i(t_2)a_{01}(t)+m_i(t_2)a_{00}(t)\right]$$

$$\times\int_{t_1^0}^{t_1}(t_1-\xi_1)\varphi_2^i(\xi_1)d\xi_1-\sum_{i=1}^{4}m_i(\overline{t_2})a(t)\int_{t_1^0}^{\overline{t_1}}(\overline{t_1}-\xi_1)\varphi_2^i(\xi_1)d\xi_1,$$

$$g(t_1,t_2,\xi_1,\xi_2)=a_{11}(t)+a_{10}(t)(t_2-\xi_2)+a_{01}(t)(t_1-\xi_1)+a_{00}(t)(t_1-\xi_1)(t_2-\xi_2),$$

$$z_{1i}(t)=D_2m_i(t_2)a_{21}(t)+m_i(t_2)a_{20}(t),$$

$$z_{2i}(t) = D_2 m_i(t_2) a_{11}(t) + m_i(t_2) a_{10}(t),$$
$$z_{3i}(t) = D_2 m_i(t_2) a_{01}(t) + m_i(t_2) a_{00}(t),$$
$$z_{4i}(t) = m_i(\overline{t_2}) a(t).$$

Задачу (1), (2) можно записать в виде операторного уравнения:

$$ly = \varphi,$$

где

$$\varphi = \left(\varphi_{22}(t), \varphi_0^i(t_2),\ i = \overline{0,1}, \varphi_1^j(t_2), j = \overline{0,1},\ \varphi_2^i(t_1), i = \overline{1,4}\right) \in H_p^{(2,2)}.$$

Оператор $l = \left(l_{22}, l_0^i, i = \overline{0,1}, l_1^j, j = \overline{0,1},\ l_2^i, i = \overline{1,4}\right)$ является ограниченным оператором из пространства $V_p^{(2,2)}(G)$ в пространство $H_p^{(2,2)}$.

Лемма 2. *Предположим, что* $\det C \neq 0$. *Для того, чтобы оператор* $l = \left(l_{22}, l_0^i, i = \overline{0,1}, l_1^j, j = \overline{0,1},\ l_2^i, i = \overline{1,4}\right)$ *задачи* (1), (2) *осуществлял гомеоморфизм между пространствами* $V_p^{(2,2)}(G)$ *и* $H_p^{(2,2)}$, *необходимо и достаточно, чтобы интегральное уравнение* (8) *имело единственное решение* $b_{22} \in L_p(G)$ *для любого* $\Psi \in L_p(G)$.

Эта лемма, в частности, показывает, что оператор A в интегральном уравнении (8) имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, определённый на пространстве $L_p(G)$. Тогда для любого $\varphi = \left(\varphi_{22}(t), \varphi_0^i(t_2),\ i = \overline{0,1}, \varphi_1^j(t_2), j = \overline{0,1}, \varphi_2^i(t), i = \overline{1,4}\right)$ $\in H_p^{(2,2)}$ задача (1), (2) имеет единственное решение $y \in V_p^{(2,2)}(G)$и для этого решения выполняется неравенство

$$\|y\|_{V_p^{(2,2)}(G)} \leq M \|\varphi\|_{H_p^{(2,2)}},$$

где $M > 0$ - некоторое постоянное.

Существование и единственность решения задачи (1), (2)

Для доказательства существования единственного решения задачи (1), (2) сначала исследуем разрешимость уравнения (8). Пусть $b_{22}(t) \in L_p(G)$ является решением интегрального уравнения (8). Сначала запишем уравнение (8) в следующем операторном виде:

$$(I + A_1) b_{22} + A_2 b_{22} = \Psi. \tag{12}$$

Оператор A_1 является линейным ограниченным двумерным интегральным оператором Вольтерра, действующим в пространстве $L_p(G)$. Поэтому оператор $(I + A_1)$ имеет обратный $D = (I + A_1)^{-1}$, и он действует в пространстве $L_p(G)$.

Если подействовать на каждую часть уравнения (12) слева оператором $D = (I + A_1)^{-1}$, то получим операторное уравнение

$$b_{22} + (DA_2) b_{22} = D\Psi. \tag{13}$$

Таким образом, задача решения уравнения (12) сводится к решению уравнения (13). На основе неравенств Гёльдера и Минковского для любого $b_{22} \in L_p(G)$ из равенства (10) мы получаем

$$\|A_2 b_{22}\|_{L_p(G)} \le S\|b_{22}\|_{L_p(G)}, \tag{14}$$

где

$$S = \left[\sum_{i=1}^{4} \|d_i\|_{q,G_2} \left(\|z_{1i}^0\|_{p,G_2} + \|t_1^2 - t_1^0\|^{1/q} \|z_{2i}^0\|_{p,G} + \frac{(t_1^2 - t_1^0)^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt[q]{q+1}} \|z_{3i}^0\|_{p,G} \right. \right. \tag{15}$$

$$\left. \left. + \frac{(\overline{t_1} - t_1^0)^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt[q]{q+1}} \|z_{4i}^0\|_{p,G} \right) + \frac{(\overline{t_1} - t_1^0)^{1+\frac{1}{q}} (\overline{t_2} - t_2^0)^{1+\frac{1}{q}}}{\sqrt[q]{(q+1)^2}} \|a(\cdot)\|_{p,G} \right] \|b_{22}\|_{p,G}.$$

Следовательно,

$$\|A_2\|_{L_p(G)} \le S.$$

Таким образом,

$$\|DA_2 b_{22}\|_{L_p(G)} \le S \cdot \|D\| \|b_{22}\|_{L_p(G)}.$$

Если $S_1 = \|D\|S \le 1$, то для любого $b_{22} \in L_p(G)$ существует единственное решение $\Psi \in L_p(G)$ уравнения (13), и это решение удовлетворяет неравенству

$$\|b_{22}\|_{L_p(G)} \le \frac{1}{1 - S_1} \|D\| \|\Psi\|_{L_p(G)}. \tag{16}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\det C \neq 0$ *и* $S_1 < 1$, *то для любого* $\Psi \in L_p(G)$ *существует единственное решения* $b_{22} \in L_p(G)$ *задачи* (8) *и для этого решения справедлива оценка* (16).

На основе леммы 2 и теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\det C \neq 0$ *и* $S_1 < 1$, *то для каждого* $\varphi = \left(\varphi_{22}(t), \varphi_0^i(t_2), i = \overline{0,1}, \varphi_1^i(t_2), i = \overline{0,1}, \varphi_2^i(t_1), i = \overline{1,4}\right) \in H_p^{(2,2)}$ *существует единственное решение* $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ *задачи* (1), (2) *и для этого решения выполняется неравенство*

$$\|y\|_{V_p^{(2,2)}(G)} \le M_1 \|\varphi\|_{H_p^{(2,2)}}, \quad M_1 = \text{const} > 0.$$

Сопряжённый оператор. Интегральное представление решения основной задачи

Теперь построим сопряжённый оператор A^* для оператора A в уравнении (8). Так как оператор A является ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_p(G)$, существует сопряжённый оператор A^*, действующий в

пространстве $L_p^*(G)$. Для того чтобы найти явный вид оператора A^* , рассмотрим функционал

$$F((Ab_{22})(t)) = \iint_G (Ab_{22})(t)f(t)dt = \iint_G [b_{22}(t) + (A_1b_{22})(t) + (A_2b_{22})(t)]\, f(t)dt,$$

где $f \in L_q(G)$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$—произвольно заданная функция.

Учитывая выражения операторов A_1 и A_2 из (9) и (10), в этом равенстве, а затем поменяв порядок интегрирования, мы получаем

$$F((Ab_{22})(t)) = \iint_G b_{22}(t_1,t_2)\,[f(t_1,t_2) + (A_1^*f)(t_1,t_2) + (A_2^*f)(t_1,t_2)]\,dt_2dt_1$$

$$= \iint_G b_{22}(t)(A^*f)(t)dt,$$

где

$$(A_1^*f)(t_1,t_2) = \int_{t_2}^{t_2^2} (a_{21}(t_1,\xi_2) + (\xi_2 - t_2)a_{20}(t_1,\xi_2))\, f(t_1,\xi_2)\, d\xi_2$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1^2} (a_{12}(\xi_1,t_2) + (\xi_1 - t_1)a_{02}(\xi_1,t_2))\, f(\xi_1,t_2)\, d\xi_1$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1^2}\int_{t_2}^{t_2^2} g(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)f(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_2d\xi_1,$$

$$(A_2^*f)(t_1,t_2) = -\sum_{i=1}^{4}\Bigg\{ d_i(t_2)\Bigg(\int_{t_2^0}^{t_2^2} f(t_1,\xi_2)z_{1i}(t_1,\xi_2)\, d\xi_2 + \int_{t_1}^{t_1^2}\int_{t_2^0}^{t_2^2} f(\xi_1,\xi_2)z_{2i}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2d\xi_1$$

$$+ \int_{t_1}^{t_1^2}\int_{t_2^0}^{t_2^2}(\xi_1 - t_1)f(\xi_1,\xi_2)z_{3i}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2d\xi_1 + \theta(\overline{t_1} - t_1)(\overline{t_1} - t_1)\int_{t_1^0}^{t_1^2}\int_{t_2^0}^{t_2^2} f(\xi_1,\xi_2)$$

$$\times z_{4i}(\xi_1,\xi_2)d\xi_2d\xi_1\Bigg)\Bigg\} + \theta(\overline{t_1}-t_1)\theta(\overline{t_2}-t_2)(\overline{t_1}-t_1)(\overline{t_2}-t_2)\int_{t_1^0}^{t_1^2}\int_{t_2^0}^{t_2^2} f(\xi_1,\xi_2)a(\xi_1,\xi_2)d\xi_2d\xi_1.$$

Отсюда следует, что сопряжённый оператор A^* имеет вид

$$A^* = I + A_1^* + A_2^*, \quad A^* : L_q(G) \to L_q(G).$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$f + A^*f + A_2^*f = \Lambda, \tag{17}$$

где $\Lambda \in L_q(G)$, $1 < q < \infty$— заданная функция, а $f \in L_q(G)$— искомая функция. Уравнение (17) называется сопряжённым уравнением к задаче (1), (2).

Поскольку относительно точки (t_1^2, t_2^2) оператор A_1^* является двумерным интегральным оператором Вольтерра, то у оператора $I + A_1^*$ существует ограниченный обратный оператор $D^* = (I + A_1^*)^{-1}$, действующий в $L_q(G)$. Тогда решение уравнения (17) сводится к решению уравнения

$$f + D^*A_2^*f = D^*\Lambda.$$

Используя выражение оператора A_2^*, мы получаем неравенства $\|A_2^* f\|_{L_q(G)} \le S\|f\|_{L_q(G)}$, аналогичное неравенству (14), где S определяется с помощью равенства (15).

Следовательно, $\|A_2^*\| \le S$ и $\|D^* A_2^* f\|_{L_q(G)} \le S\|D^*\|\|f\|_{L_q(G)}$.

Если $S_1 = \|D^*\|S < 1$, то для любого $\Psi \in L_q(G)$ существует единственное решение $f \in L_q(G)$ уравнения (17). Очевидно, что при $S_1 < 1$ решение уравнения (17) удовлетворяет неравенству

$$\|f\|_{L_q(G)} \le \frac{1}{1-S_1}\|D^*\|\|\Lambda\|_{L_q(G)}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда операторы*

$$l : V_p^{(2,2)}(G) \to H_p^{(2,2)} \quad и \quad A^* : L_q(G) \to L_q(G)$$

для задачи (1), (2) *и уравнения* (17) *являются гомеоморфизмами.*

Чтобы получить интегральное представление решения задачи (1), (2), запишем представление функции $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ в виде (7) как

$$y(t) = \eta(t) + y_1(t). \tag{18}$$

Здесь

$$y_1(t) = \iint_G R(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) b_{22}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1,$$

$$R(\xi, t) = R(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) = \theta(t_1 - \xi_1)\theta(t_2 - \xi_2)(t_1 - \xi_1)(t_2 - \xi_2)$$

$$- \sum_{i=1}^{4} m_i(t_2)\theta(t_1 - \xi_1)(t_1 - \xi_1)d_i(\xi_2),$$

$$\eta(t) = \varphi_0^0(t_2) + (t_1 - t_1^0)\varphi_1^0(t_2) + \theta(t_1 - t_1^1)\left(\varphi_0^1(t_2) + (t_1 - t_1^1)\varphi_1^1(t_2)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{4} m_i(t_2) \int_{t_1^0}^{t_1} (t_1 - \xi_1)\varphi_2^i(\xi_1) d\xi_1.$$

Основываясь на равенстве (18), запишем уравнение (1) в форме

$$(l_{22} u)(t) = \Psi(t),$$

где

$$\Psi(t) = \varphi_{22}(t) - (l_{22} y)(t).$$

Для любых функций $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ и $f \in L_q(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p < \infty$ выполняются равенства

$$\iint_G (l_{22} y)(t) f(t) dt = \iint_G (l_{22} y_1)(t) f(t) dt + \iint_G (l_{22}\eta)(t) f(t) dt = \iint_G (A b_{22})(t) f(t) dt \tag{19}$$

$$+ \iint_G (l_{22}\eta)(t) f(t) dt = \iint_G b_{22}(t) \left(A^* f\right)(t) f(t) dt + \iint_G (l_{22}\eta)(t) f(t) dt$$

$$= \iint_G D_1^2 D_2^2 y(t) \cdot (A^* f)(t) dt + \iint_G (l_{22}\eta)(t) f(t) dt.$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$(A^* f)(\xi_1, \xi_2) = R(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2), \quad (\xi_1, \xi_2) \in G \tag{20}$$

для заданной точки $t \in G$. Очевидно, что уравнение (20) является частным случаем уравнения (17). Поэтому по теореме 3, для любой точки $t \in G$ уравнение (20) имеет единственное решение $f(\xi) = f(\xi, t) \in L_q(G)$.

Определение. Если для любой заданной точки $t \in G$ уравнение (20) имеет хотя бы одно решение $f(\xi) = f(\xi, t) \in L_q(G)$, то это решение назовем фундаментальным решением задачи (1), (2).

Теорема 4. *Предположим, что функция* $f(\xi, t)$ *является фундаментальным решением задачи (1), (2). Тогда любое решение этой задачи* $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ *можно представить в виде*

$$y(t) = \eta(t) + \iint_G \varphi_{22}(\xi_1, \xi_2,) f(\xi_1, t) d\xi_2 d\xi_1 - \iint_G f(\xi, t)(l_{22}\eta)(\xi) d\xi_2 d\xi_1. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть функция $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ является решением задачи (1), (2), а $f \in L_q(G)-$ решением сопряжённого уравнения (20). Тогда равенство (19) можно записать в виде

$$\iint_G f(\xi, t)\varphi_{22}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 = \iint_G R(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2) D_1^2 D_2^2 y(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 d\xi_1 \tag{22}$$

$$+ \iint_G f(\xi, t)(l_{22}\eta)(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1,$$

где $t \in G$ рассматривается как параметр. Используя интегральное представление функции $y \in V_p^{(2,2)}(G)$ из (21), равенство (22) запишем в виде

$$\iint_G \varphi_{22}(\xi_1, \xi_2) f(\xi, t) d\xi_2 d\xi_1 = y(t) - \eta(t) + \iint_G f(\xi, t)(l_{22}\eta)(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1.$$

Отсюда получается равенство (21). Теорема доказана.

Заключение

Рассматривается нелокальная краевая задача с импульсными воздействиями для нагруженного гиперболического уравнения четвертого порядка. Поставленная задача сводится к интегральному уравнению и строится соответствующее сопряженное интегральное уравнение. Доказано, что эти интегральные уравнения имеют единственное решение. С помощью сопряженного интегрального уравнения вводится определение фундаментального решения и с его помощью получается интегральное представление решения поставленной задачи.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития различных нелокальных задач с импульсными воздействиями для уравнения высокого порядка.

Список литературы

1. Лоуден Д. Ф. *Оптимальные траектории для космической навигации.* М.: Мир, 1966. 152 с.
2. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* М.: Мир, 1971. 309 с.
3. Pandit S. G., Deo S. G. *Differential systems involving impulses*, vol. 954. Lecture notes: Notes Math, 1982. 102 pp.
4. Lakshmikanthham V., Bainov D. D., Simeonov P. S. *Theory of impulsive differential equation.* Singapure: World Sc, 1989. 434 pp.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Априорная оценка решения задачи, сопряженной к нелокальной краевой задаче первого рода // Differ. Equ., 1988. Т. 24, №5, С. 795-804.
6. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение.* М.: Наука, 2012. 232 с.
7. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений.* А.: Наука, 2010. 336 с.
8. Аттаев А. Х. Об одной нелокальной краевой задаче для модельного нелокального уравнения гиперболического типа // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 40, №3, С. 7–15 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15.
9. Зикиров О. С., Холиков Д. К., Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ, 2016. Т. 23, №2, С. 19–30.
10. Юсубов Ш. Ш. Нелокальная задача с интегральными условиями для трехмерного гиперболического уравнения высокого порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 33, №4, С. 51–62 DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62.
11. Yusubov Sh. Sh. Nonlocal problem with integral conditions for a high-order hyperbolic equation // Ukrains'kyi Matematychnyi Journal, 2017. vol. 19, no. 1, pp. 121–131 DOI: 10.1007/s11253-017-1353-3.
12. Asanova A. T. On the correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive actions // Ukrains'kyi Matematychnyi Journal, 2015. vol. 67, no. 3, pp. 291–303.
13. Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A. On the correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive actions // Commun. Appl. Anal., 1997. vol. 1, no. 4, pp. 1–14.
14. Belarbi A., Benchohra M. Existence theory for perturbed impulsive hyperbolic differential inclusions with variable times // J. Math. Anal.Appl., 2007. vol. 327, pp. 1116–1129.
15. Perestyuk N. A., Tkach A. B. Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense // Ukrains'kyi Matematychnyi Journal, 1997. vol. 49, no. 4, pp. 601–605 DOI: 10.1007/BF02487331.
16. Yusubov Sh. Sh. On correct solvability and representation of solutions to third-order hyperbolic equations with impulsive action // Bulletin of the Baku University, 2000. no. 1, pp. 124–130.
17. Yusubov Sh. Sh. On the Fredholm property and representation of the solution of an impulsive integro-differential equation // Proceedings of IMM AN Azerb, 1996. vol. V, no. XIII, pp. 187–192.
18. Григорьева А. И. Задачи сопряжения для некоторых аналогов уравнения продольных волн с разрывным коэффициентом // Челяб. физ.-матем. журн., 2018. Т. 3, №3, С. 276–294 DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13302.
19. Кожанов А. И., Шадрина Н. Н. Исследование влияния параметров на корректность задачи сопряжения для дифференциального уравнения Буссинеска — Лява // Челябинский физико-математический журнал, 2022. Т. 7, №1, С. 30–42.
20. Yuldashev T. K. On a nonlocal problem for impulsive differential equations with mixed maxima // Vestnik Kraunc. Fiz.-mat. nauki, 2022. vol. 38, no. 1, pp. 40–53 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-40-53.
21. Yusubov Sh. SH., Huseynova M. N. On the Unique Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Fourth-Order Hyperbolic Equation with Impulsive Actions / *2023 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI)* (28-30 August 2023). IEEE DOI: 10.1109/PCI60110.2023.10325919, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2023, pp. 1-4.

22. Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves.* London: John Wiley-Sons, 1974. 660 pp.

23. Rao S. *Advanced theory of biration.* New York: Wiley, 1992. 431 pp.

24. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Э ффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Доклады Академии наук., 2000. Т. 370, № 1, С. 7–10.

25. Pulkina L. S., Beylin A. B. , Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electronic Journal of Differential equations, 2019. no. 29, pp. 1–9.

Информация об авторах

Юсубов Шакир Шыхы – доктор математических наук, профессор, профессор кафедры математические методы теории управления, Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан, ORCID 0000-0001-5330-5519.

Гусейнова Минайя Неймат – докторант кафедры инженерной математики и искусственного интеллекта АзТУ, Национальная авиационная академия, г. Баку, Азербайджан, ORCID 0009-0000-3416-1855.

References

[1] Lowden D. F. Optimal trajectories for space navigation. Moscow, Mir, 1966. 152 p. (In Russian).

[2] Kalanay A., Veksler D., Quality Theory of Impulse systems. Moscow, Mir, 1971, 209 p. (In Russian).

[3] Pandit S. G., Deo S. G. Differential systems involving impulses Lecture Notes. Notes Math, 1982, vol. 954, no.8, 102 p.

[4] Lakshmikantham V., Baionov D. D., Simeonov P. S. Theory of impulsive differential equation. Singapure, World Sc, 1989, 434 p.

[5] Il'in V. A., Moiseev E. I. An a priori estimate for the solution of a problem associated with a nonlocal boundary value problem of the first kind, Differ. Uravn., 1988, Vol 24, no. 5, pp. 795–804.(In Russian).

[6] Nakhushev A. M. Loaded Equations and Their Application. Moscow, Nauka, 2012, 232 p. (In Russian).

[7] Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I. Loaded Equations as Perturbations of Differential Equations. Almaty, Gylym 2010, 336 p. (In Russian).

[8] Attaev A. Kh. On a nonlocal boundary value problem for a model hyperbolic nonlocal equations, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, vol. 42, no. 3, pp. 7–15. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15 (In Russian).

[9] Zikirov O. S., Kholikov D. K., "On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order, Mathematical notes of NEFU, 2016, vol. 23, no. 2, pp. 19–30. (In Russian).

[10] Yusubov Sh. Sh. Non-local problem with integral conditions for the three-dimensional high order hyperbolic equations, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 33, no. 4, pp. 51–62. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62 (In Russian).

[11] Yusubov Sh. Sh. Nonlocal problem with integral conditiond for a high order hyperbolic equation, Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, 2017, vol. 69, no. 1, pp. 121–131. DOI: 10.1007/s11253-017-1353-3

[12] Asanova A. T. On the correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive actions, Ukrains'kyi Matematychnyi Journal, 2015, vol. 67, no. 3, pp. 291–303.

[13] Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A. On the correct solvability of a nonlocal boundary value problem for systems of hyperbolic equations with impulsive actions, Commun. Appl. Anal., 1997, vol. 1, no. 4, pp. 1–14.

[14] Belarbi A., Benchohra M. Existence theory for perturbed impulsive hyperbolic differential inclusions with variable times, J. Math. Anal.Appl., 2007, vol. 327, pp. 1116–1129.

[15] Perestyuk N. A., Tkach A. B. Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense, Ukrains'kyi Matematychnyi Journal, 1997, vol. 49, no. 4, pp. 601–605. DOI: 10.1007/BF02487331

[16] Yusubov Sh. Sh. On correct solvability and representation of solutions to third-order hyperbolic equations with impulsive action, Bulletin of the Baku University, 2000, no. 1, pp. 124–130.

[17] Yusubov Sh. Sh. On the Fredholm property and representation of the solution of an impulsive integro-differential equation, Proceedings of IMM AN Azerb, 1996, vol. V, no. XIII, pp. 187–192.

[18] Grigorieva A. I. Conjugation problems for some analogs of the longitudinal wave equation with a discontinuous coefficient, Chelyabinsk Journal of Physics and Mathematics, 2018, vol. 3, no. 3, pp. 276–294. DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13302 (In Russian).

[19] Kozhanov A. I., Shadrina N. N. Investigation of the influence of parameters on the correctness of the conjugation problem for the Bussinesque-Lyav differential equation, Chelyabinsk Journal of Physics and Mathematics, 2022, vol. 7, no. 1, pp. 30–42. (In Russian).
[20] Yuldashev T. K. On a nonlocal problem for impulsive differential equations with mixed maxima, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, vol. 38, no. 1, pp. 40–53. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-40-53
[21] Yusubov Sh. SH., Huseynova M. N. On the Unique Solvability of a Nonlocal Boundary Value Problem for Fourth-Order Hyperbolic Equation with Impulsive Actions, In: 2023 5th International Conference on Problems of Cybernetics and Informatics (PCI) (28-30 August 2023). IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers., 2023, pp. 1–4 DOI: 10.1109/PCI60110.2023.10325919
[22] Whitham G. B. Linear and Nonlinear Waves. London, John Wiley-Sons, 1974, 660 p.
[23] Rao S. Advanced theory of biration. New York, Wiley, 1992, 431 p. (In Russian).
[24] Bakhvalov N. S., Eglit M. E. Effective equations with dispersion for wave propagation in periodic media, Reports of the Academy of Sciences, 2000, vol. 370, no. 1, pp. 7–10. (In Russian).
[25] Pulkina L. S., Beylin A. B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar, Electronic Journal of Differential equations, 2019, no. 29, pp. 42–54. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-42-54 (In Russian).

Information about the authors

Yusubov Shakir Shikhi – DSc. (Phys. & Math.), Professor, Professor of the Chair of Mathematical Methods of Control Theory, Baku State University, Baku, Azerbaijan, ORCID 0000-0001-5330-5519.

Huseynova Minayya Neymat – PhD student of the Department of Engineering Mathematics and Artificial Intelligence, AzTU, senior teacher, National Aviation Academy, Baku, Azerbaijan, ORCID 0009-0000-3416-1855.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 73 - 84. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-73-84

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 004.942

Теорема существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления

Ж. О. Тахиров**, Т. Т. Абдурахмонов, А. А. Саидов

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 9, Узбекистан

Аннотация. В статье рассматривается вопрос моделирования процесса таможенного оформления товаров внешней торговли. Разработана математическая модель управления рассматриваемым процессом в виде линейного программирования с переменными коэффициентами целевой функции. Обоснована многоэтапность процесса таможенного оформления товаров внешней торговли и необходимость применение функции таможенных рисков в качестве коэффициентов целевой функции задачи линейного программирования. Сформированы этапы процесса таможенного оформления товаров внешней торговли и обозначены таможенные риски, связанные с данными этапами. Проведен анализ таких методов решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами целевой функции, как метод параметрического программирования, метод кусочно-постоянных функций, метод дифференциальных преобразований, метод интервальных условий, метод "параметра малости" и др. Доказана невозможность решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления с помощью вышеприведенными методами. Изложены проблемные вопросы решения аналогичных задач и предложены направления дальнейших исследований. Доказана теорема о существовании решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления. В результате задача оптимального управления процессом таможенного оформления сводится к задаче минимизации таможенных рисков.

Ключевые слова: таможенное оформление, математическое моделирование, линейная оптимизация, целевая функция с переменным коэффициентом, таможенные риски

Получение: 25.05.2025; Исправление: 19.06.2025; Принятие: 28.08.2025; Публикация онлайн: 17.09.2025

Для цитирования. Тахиров Ж. О., Абдурахмонов Т. Т., Саидов А. А. Теорема существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 73-84. EDN: VGLGFD. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-73-84.

Финансирование. Работа выполнялась без поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 73 - 84. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-73-84

Research Article

Full text in Russian

MSC 90C05, 49M37

The Existence Theorem for a Solution to the Problem of Optimal Control of the Customs Clearance Process

J. O. Takhirov**, *T. T. Abdurakhmonov, *A. A. Saidov

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University street, 9, Uzbekistan

Abstract. The article examines the issue of modeling the process of customs clearance of foreign trade goods. A mathematical model for managing the considered process has been developed in the form of linear programming with variable coefficients in the objective function. The multi-stage nature of the customs clearance process for foreign trade goods is justified, as well as the necessity of using the customs risk function as coefficients in the objective function of the linear programming problem. The stages of the customs clearance process for foreign trade goods have been formed, and the customs risks associated with these stages have been identified. An analysis has been conducted of methods for solving the linear programming problem with variable coefficients in the objective function, such as the parametric programming method, the piecewise constant functions method, the differential transform method, the interval conditions method, the "small parameter"method, and others. It has been proven that it is impossible to solve the optimal control problem of the customs clearance process using the aforementioned methods. Problematic issues in solving similar problems are discussed, and directions for further research are proposed. A theorem on the existence of a solution to the optimal control problem of the customs clearance process has been proven. As a result, the optimal control problem of the customs clearance process is reduced to the problem of minimizing customs risks.

Key words: customs clearance, mathematical modeling, linear optimization, objective function with variable coefficient, customs risks.

Received: 25.05.2025; Revised: 19.06.2025; Accepted: 28.08.2025; First online: 17.09.2025

For citation. Takhirov J. O., Abdurakhmonov T. T., Saidov A. A. The existence theorem for a solution to the problem of optimal control of the customs clearance process. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 73-84. EDN: VGLGFD. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-73-84.

Funding. The work was carried out without the support of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: prof.takhirov@yahoo.com

Введение

Темпы глобализации первой четверти XXI века подтверждают роль международной торговли в качестве основного драйвера социально-экономического развития стран. С наступлением 2025 г. начинается завершение первой четверти XXI столетия. Анализ динамики международной торговли в период с 2016 по 2025 год показывает, что за рассматриваемое десятилетие объем внешней торговли увеличился в соответствии с валовым внутренним продуктом мировой экономики, который увеличился с 76,6 трлн долларов США до 115,5 трлн долларов США, или в 1,5 раза [1].

Вместе с тем, в цепочке международных поставок немаловажную роль играют таможенные службы стран-участников международной торговли. Сегодня развитие деятельности таможенной службы каждой страны возможно только на основе использования результатов современных наук, таких как управления рисками, искусственный интеллект, блок-чейн технологий и другие.

Управление таможенными рисками представляет собой основополагающий принцип современных технологий таможенного контроля, оно позволяет оптимизировать использование ресурсов таможенных органов. На сегодняшний день накоплен богатый опыт, сформирована прочная нормативно-правовая база по применению системы управления таможенными рисками в развитых странах и приняты документы международного уровня [2].

Несмотря на то, что система управления рисками таможенных органов создает благоприятные условия для законопослушного участника внешнеэкономической деятельности, она довольно жёстко реагирует по отношению товарам, которые попали на так называемый «красный коридор». Последствие подобных явлений для владельцев данных товаров иногда может быть нежелательным и долгосрочным.

Для обеспечения защиты бизнеса от не адекватных решений и правомерного функционирования системы управления таможенными рисками требуется построить ее на фундаменте строгого математического обеспечения.

Математическая модель задачи оптимального управления процессом таможенного оформления

Цель любого вида управления – это изменение состояние объекта управления в соответствии с предварительно определенным заданием. Методы управления должна ответить на вопрос: «как построить алгоритм, который может управлять данным объектом так, чтобы достичь заранее определенной цели?». Для этого разработчику необходимо знать, как объект управления будет реагировать на разные воздействия, то есть нужна модель объекта управления.

Одним из наиболее распространенных и широко используемых в научно-исследовательской практике методов исследования сложных систем, к которым относится и система таможенного контроля, является метод моделирования

[3]. В свою очередь, использование моделей параметрического линейного программирования дают ожидаемые результаты при оценке эффективности деятельности предприятия [4].

В этой исследовательской работе, при формировании математической модели оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления по отношению к расходуемому времени, предлагается использовать этапы таможенного оформления, приведенные в таблице.

Таблица

Этапы процесса многоэтапного таможенного оформления
Stages of the multi-stage customs clearance process

Расчетное время исполнения этапа	**Наименование функционала этапа**	**Исполнитель этапа**
t_1	подготовка необходимых первичных документов для таможенного оформления	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_2	определение кода товаров по Товарной номенклатуре (ТН ВЭД)	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_3	расчет таможенной стоимости товаров	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_4	начисление сумм таможенных платежей	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_5	подготовка грузовой таможенной декларации	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_6	обеспечение таможенных платежей	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_7	представить в таможенные органы предварительную декларацию до прибытия груза	Участник внешней торговли или таможенный брокер
t_8	доставка груза под таможенным контролем	Перевозчик
t_9	Хранение, связанное с прохождением таможенного досмотра	Таможенный склад совместно с участником внешней торговли и таможенной службой

Расчетное время исполнения этапа	**Наименование функционала этапа**	**Исполнитель этапа**
t_{10}	задержка товара из-за невозможности выпуска по техническим или другим причинам	Таможенный склад совместно с участником внешней торговли и таможенной службой
t_{11}	хранение по инициативе владельца товаров	Таможенный склад совместно с участником внешней торговли и таможенной службой
t_{12}	запрашивать дополнительные документы, когда необходимо	Таможенная служба
t_{13}	направлять груз на соответствующей (красный, жёлтый или зелёный) дорожке таможенного контроля на основе анализа представленных документов и профилей риска	Таможенная служба
t_{14}	осуществление процедур либо по принципам красного коридора	Таможенная служба
t_{15}	осуществление процедур либо по принципам жёлтого коридора	Таможенная служба
t_{16}	осуществление процедур либо по принципам зелёного коридора	Таможенная служба
t_{17}	контроль полноты поступления таможенных платежей	Таможенная служба
t_{18}	выпуск груза в свободное обращение или на экспорт в установленном порядке	Таможенная служба

Представленный перечень функций сгруппирован в четыре основные блоки. Исполнителями этих функций выступают таможенные органы, участники внешней торговли и предприятия, предоставляющие услуги в таможенной сфере. Процесс таможенного оформления характеризуется большим количеством выполняемых операций, сложность которых определяется совокупностью таких факторов, как код товара, страна происхождения, заявляемая таможенная стоимость и другие [5].

Из вышеприведённой таблицы следует, что процесс многоэтапного таможенного оформления охватывает 18 этапов, из которых 1-7 этапы исполняются участником внешней торговли или таможенным брокером, 8-й этап - грузоперевозчиком, 9-11 - этапы исполняются владельцами таможенных складов, а за исполнения 12-18 – этапов ответственны сотрудники таможенной службой.

Если ввести следующие обозначения:

$r_k = r_k(D)$ — уровень риска k — этапа процесса таможенного оформления товаров внешней торговли, где, $D = D(d_1, d_2, ..., d_{58})$ — вектор, d_i элементы которого определяются в зависимости от значения элементов грузовой таможенной декларации, т.е. понятие грузовой таможенной декларации определяется как множество, имеющие 58 элементов;

t_0 — расчетное время проведения анализа рисков $r_k(D)$;

t_k — расчетное время исполнения k — этапа процесса таможенного оформления, то задачу оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления по отношению к расходуемому времени можно сформулировать следующим образом:

$$f(t) = t_0 + \sum_{k=1}^{18} r_k t_k \to \min \tag{1}$$

При этом расчётное время продолжительности процесса таможенного оформления для ответственных исполнителей определяется нормативно - директивными документами, в частности, документами, утверждаемыми Кабинетом Министров Республики Узбекистан. Если обозначить их как b_1, b_2, b_3 и b_4 соответственно, то получим следующие граничные условия:

$$\begin{cases} 0 < \sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_k \le b_1; & a_{jk} = 1, \text{ если } j = \overline{1, m_1}; a_{jk} = 0, \text{ если нет} \\ 0 < \sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_k \le b_2; & a_{jk} = 1, \text{ если } j = \overline{m_1 + 1, m_2}; a_{jk} = 0, \text{ если нет} \\ 0 < \sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_k \le b_3; & a_{jk} = 1, \text{ если } j = \overline{m_2 + 1, m_3}; a_{jk} = 0, \text{ если нет} \\ 0 < \sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_k \le b_4; & a_{jk} = 1, \text{ если } j = \overline{m_3 + 1, m_4}; a_{jk} = 0, \text{ если нет} \\ 0 < t_0 < +\infty, & t_k \ge 0, \quad k = \overline{1, n} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь: $n = 18; m_i = 7; m_2 = 8; m_3 = 11; m_4 = 18; 0 < b_i < +\infty, i = 1, 2, 3, 4.$

Приведенные выше формулы (1) и (2) дают математическую модель задачи оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления.

Теорема существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления

Полученные выше результаты (1)-(2) показывают, что математическая модель задачи оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления имеет вид задачи линейного программирования с переменными коэффициентами целевой функции.

Прежде чем приступить к решению данной задачи можно доказать следующую теорему существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления.

Теорема 1. *Задача* (1)-(2) *с непустым множеством планов* $f(t) = t_0$ *и ограниченной снизу целевой функцией, с условиями* $0 \le r_k(D) \le 1$, $k = \overline{1, 18}$, *имеет решение.*

Доказательство данной теоремы опирается на результаты исследований других авторов в данном направлении. Анализ научных работ по исследованию аналогичных задач показали, что проведено достаточное количество исследований [6–11] и разработаны определенные методы решения задачи данного типа.

Например, работа [6] является одним из относительно ранних исследований в этой области. В ней рассмотрена задача параметрического программирования следующего вида:

$$\begin{cases} f(X) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad X = \{x_j\}, \quad c_j \in \Lambda \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{3}$$

Здесь c_j — элементы некоторого упорядоченного функционального пространства Λ, a_{ij}, b_i — известные, а x_j — неизвестные вещественные числа, X — план задачи (неотрицательное решение задачи (3)). План X^* оптимальный, если для всякого плана X выполняется неравенство $f(X) \leq f(X^*)$. Заметим, что значения целевой функции (3) принадлежат пространству Λ, в котором, как известно, выполняются обычные свойства числовых неравенств.

В работе доказана существования решения задачи (3) путем введения понятие разрешающие комбинации задачи (3), рассматриваемые как элементы пространства Λ, сравнимы с нулём этого пространства, т. е. если $x \in R$, то имеет место одно и только одно из трех соотношений: $x > 0$, $x < 0$ и $x = 0$. При таких условиях доказана следующая теорема:

Теорема. *(Теорема Пинскера) Задача* (3) *с непустым множеством планов и ограниченной сверху целевой функцией, удовлетворяющая условию: все разрешающие комбинации коэффициентов целевой функции сравнимы с нулем, имеет решение.*

Опираясь на результаты данной теоремы можно доказать теорему существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления. Для этого необходимо провести анализ условия теоремы Пинскера применительно к рассматриваемой задаче (1)-(2).

а) во-первых: рассматриваемая задача должна иметь непустое множество планов, т.е. должно существовать хотя бы одно решение системы (2).

Известно, что при постоянных значениях коэффициентов (r_k) целевой функции (1) с граничными условиями (2) применяется на практике ряд способов определения ее минимального значения. К ним можно отнести такие, как симплекс-метод, развертывание функции на алгебраические многочлены, ряды Фурье, применение сплайн-функций и другие.

Однако, особенностями задачи оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления, которая описана в (1)-(2) являются переменные коэффициенты целевой функции. Функции $r_k = r_k(D)$, которые представляют собой степень риска k - этапа, является функцией переменных

грузовой таможенной декларации, т.е. данная функция может быть суперпозицией других многопеременных функций и она не зависит от переменной t_k $(k = 1, 2, \ldots, 18)$. Это требует особого подхода для решения данной задачи и порождает задачу исследования сущности таможенных рисков.

Проведенные исследования привели к тому, что таможенные риски с математической точки зрения являются функцией многих аргументов, не представляются в явной форме, имеются не малые неопределённости её характеристиках в части гладкости, непрерывности, дифференцируемости и других качеств.

Существует множество подходов к определению понятия «таможенного риска». Например, рабочая группа Всемирной таможенной организации, подготавливая документ «Компендиум Всемирной таможенной организации по управлению таможенными рисками» в 2011 году дала следующее определение: «Риск: результат сомнений, возникающих в отношении объектов» [12]. В научной литературе его определяют следующим образом: «Риск – вероятность нарушения таможенного законодательства, связанное с уклонением от уплаты причитающихся таможенных пошлин и налогов» [13].

В этих или других определениях таможенного риска, которые наблюдаются в опубликованных ране научных работах, «вероятность нарушения таможенного законодательства» проходит в качестве основного предиката. Это означает, что в математическом выражении таможенного риска обязательном порядке должна присутствовать модель «вероятность нарушения таможенного законодательства».

Исходя из сказанного, можно сделать вывод о том, что для функции таможенного риска $r_k = r_k(D)$ выполняются следующие условия [14]:

$$0 \leq r_k(D) \leq 1, \quad k = \overline{1, 18}. \tag{4}$$

Тогда в качестве первого плана задачи (неотрицательное решение системы (2)) можно принимать решение задачи линейного программирования при $r_k(D) = 0$ и целевая функция имеет следующее неотрицательное значение:

$$f(t) = t_0. \tag{5}$$

б) во-вторых, теорема Пинскера требует ограниченность сверху целевой функцией для задачи (3). Так, как задача (3) является задачей максимизации, а рассматриваемая нами задача оптимального управления процессом многоэтапного таможенного оформления (1)-(2) является задачей минимизации, нам необходимо доказать ограниченность снизу целевой функцией для задачи (1)-(2).

Для этого мы будем анализировать структуру целевой функции (1):

$$f(t) = t_0 + \sum_{k=1}^{18} r_k t_k.$$

Учитывая (4) с условиями ограничений (2) можно оценить суммарную часть данной функции следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{18} r_k t_k \geq 0.$$

Тогда получим:

$$f(t) = t_0 + \sum_{k=1}^{18} r_k t_k \geq t_0 = \varphi(t_0).$$

Функция $\varphi(t_0)$ непрерывна в ограниченной области $0 < \varepsilon \leq t_0 \leq M < +\infty$. Здесь ε-бесконечно малое число, но больше нуля. В силу знаменитой теоремы Вейерштрасса [15] функция $\varphi(t_0)$ ограничена в данной области и притом она достигает своих минимального и максимального значений.

в) в-третьих, в силу того, что для всех коэффициентов целевой функции установлены условия (4), все разрешающие комбинации коэффициентов целевой функции сравнимы с нулем.

Таким образом, в силу теоремы Пинскера, доказана вышеприведенная теорема.

Заключение

Несмотря на то, что доказана теорема существования решения задачи оптимального управления процессом таможенного оформления, результаты данной работы не позволяют найти данного решения.

Вместе с этим, исследоввание первого этапа задачи (неотрицательное решение системы (2)) в виде (5), доказанная теорема позволяет определить новое направление дальнейших исследований рассматриваемой задачи в виде минимизации значения функции $r_k(D)$. В данном случае задача приобретает иной характер: решение задачи оптимального управления процессом таможенного оформления сводится к минимизации таможенного риска.

Список литературы

1. Гладков И. С. Мирохозяйственная динамика и международная торговля: новейшие тренды // Власть, 2025. № 1, С. 168–171.
2. Framework of Standards for the Safety and Facilitation of World Trade *WCO*, URL: `http://www.wcoomd.org`, 2018 (access date: 06.08.2023).
3. Липатова Н. Г. Применение математических методов при решении задач повышения эффективности таможенного контроля // Вестник Российской таможенной академии, 2017. № 1, С. 116–122.
4. Холодкова В. В. Оценка эффективности деятельности предприятия с использованием моделей параметрического линейного программирования // Вестник Воронежского государственного университета. Экономика и управление, 2016. № 1, С. 153–157.
5. Федоренко Р. В. *Методология управления комплексами услуг в таможенной сфере*, URL: `https://www.sseu.ru/wp-content/uploads/2015/06/Dissertatsiya-Fedorenko-R.V.pdf`. Самара, 2015.
6. Пинскер А. Г. Задача линейного программирования с переменными коэффициентами целевой функции // Сибирский математический журнал, 1979. Т. 20, № 3, С. 667–670.
7. Гаврилова М. О. О задачах линейного программирования с кусочно-постоянными коэффициентами // Вестник Пермского государственного технического университета. Химическая технология и биотехнология, 2010. № 9, С. 172–179.
8. Аветисян А. Г., Гюльзадян Л. С. Метод решения задач параметрического линейного программирования, основанный на дифференциальных преобразованиях // Известия Томского политехнического университета, 2014. Т. 324, № 2, С. 25–30.
9. Салимоненко Д. А. Способ решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами в виде параметрических функций // Вестник Башкирского университета, 2015. Т. 20, № 1, С. 25–29.

10. Салимоненко Д. А., Зиганшин А. М., Мудров В. А., Салимоненко Ю. Д. О взаимозависимых переменных коэффициентах в задачах линейного программирования // Математические структуры и моделирование, 2021. № 2 (58), С. 96–111 DOI: 10.24147/2222-8772.2021.2.96-111.

11. Кравчук С. П., Кравчук И. С., Татарников О. В., Швед Е. В. Метод возмущений для решения задач линейного программирования с параметром // Фундаментальные исследования, 2015. № 5, С. 299–303.

12. WCO Customs Risk Management Compendium, URL: http://www.wcoomd.org. Brussels, Belgium, June 2011.

13. Тамразян С. Э. Таможенные Риски: Сущность, Управление И Оценка // Экономика и управление в XXI веке: тенденции развития, 2015. № 23, С. 168–172.

14. Севастьянов Б. А. *Курс теории вероятностей и математической статистики*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2019.

15. Широкова Е. А. *Математический анализ*. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013.

Информация об авторах

Тахиров Жозил Останович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математического моделирования нелинейных систем, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0002-0023-5673.

Абдурахмонов Тохир Тохтасинович✉ – аспирант, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбукистан, ORCID 0000-0002-4611-3831.

Саидов Абдусобир Абдурахмонович✉ – доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории математического моделирования нелинейных систем, Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0003-3596-7468.

References

[1] Gladkov I. S. Mirokhozyaystvennaya dinamika i mezhdunarodnaya torgovlya: noveyshiye trendy [World economic dynamics and international trade: latest trends], Vlast', 2025, no. 1, pp. 168–171.(In Russian).

[2] Framework of Standards for the Safety and Facilitation of World Trade, WCO, 2018. http://www.wcoomd.org (accessed: 06.08.2023).

[3] Lipatova N. G. Primeneniye matematicheskikh metodov pri reshenii zadach povysheniya effektivnosti tamozhennogo kontrolya [Application of mathematical methods for solving customs control efficiency improvement problems], Vestnik Rossiyskoy tamozhennoy akademii, 2017, no. 1, pp. 116–122.(In Russian).

[4] Kholodkova V. V. Otsenka effektivnosti deyatel'nosti predpriyatiya s ispol'zovaniyem modeley parametricheskogo lineynogo programmirovaniya [Enterprise performance evaluation using parametric linear programming models], Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: ekonomika i upravleniye, 2016, no. 1, pp. 153–157.(In Russian).

[5] Fedorenko R. V. Metodologiya upravleniya kompleksami uslug v tamozhennoy sfere [Methodology of service complex management in customs sphere], Diss. ... Doct. Econ. Sci., Samara, 2015. https://www.sseu.ru/wp-content/uploads/2015/06/Dissertatsiya-Fedorenko-R.V..pdf(In Russian).

[6] Pinsker A. G. A linear programming problem with variable coefficients in the objective function, Siberian Math. J., 1979, vol. 20, no. 3, pp. 466–468.

[7] Gavrilova M. O. O zadachakh lineynogo programmirovaniya s kusochno-postoyannymi koeffitsientami [On linear programming problems with piecewise constant coefficients], Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Khimicheskaya tekhnologiya i biotekhnologiya, 2010, no. 9, pp. 172–179.(In Russian).

[8] Avetisyan A. G., Gyulzadyan L. S. Metod resheniya zadach parametricheskogo lineynogo programmirovaniya, osnovannyy na differentsial'nykh preobrazovaniyakh [A method for solving parametric linear programming problems based on differential transformations], Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2014, vol. 324, no. 2, pp. 25–30.(In Russian).

[9] Salimonenko D. A. Sposob resheniya zadachi lineynogo programmirovaniya s peremennymi koeffitsientami v vide parametricheskikh funktsiy [A method for solving linear programming problems with variable coefficients as parametric functions], Vestnik Bashkirskogo universiteta, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 25–29.(In Russian).

[10] Salimonenko D. A., Ziganshin A. M., Mudrov V. A., Salimonenko Yu. D. O vzaimozavisimykh peremennykh koeffitsientakh v zadachakh lineynogo programmirovaniya [On interdependent variable coefficients in linear programming problems], Matematicheskiye struktury i modelirovaniye, 2021, no. 2(58), pp. 96–111. DOI: 10.24147/2222-8772.2021.2.96-111(In Russian).

[11] Kravchuk S. P., Kravchuk I. S., Tatarnikov O. V., Shved E. V. Metod vozmushcheniy dlya resheniya zadach lineynogo programmirovaniya s parametrom [Perturbation method for solving linear programming problems with a parameter], Fundamental'nyye issledovaniya, 2015, no. 5, pp. 299–303.(In Russian).

[12] WCO Customs Risk Management Compendium, Brussels, Belgium, June 2011. http://www.wcoomd.org

[13] Tamrazyan S. E. Tamozhennyye Riski: Sushchnost', Upravleniye I Otsenka [Customs Risks: Essence, Management and Assessment], Ekonomika i upravleniye v XXI veke: tendentsii razvitiya, 2015, no. 23, pp. 168–172.(In Russian).

[14] Sevast'yanov B. A. Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki [Course of probability theory and mathematical statistics], Institut komp'yuternykh issledovaniy, Moscow-Izhevsk, 2019, 272 p.(In Russian).
[15] Shirokova E. A. Matematicheskiy analiz [Mathematical analysis], Kazanskiy (Privolzhskiy) federal'nyy universitet, Kazan, 2013, 154 p.(In Russian).

Information about the authors

Takhirov Jozil Ostanovich ✉ – DSc. (Phy. & Math.), Professor, Head of the Laboratory of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-0023-5673.

Abdurakhmonov Tokhir Tokhtasinovich✉ – PhD student, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-4611-3831.

Saidov Abdusobir Abdurakhmonovich✉ – DSc. (Tech.), Professor, Leading researcher at the Laboratory of Mathematical Modeling of Nonlinear Systems, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0003-3596-7468.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 85 - 101. ISSN 2079-6641

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-85-101

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 550.34.038.8

Регистрация микросейсмических явлений в г. Петропавловске-Камчатском при помощи прецизионного лазерного инклинометра

Р. И. Израпил[1*], И. В. Бедняков[2], В. В. Глаголев[2], Р. В. Ни[2], А. А. Плужников[2], К. В. Поляков[2], М. В. Ляблин[2], А. М. Красноперов[2], А. М. Кузькин[2], Ю. В. Клемешов[2], Р. И. Паровик[3], В. Е. Глухов[4]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, Россия

[2] Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, 141980, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6, Московская область, Россия

[3] ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

[4] Камчатский филиал ФГБУН Федерального исследовательского центра "Единая геофизическая служба РАН" , 683006, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пийпа, 9, Россия

Аннотация. Показаны основные принципы работы малогабаритного прецизионного лазерного инклинометра (МПЛИ), а также его принципиальная схема. Представлены предварительные результаты годовых измерений наклонов земной поверхности при помощи МПЛИ в районе города Петропавловск-Камчатский. Продемонстрирована работа прибора по регистрации основных микросейсмических явлений: землетрясений, первичных микросейсмов от океана, индустриальных шумов, угловых деформаций поверхности Земли от Луны и Солнца, свободные колебания поверхности Земли. На основании полученных результатов делается вывод о возможности создания сети из МПЛИ для регистрации изменения ландшафта поверхности Земли за длительный период, который составляет не менее одного года.

Ключевые слова: инклинометр, г. Петропавловск-Камчатский, прецизионный лазерный инклинометр, землетрясение, первичный микросейсм, индустриальные шумы

Получение: 27.04.2025; Исправление: 27.05.2025; Принятие: 29.05.2025; Публикация онлайн: 19.09.2025

Для цитирования. Израпил Р. И., Бедняков И. В., Глаголев В. В., Ни Р. В. и др. Регистрация микросейсмических явлений в Петропавловске-Камчатском при помощи прецизионного лазерного инклинометра // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 85-101. EDN: DFFBRZ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-85-101.

Финансирование. Работа выполнена в рамках программы «Приоритет–2030» и государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: israpilovdi@kamgu.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 85 - 101. ISSN 2079-6641

INSTRUMENTS AND METHODS OF MEASUREMENT

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-85-101

Research Article

Full text in Russian

MSC 86A15

Registration of Microseismic Events in Petropavlovsk-Kamchatsky Using a Precision Laser Inclinometer

R. I. Izrapil[1]*, I. V. Bednyakov[2], V. V. Glagolev[2], R. V. Ni[2], A. A. Pluzhnikov[2], K. V. Polyakov[2], M. V. Lyablin[2], A. M. Krasnoperov[2], A. M. Kuzkin[2], Yu. V. Klemeshov[2], R. I. Parovik[3], V. E. Glukhov[4]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya str. 4, Russia

[2] International intergovernmental organization Joint Institute for Nuclear Research, 141980, Dubna, Joliot-Curie str., 6, Moscow region, Russia

[3] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatka, Paratunka, Mirnaya st. 7, Russia

[4] Kamchatka branch of the Federal Research Center "Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences 683006, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piipa str., 9, Russia

Abstract. The basic principles of operation of a small-sized precision laser inclinometer (SSPLI) are shown, as well as its basic diagram. Preliminary results of annual measurements of the tilt of the earth's surface using SSPLI in the area of the city of Petropavlovsk-Kamchatsky are presented. The operation of the device for recording the main microseismic phenomena is demonstrated: earthquakes, primary microseisms from the ocean, industrial noise, angular deformations of the Earth's surface from the Moon and the Sun, free vibrations of the Earth's surface. Based on the results obtained, a conclusion is made about the possibility of creating a network of SSPLI to record changes in the landscape of the Earth's surface over a long period of at least one year.

Key words: inclinometer, Petropavlovsk-Kamchatsky, precision laser inclinometer, earthquake, primary microseism, industrial noise.

Received: 27.04.2025; Revised: 27.05.2025; Accepted: 29.05.2025; First online: 19.09.2025

For citation. Izrapil R. I., Bednyakov I. V., Glagolev V. V., Ni R. V., et. al. Registration of microseismic events in Petropavlovsk-Kamchatsky using a precision laser inclinometer. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 85-101. EDN: DFFBRZ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-85-101.

Funding. The work was carried out within the framework of the Priority–2030 program and state assignment of IKIR FEB RAS No. 124012300245-2.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: israpilovdi@kamgu.ru

Введение

Современные инклинометры, регистрирующие наклоны поверхности Земли, имеют ряд недостатков, а именно, отсутствие способности с высокой точностью (10^{-9}) регистрировать сейсмические события в области крайне низких частот. Оценка времени регистрации таких событий составляет несколько лет, что соответствует границе регистрации нижней частоты 10^{-8}Гц [1, 3, 4, 12]. В Объединенном институте ядерных исследований (ОИЯИ) с 2010 года развивается новый высокочувствительный метод – прецизионный лазерный инклинометр (ПЛИ) [5–10]. На основе данного метода сконструирован прибор способный измерять наклоны земной поверхности с инструментальной точностью 0,5 нрад в частотном диапазоне 10^{-5} – 20 Гц. На основе этого прибора предлагается создать сеть для измерения долговременных изменений поверхности Земли с целью определения зон накопления сейсмической энергии.

Метод прецизионного лазерного инклинометра

Общий принцип действия ПЛИ основан на способности жидкости горизонтализироваться при изменении наклона поверхности Земли.

Регистрация наклонов земной поверхности происходит следующим образом: лазер, кювета с жидкостью и позиционно чувствительное фотоприёмное устройство (ПЧФУ) закреплены на поверхности Земли; при наклоне земной поверхности на угол θ, отраженный лазерный луч смещается относительно ПЧФУ на удвоенный угол 2θ наклона поверхности Земли (рис. 1).

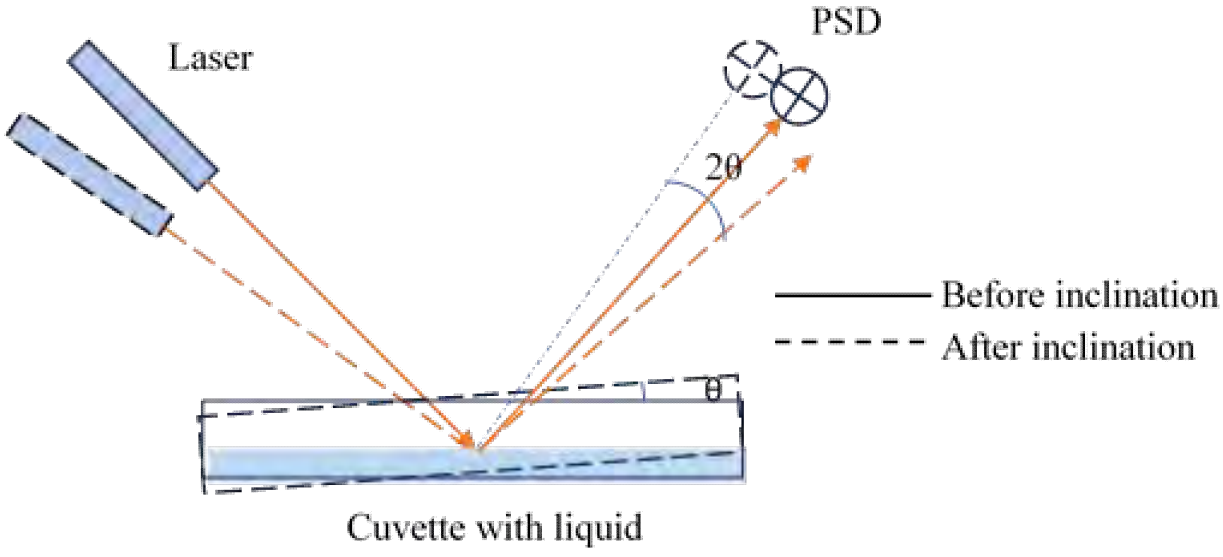


Рис. 1. Схема регистрации наклонов земной поверхности методом ПЛИ
Figure 1. Scheme of registration of the slopes of the earth's surface by the PLI method

Если в качестве ПЧФУ использовать квадрантный фотоприёмник, то возможно одновременно измерять угловые изменение наклона земной поверхности в двух ортогональных направлениях.

Второй принцип ПЛИ – использование тонкого слоя жидкости в кювете инклинометра. Тонкий слой жидкости толщиной d при условии $d \ll \lambda$ (λ – длина волны поверхностных волн) позволяет подавить волнения на поверхности жидкости в силу большого трения волны о дно кюветы. Горизонтализация жидкости в инклинометре происходит за счёт эффекта сообщающихся сосудов. При резком наклоне кюветы происходит инерционное изменение положение поверхности жидкости, которое впоследствии горизонтализируется без значительного её переноса. Оценка максимальной регистрируемой частоты метода ПЛИ при толщине слоя в 1 мм - 30 Гц.

В методе ПЛИ измеряется изменение углового положение поверхности Земли относительно предыдущего измерения. Такие угловые изменения фиксируются с определённым временным интервалом и являются сигналами в ПЛИ.

Малогабаритный прецизионный лазерный инклинометр

В настоящее время в разработке находится ПЛИ последнего поколения – малогабаритный прецизионный лазерный инклинометр (МПЛИ) [5]. На рис. 2 показана схема МПЛИ.

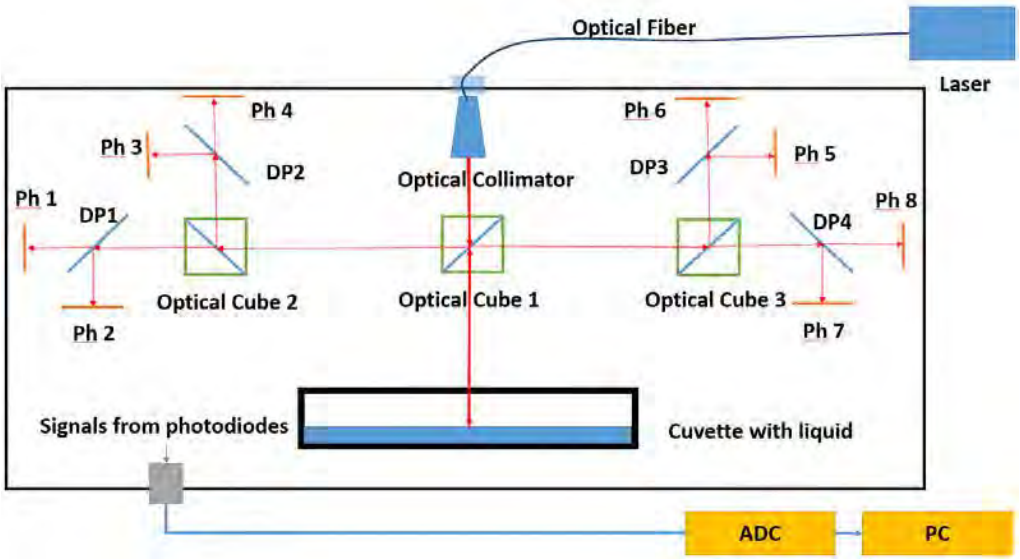


Рис. 2. Схема малогабаритного прецизионного лазерного инклинометра (МПЛИ)
Figure 2. Scheme of the Small-Sized Precision Laser Inclinometer (SSPLI)

В МПЛИ лазерное излучение через оптическое волокно подаётся в вакуумный объем. При помощи коллиматора оно направляется на оптический куб ОС1. Оптический куб ОС1 делит лазерный луч на два направления. В первом направлении лазерный луч направляется для регистрации собственного шумового блуждания (реперный луч). Во втором направлении лазерный луч движется

в кювету с жидкостью. После его отражения от поверхности жидкости он направляется обратно на ОС 1, где перенаправляется в блок формирования сигнальных лучей.

При помощи оптических кубов ОС2 и ОС3 реперный и сигнальный лучи делятся на два направления и подаются на делительные пластины DP1, DP2, DP3, DP4 для анализа их смещения в двух ортогональных направлениях (горизонтальном и вертикальном).

После прохождения соответствующей делительной пластинки, каждый из четырех лучей разбивается на два луча и направляются на фотоприемники Ph1, Ph2, Ph3, Ph4, Ph5, Ph6, Ph7, Ph8.

Сигналы фотоприёмников направляются на ADC и PC. Таким образом, имеется восемь каналов записываемой информации с восьми фотоприёмников. При наклонах земной поверхности в МПЛИ происходит пропорциональное изменение интенсивности сигнальных лучей на фотоприёмниках Ph5, Ph6, Ph7, Ph8. Определим сигналы в МПЛИ:

Для сигнального луча:

- вертикальная компонента смещения луча

$$R_{vs} = (U_8 - U_7)/(U_7 + U_8) \tag{1}$$

- горизонтальная компонента смещения луча

$$R_{hs} = (U_5 - U_6)/(U_5 + U_6) \tag{2}$$

Для реперного луча:

- вертикальная компонента смещения луча

$$R_{vr} = (U_1 - U_2)/(U_1 + U_2) \tag{3}$$

- горизонтальная компонента смещения луча

$$R_{vs} = (U_4 - U_3)/(U_3 + U_4) \tag{4}$$

Для уменьшения влияния шумового блуждания лазерного луча вычтем последовательно из (1) соотношение (3), а из (2) соотношение (4), получим

$$R_v = R_{vs} - R_{vr}, R_h = R_{hs} - R_{hr}. \tag{5}$$

Калибровочные коэффициенты получают с помощью принудительного наклона прибора на известный угол. Углы наклона в горизонтальном и вертикальном направлении вычисляются по формулам с учетом соотношений (5):

$$\Theta_H = K_H \cdot R_h, \Theta_V = K_V \cdot R_v.$$

где K_H и K_V – калибровочные коэффициенты. Для МПЛИ, установленного в г. Петропавловске-Камчатском, были определены калибровочные коэффициенты: $K_H = 71$ мкрад, $K_V = 128$ мкрад.

Установка МПЛИ в г. Петропавловске-Камчатском

На рис. 3 представлено фото МПЛИ, установленного в сейсмокамере Камчатского филиала Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук».

Рис. 3. МПЛИ установленный в сейсмокамере Камчатского филиала Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук»

Figure 3. SSPLI installed in the seismic chamber of the Kamchatka branch of the Federal Research Center Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences

Сейсмокамера расположена во внутреннем дворе Единой геофизической службы Российской академии наук и Института вулканологии и сейсмологии Дальневосточного отделения Российской академии наук [16].

Рис. 4. Расположение сейсмической камеры с МПЛИ в г. Петропавловск-Камчатский относительно сторон света и окружающих вулканов

Figure 4. The location of the seismic camera with SSPLI in Petropavlovsk-Kamchatsky relative to the cardinal directions and surrounding volcanoes

На рис. 4 представлено расположение МПЛИ относительно сторон света и вулканов, окружающих г. Петропавловск-Камчатский.

Результаты измерений МПЛИ

Регистрация землетрясений На рис. 5 представлен внешний вид типичного землетрясения, зарегистрированного МПЛИ.

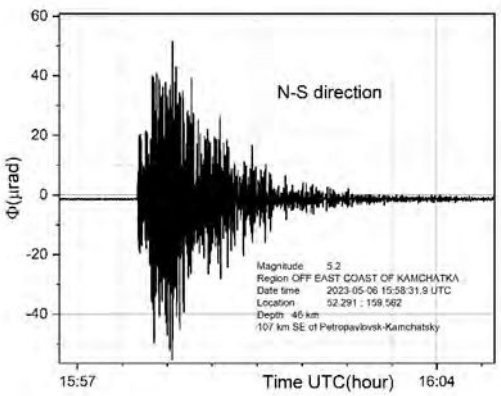


Рис. 5. Внешний вид землетрясения, зарегистрированного МПЛИ на Камчатке 06.05.2023
Figure 5. External view of the earthquake recorded by SSPLI in Kamchatka on 06.05.2023

Как видно из рис. 5, все компоненты землетрясения отчетливо зарегистрированы в диапазоне частот 10^{-3}-10 Гц. Такие сигналы являются типичными и встречаются также в исследовании геоакустической эмиссии [17].

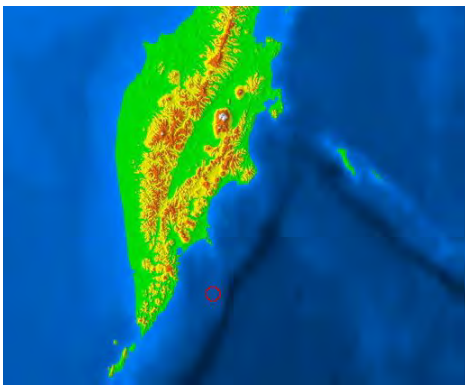


Рис. 6. Место произошедшего землетрясения 06.05.2023 г
Figure 6. The location of the earthquake that occurred on 06.05.2023

На рис. 6 показано место произошедшего землетрясения [11].

Регистрация сигналов первичного микросейсма При помощи МПЛИ зарегистрирован сигнал первичного микросейсма в частотном диапазоне от 10^{-2}-1 Гц. Источник первичного микросейсма – волнение на поверхности океана во время прохождения шторма.

При волнении поверхности океана возникает резонансное возбуждение стоячих волн между поверхностью и дном океана. Стоячая волна оказывает давление на дно океана и деформирует его. Возникающая волна деформации

формирует поверхностную волну, которая выходит на поверхность материка и распространяется по нему. Данный микросейсмический феномен является повсеместным и регистрируется на значительном удалении от океана [13,14,14,15].

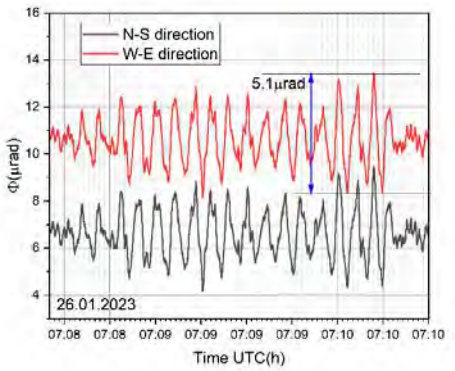


Рис. 7. Запись сигналов от первичного микросейсма
Figure 7. Recording signals from primary microseism

На рис. 7 показан внешний вид зарегистрированного МПЛИ первичного микросейсма.

Регистрация низкочастотных микросейсмических сигналов В области 10^{-5}-10^{-2} Гц зарегистрирован целый ряд квазипериодических микросейсмических сигналов. Это деформация земной поверхности от Луны и Солнца – твёрдые приливы.

На рис. 8 показана запись сигналов с МПЛИ за 18-20 апреля 2023 года.

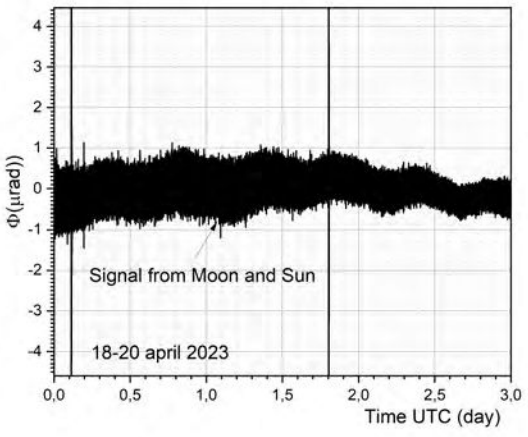


Рис. 8. Запись сигналов с МПЛИ 18-20 апреля 2023
Figure 8. Recording signals from SSPLI April 18-20, 2023

Отчетливо видны сигналы твёрдых приливов с периодом приблизительно в 12 часов, связанные с Луной и Солнцем.

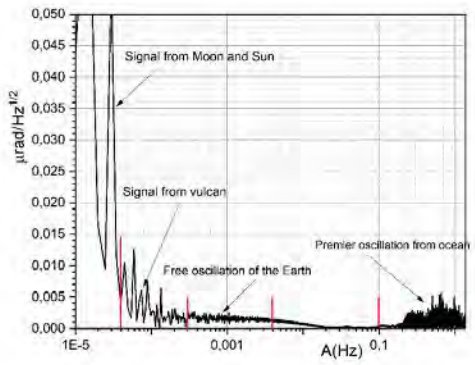


Рис. 9. Общий вид сигналов Фурье-анализа, данных представленных на Рис. 8 в диапазоне частот 10^{-5}-10 Гц

Figure 9. General view of the Fourier analysis signals, data presented in Figure 8 in the frequency range 10^{-5}-10 Гц

На рис. 9 показан общий вид Фурье-анализа сигналов, представленных на рисунке рис. 8 в диапазоне частот 10^{-5}-10 Гц. Наблюдаются сигналы твёрдых приливов от Луны и Солнца $\approx$ 160 нрад, предположительно сигналы от активности вулкана с амплитудой примерно в 2-3 раз меньше, около 50 нрад и предположительно, свободные колебания поверхности Земли, которые соответствуют амплитуде около 5-10 нрад, также сигнал первичных микросейсмических колебаний океана в диапазоне 10^{-1}-1 Гц.

Индустриальные шумы В области частот 1-10 Гц регистрируются колебания земной поверхности вызванными антропогенными факторами.

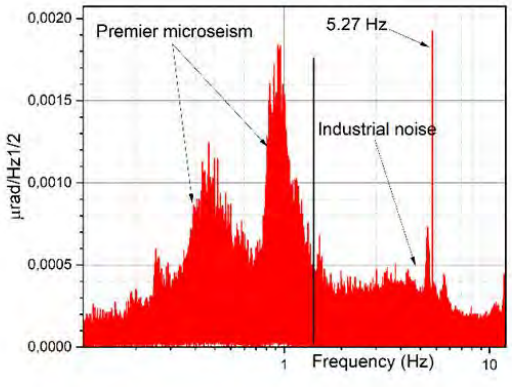


Рис. 10. Фурье-анализ индустриальных шумов в области частот 1-10 Гц

Figure 10. Fourier analysis of industrial noise in the frequency range of 1-10 Hz

На рис. 10 показан Фурье-анализ угловых колебаний поверхности Земли, соответствующий индустриальным шумам.

Сейсмокамера, в которой расположен МПЛИ находится в городской черте. МПЛИ регистрирует также деформацию земной поверхности при приближении массивных объектов. На рис. 11 показан момент прибытия и отбытия такого объекта (автофургон).

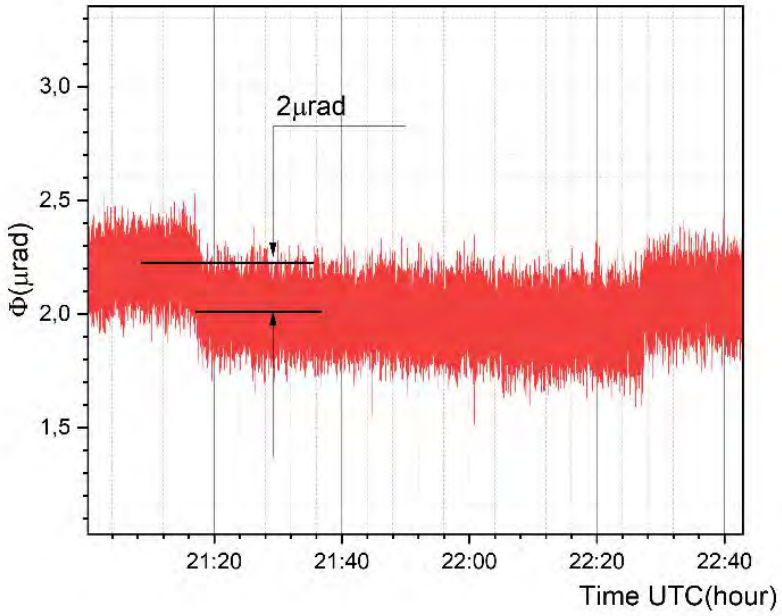


Рис. 11. Регистрация приезда и отъезда массивного объекта (автофургона) вблизи сейсмокамеры с МПЛИ

Figure 11. Registration of arrival and departure of a massive object (van) near a seismic chamber with SSPLI

Как видно из рис. 11, наблюдается деформационный наклон земной поверхности с величиной ≈ 2 мкрад.

Длительные измерения углов наклона поверхности Земли Важным применением МПЛИ является регистрация длительного изменения ландшафта поверхности Земли. Для наблюдения за долговременным изменением ландшафта требуется измерение изменения углов наклона в течение длительного периода, составляющего время более 3х лет. МПЛИ, который мы использовали для работы на Камчатке демонстрирует автономность около 1 года. Столь длительный период наблюдений даёт возможность проанализировать угловые движения земной поверхности в более широком частотном диапазоне [12]. Проанализируем данные наблюдения МПЛИ за годовой период его работы в г. Петропавловск-Камчатский.

Наблюдение микросейсмических изменений наклонов земной поверхности в низкочастотной области спектра.

На рис. 12 показано изменение углового положения земной поверхности с 08 декабря 2022 года по 4 декабря 2023 года.

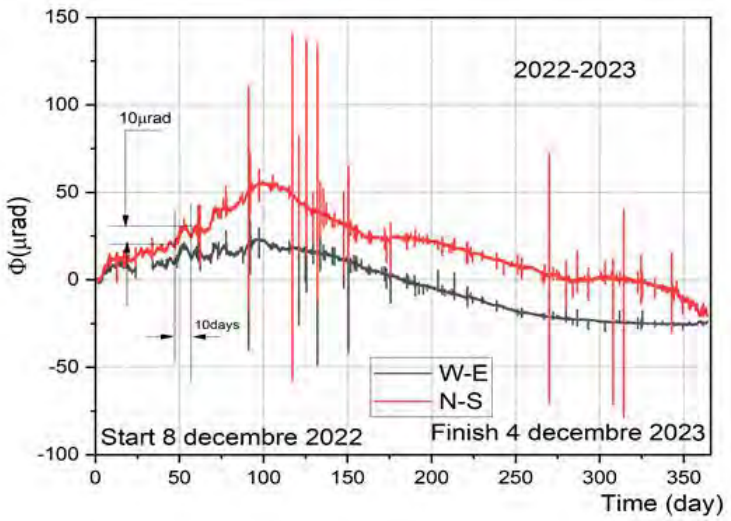


Рис. 12. Изменение углового положения земной поверхности в направлении Север-Юг в г. Петропавловск-Камчатский с 8 декабря 2022 по 4 декабря 2023 г

Figure 12. Change in the angular position of the earth's surface in the North-South direction in Petropavlovsk-Kamchatsky from December 8, 2022 to December 4, 2023

Как видно из графика, изображенного на рис. 12 за период с 8 декабря 2022 года по 4 декабря 2023 года наблюдалось большое количество землетрясений, активность первичных океанических микросейсмов и глобальные изменения наклонов земной поверхности. В течение всего срока наблюдения величина изменения наклонов земной поверхности соответствует приблизительно 20 мкрад. Наблюдается квазипериодические изменение наклона земной поверхности с временными интервалами 5-10 дней и амплитудой 10 мкрад. Подобные изменения носят квазипериодический характер и, возможно, могут быть интерпретированы как наклон земной поверхности, вызванные вулканической активностью. При повышении давления внутри вулкана возрастает наклон склона вулкана, что отражается на данных измерения инклинометра. МПЛИ детально зарегистрировал этот процесс. Обращает на себя внимание сезонность угловых наклонов земной поверхности. периодическая угловая активность поверхности Земли практически прекращается с середины марта 2023 г. Таким образом, МПЛИ демонстрирует способность к долговременному (один год) мониторингу угловых движений земной поверхности. Для повышения достоверности измерений предполагается проведение совместных измерений двух МПЛИ для определения их совместной чувствительности в области крайне низких частот (10^{-6}-10^{-8} Гц).

Выводы

Представлены результаты годовой работы Малогабаритного Прецизионного Лазерного Инклинометра в г. Петропавловск-Камчатском. Продемонстрирована работа прибора по регистрации основных микросейсмических явлений:

землетрясений, первичных микросейсмов от океана, индустриальные шумы, угловые деформации поверхности Земли от Луны и Солнца, свободные колебания поверхности Земли. Предположительно, обнаружены сигналы наклонов земной поверхности от активности вулкана в области частот 10^{-5}-10^{-4} Гц с амплитудой $\sim$ 50 нрад и квазипериодические колебания с амплитудой $\sim$ 5 мкрад с периодом 10 дней. Рассмотрены перспективы использования МПЛИ для регистрации изменения ландшафта поверхности Земли за период $\sim$ 3 года и измерение изменения наклонов склона вулкана.

Список литературы

1. Anderson G., Constable S., Staudigel H., Wyatt F. A seafloor long-base line tiltmeter // J. Geophys., 1997. vol. 102, no. B9, pp. 20269–20285.
2. Boudin F., Bernard P., Longuevergne L., et. al. A silica long base tiltmeter with high stability and resolution. // Review of Scientific Instruments, 2008. vol. 79, pp. 4502.
3. Horsfall J. *A new Geophysical Tiltmeter*, Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1977.
4. Kostoglodov V., Bilham R., Santiago J.-A., et. al. Long-baseline fluid tiltmeter for seismotectonic studies of Mexican subduction zone // Geofísica Internacional, 2002. vol. 41, no. 1, pp. 11-25.
5. Atanov N. V., Bednyakov I. V., Budagov Yu. A., et. al. Compact Precision Laser Inclinometer:Measurement of Signals and Noise // Physics of Particles and Nuclei, 2023. vol. 54, no. 4, pp. 788-800.
6. Lyablin M. V., Klemeshov Yu. V. Laser Power Stabilization in a Precision Laser Inclinometer // Physics of Particles and Nuclei Letters, 2023. vol. 20, no. 2, pp. 140-155.
7. Girolamo B. Di, Budagov J. A., Lyablin M. V., Vlachos S. The Precision Laser Inclinometer // 12th International Particle Accelerator Conference, 2021, pp. 3305-3308.
8. Budagov J., Girolamo B. Di, Lyablin M. The compact nanoradian precision laser inclinometer – an innovative instrument for the angular microseismic isolation of the interferometric gravitational antennas // PEPAN, 2020. vol. 17, no. 7.
9. Azaryan N. S., Budagov J. A., Lyablin M. V., et. al. Colliding Beams Focus Displacement Caused by Seismic Events // Physics of Particles and Nuclei Letters, 2019. vol. 16, no. 4, pp. 337-396.
10. Azaryan N., Budagov J., Glagolev V., et. al. The Seismic Angular Noise of an Industrial Origin Measured by the Precision Laser Inclinometer in the LHC Location Area // Physics of Particles and Nuclei Letters, 2019. vol. 16, no. 4, pp. 343-353.
11. Глухов В. Е., Макаров Е. О., Болдина С. В. Аппаратурно-программный комплекс сети наклономерных наблюдений за деформационными процессами на полуострове Камчатка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2023. Т. 44, № 3, С. 157-172.
12. Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2023. Т. 42, № 1, С. 191-206.
13. *Centre Sismologique Euro-Méditerranéen Euro-Mediterranean Seismological Centre https://www.emsc-csem.org/Earthquake_information/earthquake.php?id=1258317.*
14. Longuet-Higgins M. S. A Theory of the Origin of Microseisms // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1950. vol. 243, no. 857, pp. 1-35.
15. Lepore S., Grad M. Analysis of the primary and secondary microseisms in the wavefield of the ambient noise recorded in northern Poland Acta Geophysica // Acta Geophysica, 2018. vol. 66, pp. 915-929.
16. Webb S. C., Constable S. C. Microseism propagation between two sites on the deep seafloor // Bulletin of the Seismological Society of America, 1986. vol. 76, no. 5, pp. 1433-1445.
17. Naticchioni L., Perciballi M., Ricci F., et. al. Microseismic studies of an underground site for a new interferometric gravitational wave detector // Class. Quant. Grav., 2014. vol. 31, pp. 20.

Информация об авторах

Израпил Родослав Исрапилович✉ – руководитель информационного центра Объединенного института ядерных исследований ФГБОУ ВО «КамГУ им. Витуса Беринга», г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0009-0001-4008-5956.

Бедняков Иван Владимирович✉ – инженер, лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0005-8922-6886.

Глаголев Владимир Викторович✉ – доктор физико-математических наук, заместитель директора лаборатории ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0000-0003-2199-9629.

Ни Роман Вячеславович✉ – инженер, лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0005-0736-8064.

Плужников Андрей Андреевич✉ – инженер, лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0006-5069-3142.

Поляков Константин Дмитриевич✉ – инженер, лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0009-8244-5903.

Ляблин Михаил Васильевич✉ – кандидат физико-математических наук, начальник сектора №3, лаборатория ядерных проблем, Объединенный институт ядерных исследований им. В. П. Джелепова, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0008-2900-7667.

Красноперов Алексей Владимирович✉ – кандидат физико-математических наук, лаборатория ядерных проблем, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0000-0002-1425-2861.

Кузькин Алексей Михайлович✉ – лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0006-0244-9647.

Клемешов Юлий Викторович✉ – лаборатория ядерных проблем им. В. П. Джелепова, Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия, ORCID 0009-0009-8789-349X.

Паровик Роман Иванович✉ – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия ORCID 0000-0002-1576-1860.

Глухов Виталий Евгеньевич✉ – инженер, лаборатория исследований и мониторинга сильных землетрясений, Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН» (КФ ФИЦ ЕГС РАН), г. Петропавловск-Камчатский, Россия ORCID 0009-0003-7098-6469.

References

[1] Anderson G., Constable S., Staudigel H., Wyatt F. A seafloor long-base line tiltmeter. J. Geophys. 1997. vol. 102. no. B9. pp. 20269–20285

[2] Boudin F., Bernard P., Longuevergne L., et. al. A silica long base tiltmeter with high stability and resolution. Review of Scientific Instruments. 2008. vol 79. 4502

[3] Horsfall J. A new Geophysical Tiltmeter. Ph.D. thesis, University of Cambridge. 1977

[4] Kostoglodov V., Bilham R., Santiago J.-A., et. al. Long-baseline fluid tiltmeter for seismotectonic studies of Mexican subduction zone. Geofísica Internacional. 2002. vol 41. no. 1. pp. 11-25

[5] Atanov N. V., Bednyakov I. V., Budagov Yu. A., et. al. Compact Precision Laser Inclinometer:Measurement of Signals and Noise. Physics of Particles and Nuclei. 2023. vol. 54. no. 4. pp. 788-800

[6] Lyablin M. V., Klemeshov Yu. V. Laser Power Stabilization in a Precision Laser Inclinometer. Physics of Particles and Nuclei Letters. 2023. vol. 20. no. 2. pp. 140-155

[7] Girolamo B. Di, Budagov J. A., Lyablin M. V., Vlachos S. The Precision Laser Inclinometer. 12th International Particle Accelerator Conference. 2021. pp. 3305-3308

[8] Budagov J., Girolamo B. Di, Lyablin M. The compact nanoradian precision laser inclinometer – an innovative instrument for the angular microseismic isolation of the interferometric gravitational antennas. PEPAN. 2020. vol. 17. no. 7

[9] Azaryan N. S., Budagov J. A., Lyablin M. V., et. al. Colliding Beams Focus Displacement Caused by Seismic Events. Physics of Particles and Nuclei Letters. 2019. vol. 16. no. 4. pp. 337-396

[10] Azaryan N., Budagov J., Glagolev V., et. al. The Seismic Angular Noise of an Industrial Origin Measured by the Precision Laser Inclinometer in the LHC Location Area. Physics of Particles and Nuclei Letters. 2019. vol. 16. no. 4. pp. 343-353

[11] Glukhov V. E., Makarov E. O., Boldina S. V. Hardware and software complex of the tilt-measuring observations network of deformation processes on the Kamchatka peninsula. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2023, vol. 44. no. 3. 157-172 (In Russian).

[12] Mingazova D. F., Parovik R. I. Some aspects of the qualitative analysis of the high-frequency geoacoustic emission model. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2023. vol. 42 no. 1. pp. 191-206 (In Russian).

[13] Centre Sismologique Euro-Méditerranéen Euro-Mediterranean Seismological Centre https://www.emsc-csem.org/Earthquake_information/earthquake.php?id=1258317.

[14] Longuet-Higgins M. S. A Theory of the Origin of Microseisms. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1950. vol. 243. no. 857. pp. 1-35

[15] Lepore S., Grad M. Analysis of the primary and secondary microseisms in the wavefield of the ambient noise recorded in northern Poland Acta Geophysica. Acta Geophysica. 2018. vol. 66. pp. 915-929

[16] Webb S. C., Constable S. C. Microseism propagation between two sites on the deep seafloor. Bulletin of the Seismological Society of America. 1986. vol. 76. no. 5. pp. 1433-1445

[17] Naticchioni L., Perciballi M., Ricci F., et. al. Microseismic studies of an underground site for a new interferometric gravitational wave detector. Class. Quant. Grav. 2014. vol. 31.

Information about the authors

Izrapil Rodoslav Israpilovich✉ – Head of the Joint Institute for Nuclear Research Information Center Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0009-0001-4008-5956.

Bednyakov Ivan Vadimovich✉ – engineer, Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0005-8922-6686.

Glagolev Vladimir Viktorovich✉ – D. Sci. (Math. & Phys.), Deputy Director of the Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0000-0003-2199-9629.

Ni Roman Vyacheslavovich✉ – engineer, Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0005-0736-8064.

Pluzhnikov Andrei Andreevich✉ – engineer, Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0006-5069-3142.

Polyakov Konstantin Dmitrievich✉ – engineer, Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0009-8244-5903.

Lyablin Mikhail Vasilievich✉ – PhD (Math. & Phys.), JINR, DLNP, NEOMAP, Head of Section No. 3, Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0008-2900-7667.

Krasnoperov Alexey Vladimirovich✉ – PhD (Math. & Phys.), Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Russia, ORCID 0000-0002-1425-2861.

Kuzkin Alexey Mikhailovich✉ – Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia ORCID 0009-0006-0244-9647.

Klemeshov Yuliy Victorovich✉ – Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia, ORCID 0009-0009-8789-349X.

Parovik Roman Ivanovich✉ – D. Sci. (Math. & Phys.), Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory for Simulation of Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia ORCID 0000-0002-1576-1860.

Glukhov Vitaly Evgenevich✉ – engineer, Laboratory of research and monitoring of strong earthquakes, Kamchatka branch of Federal Research Center “Unified Geophysical Service of RAS” (KF FRC EGS RAS), Kamchatka, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piipa, 9, Russia ORCID 0009-0003-7098-6469.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 102 - 121. ISSN 2079-6641

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-102-121

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 551.254:534.23:550.344

Применение пространственно разнесенных лазерных интерферометров-деформографов для регистрации сейсмо-деформационных колебаний земной поверхности

И. А. Ларионов*[1], Д. В. Александров[2], М. Н. Дубров[2], И. С. Еремин[2], Д. С. Каленов[2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Российская Федерация

[2] Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 141190, Фрязино Московской обл., пл. Введенского, 1, Российская Федерация

Аннотация. Представлены конструкция и особенности установки лазерных интерферометров-деформографов в пунктах наблюдения «Карымшина» (Камчатка) и «Фрязино» (Подмосковье). Основные технические характеристики деформографов подтверждаются регистрацией реальных геофизических процессов. Применяемые инструменты и методы измерения деформаций обеспечивают разрешение $\epsilon \sim (5-6)\cdot 10^{-11}$ на базисах протяженностью 18-300 м. По результатам синхронных наблюдений микросейсмических деформаций в полосе частот 0.4 – 4 Гц, выполненных в период, предшествовавший разрушительному землетрясению 06.02.2023 M_w=7.8 в Турции, отмечены явления синхронизации и перестройки спектрального состава регистрируемых высокочастотных микросейсм. В результате анализа деформационно-барических процессов, сопровождавших два других сильных землетрясения с M_w=7.8 и M_w=7.7, выявлены необычные 10 – 40-минутные сверх-длиннопериодные колебания с амплитудой, примерно на порядок превышавшей амплитуду сейсмических L и R волн, и с характерной временно́й задержкой 7 – 8 мин. в пункте «Карымшина» относительно пункта «Фрязино». Результаты проведенных исследований будут полезны при разработке методов предупреждения стихийных бедствий - землетрясений, цунами, ураганов.

Ключевые слова: лазерные интерферометры, деформации, микросейсмы, землетрясения, атмосфера, давление

Получение: 16.04.2025; Исправление: 11.06.2025; Принятие: 16.06.2025; Публикация онлайн: 19.09.2025

Для цитирования. Ларионов И. А., Александров Д. В., Дубров М. Н., Еремин И. С., Каленов Д. С. Применение пространственно разнесенных лазерных интерферометров-деформографов для регистрации сейсмо-деформационных колебаний земной поверхности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 102-121. EDN: XCEDES. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-102-121.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственных заданий ИКИР ДВО РАН (рег. номер темы 124012300245-2) и ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (рег. номер темы 075-00395-25-00)

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: igor@ikir.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 102 - 121. ISSN 2079-6641

INSTRUMENTS AND METHODS OF MEASUREMENT

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-102-121

Research Article

Full text in Russian

MSC 86A17

Application of Spatially Separated Laser Strainmeters for Recording Seismic-Strain Oscillations of the Earth's Surface

I. A. Larionov[*1], *D. V. Aleksandrov*[2], *M. N. Dubrov*[2], *I. S. Eremin*[2], *D. S. Kalenov*[2]

[1] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatsky Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

[2] Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, 141190, Moscow region, Fryazino, Russia

Abstract. The design and installation features of laser strainmeters at «Karymshina» (Kamchatka) and «Fryazino» (Moscow Region) observation points are presented. The main technical characteristics of the strainmeters are confirmed by recording real geophysical processes. The used instruments and methods provide the resolution of $\epsilon \sim (5-6)\cdot 10^{-11}$ to measure deformations on bases of 18 – 300 m in length. Based on the results of synchronous observations of microseismic deformations in the frequency band of 0.4 – 4 Hz, which was carried out in the period preceding the destructive 06.02.2023 M_w=7.8 earthquake in Turkey, phenomena of synchronization and restructuring of the spectral composition of the recorded high-frequency microseisms were noted. As a result of the analysis of the deformation-baric processes that accompanied two other strong M_w=7.8 and M_w=7.7 earthquakes, unusual ultra-long-period 10 – 40-min oscillations with an amplitude approximately an order of magnitude greater than the amplitude of L and R seismic waves, and with a characteristic 7 – 8 min. time delay at point «Karymshina» relative to point «Fryazino» were revealed. The results of the conducted research will be useful in developing methods for preventing natural disasters - earthquakes, tsunamis, hurricanes.

Key words: laser interferometers, deformations, microseisms, earthquakes, atmosphere, pressure.

Received: 16.04.2025; Revised: 11.06.2025; Accepted: 16.06.2025; First online: 19.09.2025

For citation. Larionov I. A., Aleksandrov D. V., Dubrov M. N., Eremin I. S., Kalenov D. S. Application of spatially separated laser strainmeters for recording seismic-strain oscillations of the Earth's surface. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 102-121. EDN: XCEDES. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-102-121.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration №124012300245-2) and IRE RAS State Task (subject registration №075-00395-25-00)

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

[*] **Correspondence:** E-mail: igor@ikir.ru

Введение

Движения земной поверхности занимают особое место среди большого разнообразия наблюдаемых геофизических явлений, так как содержат непосредственную информацию о процессах в ниже залегающих слоях твердой Земли. Продольные и поперечные сейсмические волны, возбуждаемые крупными землетрясениями в различных частях земного шара, до сих пор являются главным источником сведений о строении земных недр. Применение лазерно-интерферометрических инструментов для измерения пространственных деформаций земной поверхности [1,2] дает ряд преимуществ по сравнению с использованием стандартных сейсмоприемников, наклономеров, гравиметров, регистрирующих ускорение, скорость или отклонение от вертикали в одной точке. Уникальные параметры лазерных деформографов - широкополосность, инструментальная чувствительность, динамический диапазон, позволяют исследовать весь спектр геодинамических процессов от медленных квазистатических движений разломов земной коры до быстрых перемещений земной поверхности, вызванных сейсмическими и акустическими ее колебаниями [3–7].

Важной задачей при изучении реальных деформационных процессов является выделение слабых геофизических сигналов регионального и глобального происхождения на фоне случайных локальных помех. Перспективным методом решения этой проблемы является использование пространственно разнесенных на большие расстояния синхронно работающих лазерных деформографов [8,9].

В настоящей работе приводятся результаты применения таких инструментов в пунктах наблюдения, отстоящих друг от друга на расстоянии 6740 км и существенно отличающихся характеристиками сейсмичности. Рассматриваются методы оптимизации их рабочих характеристик и пути повышения точности регистрации сейсмо-деформационных колебаний земной поверхности.

Геофизические пункты наблюдения и лазерные измерительные приборы

Параллельные наблюдения за деформациями земной поверхности, рассматриваемые в настоящей работе, проводятся в сейсмически активном регионе на полуострове Камчатка (пункт комплексных геофизических наблюдений «Карымшина» ИКИР ДВО РАН) и в асейсмической зоне в Подмосковье (Фрязинский лучеводный полигон ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, далее - пункт наблюдения "Фрязино").

Расположение и пространственная ориентация лазерно-интерферометрических инструментов показаны на рис. 1.

Пункт наблюдения «Карымшина» расположен в зоне тектонических разломов у восточного побережья п-ова Камчатка в долине р. Карымшина, окруженной с двух сторон горными массивами.

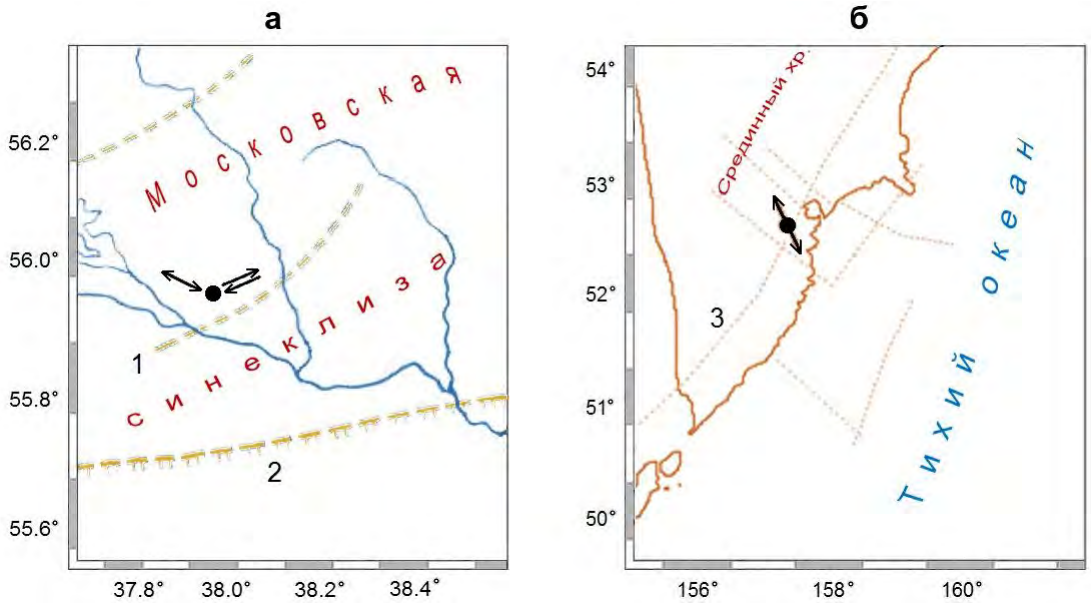


Рис. 1. Схема расположения лазерных деформографов в пунктах наблюдения «Фрязино» (а) и «Карымшина» (б): 1 - разрывные нарушения в кристаллическом фундаменте, 2 - северный борт авлакогена, 3 - основные тектонические разломы в земной коре; стрелками показаны направления осей чувствительности лазерных деформографов

Figure 1. Layout of laser strainmeters at the observation points "Fryazino"(a) and "Karymshina"(b): 1 - faults in the crystalline basement, 2 - northern edge of the aulacogen, 3 - main tectonic faults in the earth's crust; arrows indicate the directions of the sensitivity axes of the laser strainmeters

Приборы располагаются у поверхности земли, приповерхностный слой представлен осадочными породами, первый метр которых представляет собой глинистый слой, далее древнее русло реки сформировало обломочный слой в виде галько-песчаной смеси. Расстояние от места установки приборов до берега реки около 100 м, до тихоокеанского побережья (линии прибоя Авачинского залива) порядка 25 км.

Исследования геодеформационных процессов, в пункте наблюдения «Карымшина», с помощью лазерных интерферометров в ИКИР ДВО РАН ведутся, начиная с 2006 г. При активизации деформаций, регистрируемых 18-метровым интерферометром-деформографом, обнаружен аномальный рост геоакустической эмиссии в диапазоне частот от сотен герц до единиц килогерц [10], при этом значительные величины временных деформационных трендов (порядка $5 \cdot 10^{-6}$/сут), отмеченные в процессе длительных наблюдений, предположительно связаны с неустойчивым пластическим движениям осадочных пород в месте установки приборов. В результате проведенной модернизации лазерного деформографа, включая замену системы интерференционной регистрации, выявлены особенности деформационного процесса в приповерхностных осадочных породах на различных стадиях сейсмической активности для землетрясений энергетического класса 11.2 – 15.7 [11]. Оптимизация рабочих параметров

деформографа, в том числе оптико-электронной системы регистрации, позволила повысить ее линейность, стабильность работы во времени и результирующую точность измерений.

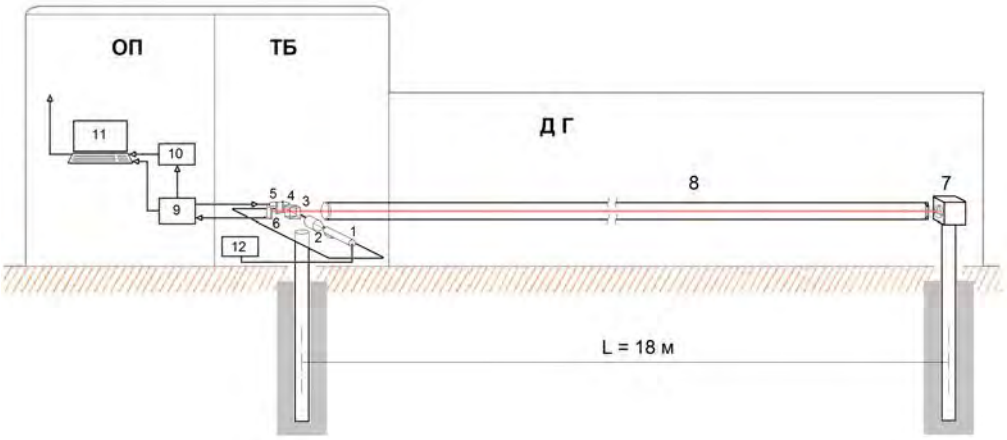


Рис. 2. Блок-диаграмма лазерного деформографа в пункте наблюдения «Карымшина»: 1 – блок лазера, 2 – согласующий телескоп (коллиматор), 3 – светоделительная призма, 4 – зеркала, 5 – пьезоэлектрический модулятор, 6 – фотоприемник, 7 – дальний отражатель, 8 – защитная труба, 9 – электронный блок обработки интерференционного сигнала, 10 – АЦП, 11 – компьютер; ДГ – деревянная галерея, ТБ – теплоизолированный бокс, ОП – отапливаемое помещение

Figure 2. Block diagram of the laser strainmeter at the Karymshina observation point: 1 – laser unit, 2 – matching telescope (collimator), 3 – beam-splitting prism, 4 – mirrors, 5 – piezoelectric modulator, 6 – photodetector, 7 – far reflector, 8 – protective tube, 9 – electronic interference signal processing unit, 10 – ADC, 11 – computer; WG – wooden gallery, TB – heat-insulated box, OP – heated room

Конструкция, способ установки и размещение основных оптических и электронных элементов лазерного деформографа [10] схематически показаны на рис. 2. Лазерный деформограф представляет собой неравноплечий интерферометр Майкельсона и конструктивно выполнен в виде двух оптических блоков, закрепленных на обсадных трубах двух пятиметровых сухих скважин, разнесенных на 18 м и образующих измерительный базис деформографа L. Блок лазера 1 и оптического интерферометра включает в себя согласующий телескоп (коллиматор) 2, оптические элементы 3 и 4, образующие опорное плечо интерферометра длиной около 10 см, пьезоэлектрический модулятор 5, и фотоприемник 6. Блок дальнего отражателя 7 содержит уголковый отражатель - стеклянную триппельпризму. В качестве источника когерентного излучения используется промышленный частотно-стабилизированный He-Ne лазер SIOS SL 03, длина волны λ=632,9 нм, относительная нестабильность частоты $2 \cdot 10^{-9}$. [http://www.nanointek.ru/assets/files/SL03.pdf].

Оптический путь лазерного пучка в измерительном плече интерферометра экранирован защитной пластиковой трубой 8, снабженной оптическими

иллюминаторами. Защитная труба собрана из 6 трехметровых секций с резиновыми уплотнениями и закреплена на 7 регулируемых по вертикали опорах на высоте около 0.3 м от поверхности земли. Измерительный базис деформографа укрыт деревянной галереей, защищающей его от осадков, ветра и резких перепадов температуры. Регистрирующая аппаратура (элементы 9–11 на рис. 2) размещаются в отапливаемом помещении, разделенном на две части. Блок лазера и оптического интерферометра (элементы 1–6) находятся в теплоизолированном боксе, в котором суточные вариации температуры в летний период составляют $\pm 10^{\circ}$C, а в зимнее время температура остается практически неизменной, вследствие значительной высоты снежного покрова, достигающей 2 м в районе установки деформографа.

Схема и принцип работы системы регистрации смещений интерференционной картины приведены и подробно описаны в [11]. Интерференционный сигнал, сформированный путем подачи пилообразного напряжения опорной частоты на пьезоэлектрический модулятор 5 с закрепленным на нем зеркалом, образуется на выходе фотоприемника 6 и поступает в электронный блок обработки 9 (рис. 2). Разность фаз между опорным 5 и измерительным 6 сигналами в пределах $0–2\pi$, соответствующая изменениям длины ΔL базиса деформографа на $0–\lambda/2$ (0–316 нм) измеряется фазовым детектором, оцифровывается 16-разрядным АЦП и поступает на компьютер. Количество переходов через 0 и 2π фиксируется компьютером и учитывается при вычислении суммарной величины ΔL. Результат измерения по линии связи передается на сервер для хранения и дальнейшей обработки.

Базовая точность регистрирующей системы составляет $\lambda/4 = 158$ нм, либо $\lambda/2 = 316$ нм в зависимости от настройки прибора. Инструментальная чувствительность системы регистрации определяется ее разрешающей способностью, которая ограничивается нелинейными искажениями при измерении смещений интерференционной картины и шумами используемых электронных устройств. Проведенная модернизация регистрирующей системы - оптимизация параметров пьезоэлектрического модулятора, линеаризация формы пилообразного напряжения, настройка каналов и экранирование электрических цепей фотоприемника и питающего опорного генератора позволила повысить стабильность работы и улучшить разрешающую способность системы до $0.1 \div 1$ нм.

Примеры регистрации деформационных и сейсмических процессов 18-метровым лазерным деформографом в пункте наблюдения «Карымшина» приведены на рис. 3. На начальном этапе разработки деформографа, в виду наличия значительной степени нелинейности преобразования сдвигов интерферограммы, измерение деформаций и определение амплитуды сейсмических волн было возможно с большой погрешностью (рис. 3а). В результате проведенной оптимизации системы регистрации деформографа точность определение амплитуды и формы сейсмо-деформационных колебаний существенно повышается (рис. 3б, 3в, 3г).

Деформации земной поверхности под действием мощных сейсмических возмущений могут быть измерены в широком динамическом диапазоне.

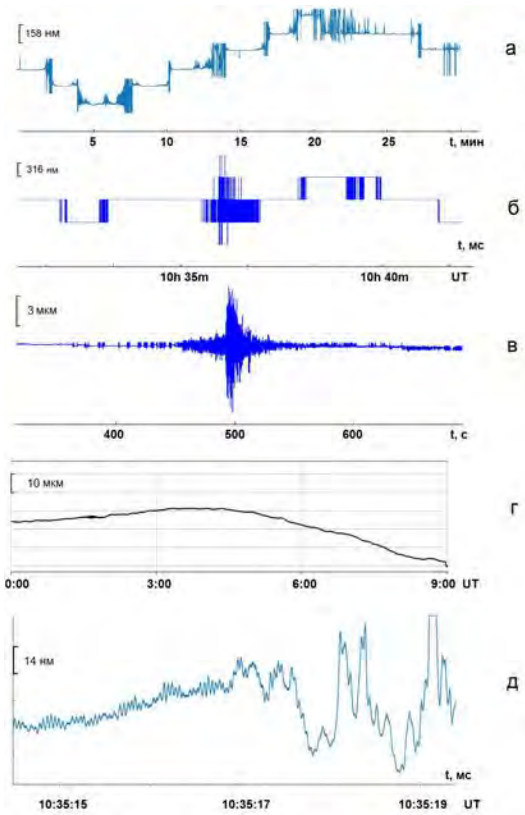


Рис. 3. Регистрация сейсмо-деформационных процессов 18-метровым лазерным деформографом в пункте наблюдения «Карымшина»: а) результат измерения деформаций при базовой точности нелинейной системы регистрации деформографа $\lambda/4 = 158$ нм; б) запись деформаций, вызванных землетрясением 26.03.2024, $M = 5.2$, при базовой точности системы регистрации $\lambda/2 = 316$ нм; в) результат измерения деформаций модернизированной линейной системой регистрации (землетрясение 25.03.2024, $M = 5.7$); г) регистрация медленных деформационно-барических вариаций длительностью 9 часов; д) вступление сейсмической волны от землетрясения 26.03.2024 $M = 5.2$ (рис. 3б) на фоне высокочастотных микросейсм

Figure 3. Recording of seismic deformation processes by an 18-meter laser strainmeter at the Karymshina observation point: a) result of strain measurement with the basic accuracy of the nonlinear strainmeter recording system of $\lambda/4 = 158$ nm; b) recording of strains caused by the earthquake of March 26, 2024, $M = 5.2$, with the basic accuracy of the recording system of $\lambda/2 = 316$ nm; c) result of strain measurements by the modernized linear recording system (earthquake of March 25, 2024, $M = 5.7$); d) recording of slow strain-baric variations lasting 9 hours; d) arrival of a seismic wave from the earthquake of March 26, 2024 $M = 5.2$ (Fig. 3b) against the background of high-frequency microseisms

Соотношение сигнал/шум для зарегистрированных волн, вызванных близким землетрясением с магнитудой $M = 5.7$ (эпицентральное расстояние $D = 170$ км), составляет порядка 70 дБ (рис. 3в).

Точность измерения медленных деформаций (часы, сутки) ограничивается нестабильностью оптической длины измерительного плеча интерферометра вследствие изменений плотности воздуха в частично связанной с внешней атмосферой защитной трубе. При меняющихся температуре и атмосферном давлении регистрируемые деформографом деформационно-барические вариации могут составлять десятки микрон в сутки (рис. 3г). Пороговую чувствительность (разрешающую способность) деформографа демонстрирует запись вступления сейсмической волны от землетрясения 26.03.2024 $M = 5.2$ (рис. 3д). Высокочастотные микросейсмы с абсолютной амплитудой ΔL порядка 5–10 нм за единицы секунд до первого вступления регистрируются с соотношением сигнал/шум > 10. Минимальная величина регистрируемых смещений находится на уровне менее 1 нм, что для деформаций в относительных единицах составляет

$\epsilon = \Delta L/L < 6 \cdot 10^{-11}$ и сопоставимо с лучшими зарубежными установками лазерных стрейн-сейсмографов наземного типа большой протяженности [2] и деформографов, устанавливаемых на большой глубине [3, 4, 7]. Для сравнения сигналов деформационных процессов ниже приведены данные лазерного интерферометра-деформографа наземного типа с измерительным плечом длиной 32 м, построенного по трехзеркальной схеме и установленного в 2010-2011 гг в пункте «Паратунка» ИКИР ДВО РАН.

Два других, рассматриваемых в нашей работе, удаленных лазерных деформографа установлены в Подмосковье на Фрязинском лучеводном полигоне ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (пункт наблюдения «Фрязино») [9]. Интерферометры-деформографы расположены в асейсмическом регионе в пределах Московской синеклизы, в зоне водораздела р. Клязьма и р. Воря (рис. 1). Мощность осадочного чехла в районе полигона составляет $1400 \div 1600$ м, приповерхностный слой представлен в основном суглинистыми грунтами. Крупный опущенный на глубину $3 \div 4$ км участок кристаллического фундамента – Подмосковный авлакоген находится в $20 \div 30$ км от места установки интерферометров.

Работы по созданию и применению длиннобазовых лазерных интерферометров в ФИРЭ им. В.А. Котельникова РАН ведутся на протяжении многих десятилетий, начиная с 1970-1980 гг. [12, 13]. В настоящее время в исследованиях используются две базовые оптические схемы инструментов: 1) деформографы, построенные по схемам классического равноплечего или модернизированного неравноплечего интерферометра Майкельсона; 2) деформографы на основе трехзеркального лазерного интерферометра с оптической обратной связью.

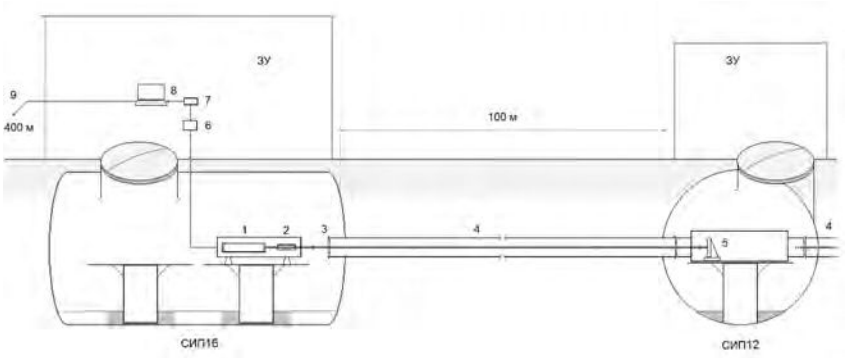


Рис. 4. Блок-диаграмма установки лазерных интерферометров-деформографов на подземной лучеводной линии в пункте наблюдения «Фрязино»: 1, 2 – блок лазера и оптического модулятора, 3 – герметичный иллюминатор, 4 – лучевод, 5 – сферическое зеркало, 6 – блок управления и обработки сигналов, 7 – АЦП, 8 – компьютер, 9 – линия связи 400 м

Figure 4. Block diagram of the installation of laser interferometers-strainmeters on the underground beam guide line at the observation point "Fryazino": 1, 2 - laser and optical modulator unit, 3 - sealed porthole, 4 - beam guide, 5 - spherical mirror, 6 - control and signal processing unit, 7 - ADC, 8 - computer, 9 - 400 m communication line

Схема установки приборов, входящих в состав лазерных интерферометров-деформографов на подземной лучеводной линии в пункте наблюдения «Фрязино», показана на рис. 4. Оптические блоки, электронные элементы предусилителей и датчиков размещаются в специальных подземных металлических помещениях – измерительных пунктах СИПах, соединяющихся между собой стальным трубопроводом, проложенным на глубине 1.5–2 м и образующих цельносварную металлическую конструкцию. За счет естественной тепловой изоляции подземных помещений нестабильность средней температуры в СИПах составляет 0.1–0.2 °C в сутки весной и осенью и уменьшается на порядок в летний и зимний периоды.

Блок лазера 1 и оптического модулятора 2 трехзеркального лазерного интерферометра установлен в головном СИПе на стальном столе с бетонным основанием. Лазерный пучок через герметичный иллюминатор 3 направляется в лучевод 4, образуемый периодической системой линз или сферических зеркал 5, установленных в СИПах вдоль линии примерно через каждые 100 м для компенсации расходимости пучка и поддержания видимого поперечного размера светового пятна около 2 см. Отрезки лучевода длиной 100-300 м используются в качестве измерительного плеча трехзеркального лазерного интерферометра-деформографа. Измерительный базис образуют выходное зеркало лазера 1 и дальний отражатель – сферическое зеркало 5. Блок управления и обработки сигналов 6 располагается в отапливаемом помещении, установленном над головным СИПом.

Регистрируемый деформографом аналоговый сигнал оцифровывается с помощью АЦП 7 и сохраняется на дисковом накопителе локального компьютера 8 либо передается по линии связи 9 длиной около 400 м для регистрации в лабораторное помещение.

Принцип работы системы регистрации трехзеркального лазерного интерферометра основан на фазовой модуляции интерференционной картины электрооптическим кристаллом путем подачи на него пилообразного напряжения на опорной частоте и выделения измерительного сигнала, фаза которого соответствует изменениям длины ΔL базиса деформографа. Искомая разность фаз непрерывно регистрируется цифро-аналоговым фазовым детектором на основе реверсивного счетчика в пределах $\pm 2\pi$, $\pm 16\pi$,..., что соответствует изменениям ΔL на величину $\pm\lambda/2$ (± 316 нм), $\pm 8\lambda/2$ (± 2.531 мкм),... Разрешающая способность аналогового выхода фазового детектора в указанных диапазонах находится на уровне $0.1 \div 1$ нм.

Применяемый метод позволяет отображать в реальном времени непрерывный ход изменения длины ΔL при наличии ее быстрых, например, микросейсмических колебаний с амплитудой, превышающей $\lambda/2$ (изменения разности фаз $> 2\pi$). Это является важной характеристикой системы регистрации при построении длиннобазовых интерферометров-деформографов, когда $L > 100$–300 м.

На рис. 5а и 5б приведены примеры записей, полученных с помощью описанной системы регистрации 300-метрового трехзеркального лазерного интерферометра в пункте наблюдения «Фрязино».

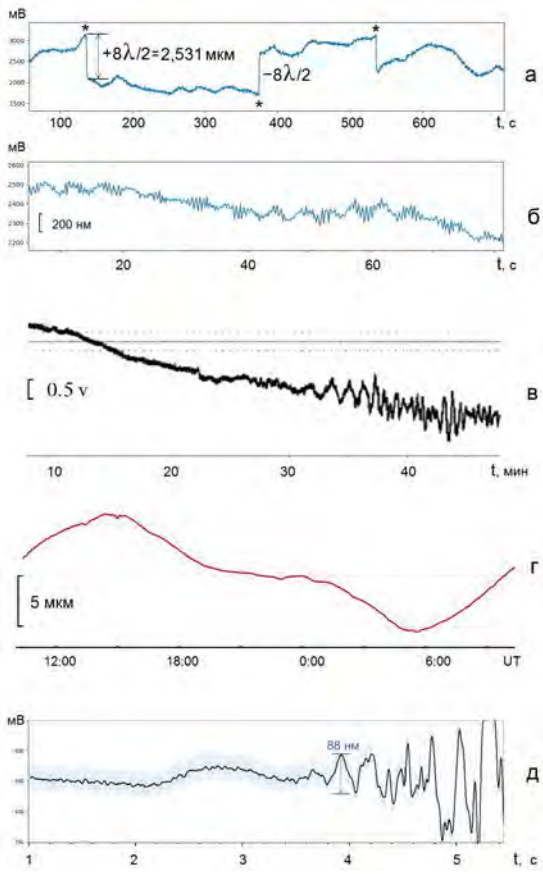


Рис. 5. Примеры регистрации деформационных и сейсмических процессов с помощью лазерных интерферометров-деформографов в пункте наблюдения «Фрязино»: а) сигнал на выходе цифро-аналоговой системы регистрации 300-метрового трехзеркального лазерного интерферометра (знаком $*$ отмечены автоматические переносы начала отсчета на величину $\pm 8\lambda/2$); б) микросейсмические колебания на частоте 1–2 Гц и штормовые 4–6 с микросейсмы (трехзеркальный интерферометр 300 м); в) длиннопериодные 10–100 с сейсмические волны от удаленного землетрясения $M_w = 7.2$ (неравноплечий интерферометр 100 м); г) медленные деформации земной поверхности (равноплечий интерферометр 100 м, фильтр низких частот 0.03 Гц); д) вступление короткопериодных сейсмических волн от локального землетрясения на фоне микросейсмических колебаний 10–15 Гц (трехзеркальный интерферометр 32 м, экспериментальная база ИКИР ДВО РАН в Паратунке 2010 г.)

Figure 5. Examples of recording deformation and seismic processes using laser interferometers-strainmeters at the Fryazino observation point: a) signal at the output of the digital-analog recording system of the 300-meter three-mirror laser interferometer (the $*$ sign indicates automatic transfers of the reference point by $\pm 8\lambda/2$); b) microseismic oscillations at a frequency of 1–2 Hz and storm microseisms of 4–6 s (three-mirror interferometer 300 m); c) long-period 10–100 s seismic waves from a distant earthquake $M_w = 7.2$ (unequal-arm interferometer 100 m); d) slow deformations of the earth's surface (equal-arm interferometer 100 m, low-pass filter 0.03 Hz). d) the arrival of short-period seismic waves from a local earthquake against the background of microseismic oscillations of 10-15 Hz (three-mirror interferometer 32 m, experimental base of IKIR FEB RAS in Paratunka, 2010)

Диапазон непрерывной регистрации цифро-аналогового фазового детектора составляет $\pm 16\pi$ ($\pm 8\lambda/2$). Резкие ступенчатые изменения записи на рис. 5а соответствуют автоматическим переносам (на рисунке они отмечены знаком $*$) начала отсчета регистратора на величину $\pm 8\lambda/2$ (± 2.531 мкм) и служат для точной калибровки деформографа. Это позволяет значительно расширить динамический диапазон регистрирующего устройства и одновременно наблюдать деформационные процессы, в десятки раз отличающиеся по интенсивности. Фон микросейсмических колебаний на частоте 1–2 Гц (рис. 5б) промышленного происхождения с амплитудой ~ 50 нм дополняют 4–6 с штормовые микросейсмы, которые в пункте наблюдения «Фрязино» обычно сопровождают развитие интенсивных внетропических циклонов в Северной Атлантике. Амплитуда 4–6

с микросейсм, регистрируемых 300-метровым интерферометром-деформографом находится на уровне $\sim$ 40 нм, что соответствует величине относительных деформаций $\epsilon = \Delta L/L \sim 1.3 \cdot 10^{-10}$.

На рис. 5в и 5г показаны примеры записей сейсмо-деформационных процессов в пункте наблюдения «Фрязино» с помощью лазерных деформографов, построенных по схемам модернизированного неравноплечего и классического равноплечего интерферометров Майкельсона – соответственно записи (рис. 5в) и (рис. 5г). Длиннопериодные колебания 10–100 с (рис. 5в), вызванные сейсмическими волнами от удаленного землетрясения (20.03.2008 г., Китай, Южный Синьцзян, $M_w = 7.2$), зарегистрированы 100-метровым широкополосным лазерным интерферометром неравноплечего типа, установленным в головном и соседнем с ним линейном СИПах подземного лучевода (рис. 4).

Равноплечий лазерный деформограф измеряет разность линейных деформаций двух взаимно перпендикулярных 100-метровых отрезков лучевода [9]. В таком интерферометре, с одной стороны, получаемый результат соответствует поперечной деформации сдвига в направлении, параллельном гипотенузе треугольника, образованного плечами интерферометра. С другой стороны, в равноплечей конфигурации воздействие коррелированных барических и температурных помех в обоих плечах интерферометра вычитаются, что позволяет регистрировать сверхдлиннопериодные колебания Земли, а также суточные и полусуточные волны лунно-солнечного прилива с амплитудой $\epsilon = \Delta L/L \sim 5 \cdot 10^{-8}$ (рис. 5г).

Уровень собственных шумов трехзеркального лазерного интерферометра с регистратором на основе цифро-аналогового фазового детектора (инструментальную чувствительность деформографа) демонстрирует приведенная на рис. 5д запись вступления короткопериодных сейсмических волн от локального землетрясения (энергетический класс $K = 10$, эпицентральное расстояние $D = 164$ км). Регистрация произведена 32-метровым инструментом [14], расположенным на экспериментальной базе ИКИР ДВО РАН в Паратунке на расстоянии около 15 км от пункта наблюдения «Карымшина». Амплитуда колебаний первого вступления с характерным периодом около 0.2 с (рис. 5д) составляет 44 нм.

Минимальная амплитуда фоновых микросейсмических колебаний в диапазоне частот 10–15 Гц, которые уверенно регистрируются деформографом за 2–3 секунды до первого вступления, находятся на уровне $\pm(1 - 2)$ нм. Таким образом, относительная разрешающая способность трехзеркального лазерного интерферометра-деформографа оценивается величиной $\epsilon = \Delta L/L \sim 5 \cdot 10^{-11}$.

Результаты синхронных наблюдений и их анализ

Эффективность применения пространственно разнесенных измерительных систем, включающих лазерно-интерферометрические инструменты сейсмо-деформационного и акустического мониторинга, была нами ранее

продемонстрирована при выделении широкополосных геофизических процессов регионального и глобального происхождения [14]. На примерах синхронной регистрации, выполняемой с помощью лазерных интерферометров-деформографов и специальной геоакустической аппаратуры в полосе частот 0.5–2.5 Гц и 2.5–11 кГц соответственно, показана возможность использования предложенной методики для разделения локальных и глобальных возмущений. В результате параллельного анализа полученных данных отмечены статистически значимый рост геоакустических и перестройка микросейсмических колебаний земной поверхности, происходившие за 20–50 часов до сильнейшего землетрясения 16.09.2015, $M_s = 8.3$ при удаленности пунктов регистрации от 14.0 до 15.3 тыс. км [14]. Особое поведение микросейсмических колебаний в диапазоне 1–10 Гц было зарегистрировано двумя разнесенными лазерными деформографами (пункты «Карымшина» и «Фрязино») непосредственно перед катастрофическим землетрясением в Турции $M_w = 7.8$ в 2023 году [15]. Рассмотрим наблюдавшиеся процессы более подробно.

Земная поверхность находится под постоянным воздействием фоновых микросейсмических возмущений естественного и антропогенного происхождения. Природными источниками микросейсм в диапазоне периодов колебаний единицы - десятки секунд является непрерывное перемещение воздушных масс в атмосфере и порождаемые ветром волны в морях и океанах, которые воздействуют на дно и береговую линию прибоя. Возбуждаемые во время шторма или урагана микросейсмические волны в твердой Земле могут распространяться вглубь континента на большие расстояния [16]. Высокочастотные микросейсмы в диапазоне единицы – десятки герц, обычно, являются техногенными, но могут возникать под действием ветра, перемещения подземных жидких, газовых или магматических масс.

На рис. 6а – 6б приведены характерные примеры микросейсмических колебаний земной поверхности, регистрируемых 18-метровым лазерным деформографом в пункте наблюдения «Карымшина» и 300-метровым лазерным деформографом в пункте наблюдения «Фрязино». На фоне высокочастотных микросейсмических колебаний в пункте «Карымшина» (рис. 6а) выделяется отчетливый цуг штормовых микросейсм с характерным периодом 3–4 с, возбуждаемых прибойной волной у береговой линии на расстоянии 25 км от прибора. Абсолютная амплитуда возмущений волнообразной формы составляет около 10 нм, что на базисе 18 м соответствует относительным деформациям $\epsilon = \Delta L/L \sim 6 \cdot 10^{-10}$. Относительные деформации под действием штормовых микросейсм в пункте «Фрязино» (рис. 6б) примерно в 2 раза меньше: $\epsilon = \Delta L/L \sim 3 \cdot 10^{-10}$, соответственно около 80 нм в абсолютных единицах на базисе 300 м. Характерный период микросейсм 4–6 с и меньшая амплитуда связаны с удаленностью источника (Северная Атлантика) и геологией на трассе их распространения.

Возможная связь микросейсмической активности и возникновения землетрясений рассматривалась многими авторами [12, 14–19].

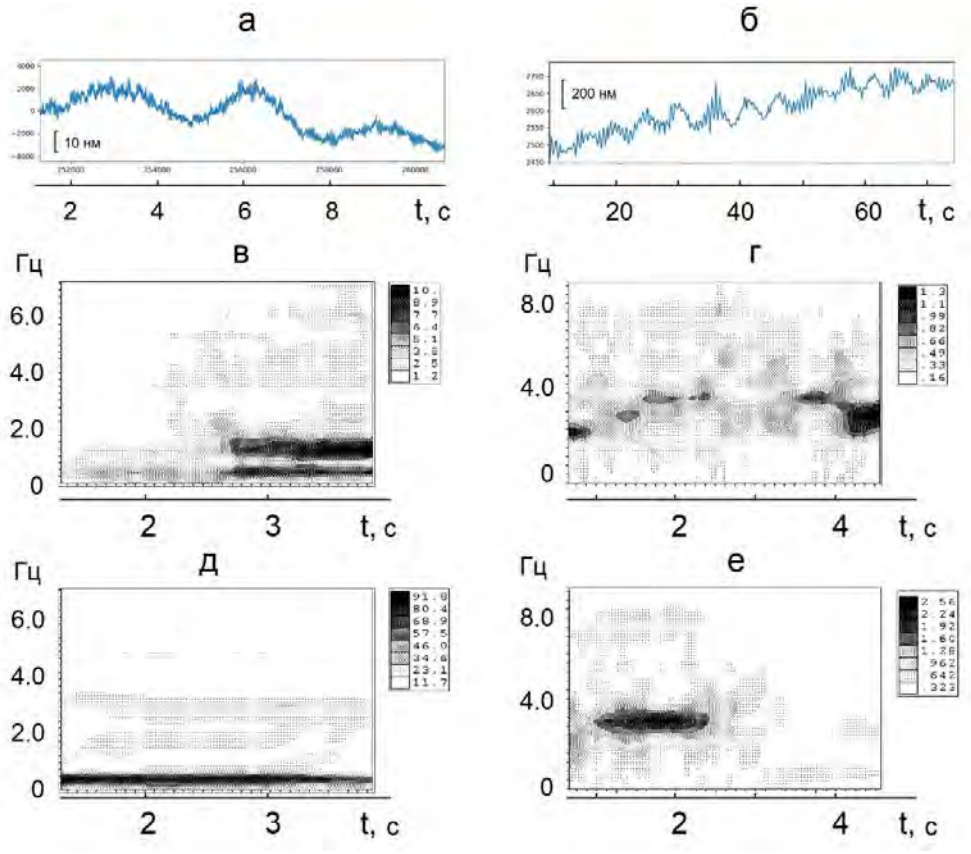


Рис. 6. Характерный вид штормовых и высокочастотных микросейсм в пунктах наблюдения «Карымшина» (а) и «Фрязино» (б); частотно-временные диаграммы микросейсм в пунктах «Карымшина» (в, д) и «Фрязино» (г, е) за 1 минуту (в, г) и несколько секунд (д, е) до главного толчка $M_w = 7.8$ (t_0 = 01ч 17м 35с UT) землетрясения в Турции 2023 г

Figure 6. Characteristic appearance of storm and high-frequency microseisms at the observation points of Karymshina (a) and Fryazino (b); frequency-time diagrams of microseisms at the points of Karymshina (c, d) and Fryazino (d, e) 1 minute (c, d) and several seconds (d, e) before the main shock $M_w = 7.8$ (t_0 = 01h 17m 35s UT) of the 2023 Turkey earthquake

При построении физических моделей взаимодействия микросейсмических полей и геофизической среды учитываются триггерные механизмы [17, 18], явления синхронизации [12, 18], модуляции микросейсм [12, 19] и другие эффекты. Наблюдения, выполненные лазерными деформографами в пунктах «Карымшина» и «Фрязино» в период, предшествовавший разрушительному землетрясению 06.02.2023 $M_w = 7.8$ в Турции, обнаруживают такую связь.

Явление синхронизации высокочастотных микросейсм, наблюдавшееся нами ранее [14] перед сильнейшим сейсмическим событием 16.09.2015 (Чили, $M_s = 8.3$), на этот раз проявилось особенно отчетливо. На рис. 6в – 6е приведены частотно-временные диаграммы микросейсм, зарегистрированных накануне землетрясения 06.02.2023 $M_w = 7.8$ в Турции. Диаграммы демонстрируют расщепление спектральных пиков в диапазоне 0.4–1.2 Гц, «Карымшина» (рис. 6в) и спекл-

структуру пиков в диапазоне 2–4 Гц во «Фрязино» (рис. 6г), наблюдавшихся за 1 минуту до землетрясения. Обе частотно-временные диаграммы сжались в узкие спектральные полосы в диапазоне 0.4 Гц, «Карымшина» (рис. 6д) и 3.1 Гц, «Фрязино» (рис. 6е) за несколько секунд до главного толчка (t_0 = 01:17:35 UT).

Представляют также интерес фоновые длиннопериодные (десятки секунд – минуты) и сверх-длиннопериодные (десятки минут – часы – сутки) сейсмо-деформационные колебания, которые наблюдаются в отсутствие землетрясений и нередко - предшествуют им [18–22]. Источником возбуждения таких колебаний могут быть крупные атмосферные возмущения регионального и глобального масштаба [21, 22]. Эффективным средством их обнаружения и регистрации являются лазерные интерферометры-деформографы с измерительным плечом, частично связанным с внешней атмосферой. Измеряемые таким инструментом вариации оптической длины $\boldsymbol{L}$ опорного базиса являются линейной функцией вариаций его геометрической длины L, а также температуры T и давления p воздушной среды в защитной трубе измерительного плеча интерферометра и при нормальных условиях (p = 1013 гПа, T = 273 K) могут быть выражены в виде:

$$\Delta \boldsymbol{L} \sim n_0 \cdot \Delta L + (2.85 \cdot 10^{-7}) \cdot k_0 L \Delta p - 1.06 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta \boldsymbol{T}, \qquad (1)$$

где: n_0 – показатель преломления воздуха при нормальных условиях, Δp – выражено в гПа, ΔT - в град K (°C), k_0 - параметр, определяющий степень герметичности защиты измерительного плеча интерферометра ($k_0 \sim 0$ при абсолютной герметичности измерительного плеча и $k_0 = 1$ при свободно связанном с внешней атмосферой измерительном плече).

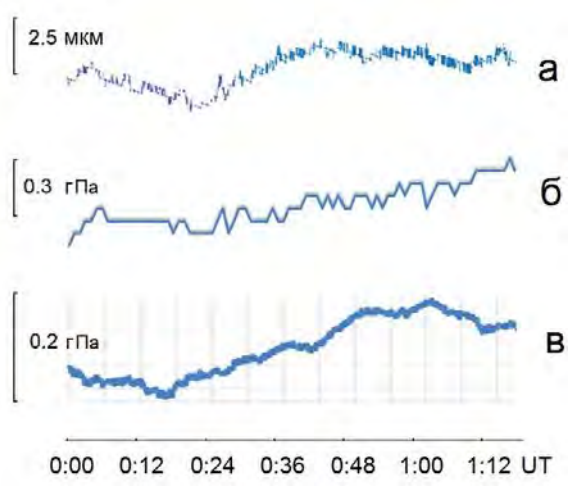


Рис. 7. Деформации, зарегистрированные 18-метровым лазерным деформографом (а) за час до землетрясения M_w = 7.8 в Турции 06.02.2023 г. – линейный температурный тренд ~2.4°C/час удален; вариации атмосферного давления в пунктах наблюдения «Карымшина» (б) и «Фрязино» (в) в это же период

Figure 7. Strains recorded by an 18-meter laser strainmeter (a) one hour before the M_w = 7.8 earthquake in Turkey on 06.02.2023 – the linear temperature trend of ~2.4°C/hour has been removed; variations in atmospheric pressure at the observation points «Karymshina» (b) and «Fryazino» (c) during the same period

На рис. 7 показаны деформации, зарегистрированные лазерным деформографом, и вариации атмосферного давления в пунктах наблюдения «Карымшина» и «Фрязино» за час до землетрясения M_w = 7.8 в Турции 06.02.2023 г. В диапазоне периодов от 20 мин до 1 часа наблюдается частичная корреляция деформационно-барических процессов, регистрируемых датчиками

на большом расстоянии друг от друга. Деформационно-барический коэффициент, рассчитанный по результатам лазерного деформографа в пункте «Карымшина» при удалении линейного температурного тренда величиной ~2.4°C/час (рис. 7а, 7б), для вариаций с указанными характерными периодами составил $\sim(2–3)\cdot10^{-8}$ гПа$^{-1}$. Проведенный анализ атмосферной и циклонической активности вместе с мировыми метеорологическими и океанологическими данными, дополненными результатами регистрации наклонов земной поверхности и вариаций атмосферного давления в Центральной и Восточной Европе, позволил заключить, что взаимодействие атмосферы, океана и литосферы могло быть спусковым механизмом этого землетрясения [15].

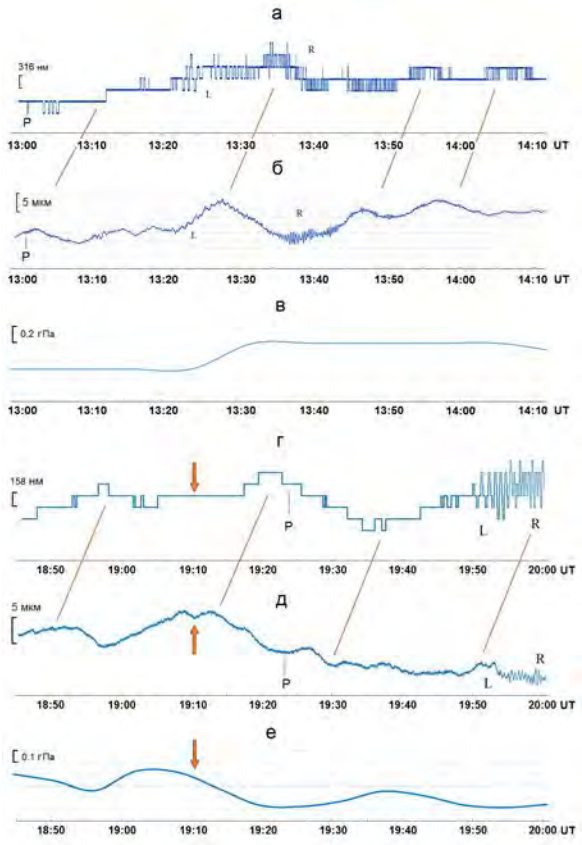


Рис. 8. Синхронная регистрация деформационно-барических процессов, сопровождавших землетрясения - 02.03.2016, $M_w = 7.8$ (а, б, в) и 28.01.2020, $M_w = 7.7$ (г, д, е) в пунктах наблюдения «Карымшина» (а, г, в) и «Фрязино» (б, д, е); стрелкой показан момент землетрясения

Figure 8. Synchronous recording of deformation-baric processes accompanying the earthquakes of March 2, 2016, $M_w = 7.8$ (a, b, c) and January 28, 2020, $M_w = 7.7$ (d, d, e) at the observation points «Karymshina» (a, d, c) and «Fryazino» (b, d, e); the arrow shows the moment of the earthquake

Рассмотрим результаты синхронной регистрации деформационно-барических процессов, сопровождавших два других сильных землетрясения - 02.03.2016, $M_w = 7.8$ (Юго-западнее Суматры, Индонезия) и 28.01.2020, $M_w = 7.7$ (Карибское море, Ямайка), которые приведены на рис. 8. Регистрация выполнялась в пункте наблюдения «Карымшина» 18-метровым лазерным деформографом и в пункте наблюдения «Фрязино» 100-метровым неравноплечим лазерным интерферометром.

На записях, выполненных обоими приборами, выделяются стандартные 10–30 с поверхностные сейсмические волны Лява (L) и Релея (R), приходящие с задержкой 20–30 минут в пункт регистрации после первого вступления объемной P-волны для каждого из землетрясений (соответственно рис. 8а, 8б и рис 8г, 8д). Кроме указанных стандартных волн оба прибора регистрируют необычные 10–

40-минутные сверх-длиннопериодные колебания, амплитуда которых примерно на порядок превышает амплитуду сейсмических L и R волн. При этом, отмеченные колебания наблюдаются в пунктах «Карымшина» и «Фрязино» с характерной временно́й задержкой 7–8 мин. Можно отметить, что эти колебания имеют деформационно-барическое происхождение – на это указывают их значительная амплитуда и корреляция с колебаниями атмосферного давления в этом же диапазоне периодов, фиксируемыми в обоих пунктах наблюдения (рис. 8в и 8е). Оценки деформационно-барического коэффициента, входящего в соотношение (1) для обоих деформографов в относительных единицах изменяются в пределах (1–3) $\cdot\, 10^{-7}$ гПа$^{-1}$. Значительное расстояние между пунктами регистрации (около 7 тыс. км) свидетельствует о глобальном характере наблюдаемых процессов.

Заключение

Описаны конструкция и особенности установки лазерных интерферометров-деформографов в пунктах наблюдения «Карымшина» (Камчатка) и «Фрязино» (Подмосковье), разнесенных на расстояние 6740 км. Основные технические характеристики деформографов иллюстрируются записями регистрации реальных геофизических процессов. Применяемые инструменты и методы обработки интерференционных сигналов позволяют проводить измерения деформаций на базисах протяженностью 18–300 м с относительным разрешением $\epsilon = \Delta L/L \sim$ (5–6) $\cdot\, 10^{-11}$.

В работе представлены результаты синхронных наблюдений сейсмо-деформационных колебаний земной поверхности в широкой полосе частот и проведен анализ полученных данных. Измерения микросейсмических деформаций в полосе частот 0.4–4 Гц, выполненные лазерными деформографами в пунктах «Карымшина» и «Фрязино» в период, предшествовавший разрушительному землетрясению 06.02.2023 $M_w = 7.8$ в Турции, показали наличие аномальной частотно-временной динамики наблюдаемых процессов. В частности, отмечены явления синхронизации и перестройка спектрального состава регистрируемых высокочастотных микросейсм.

В результате анализа деформационно-барических процессов, сопровождавших два других сильных землетрясения с $M_w = 7.8$ и $M_w = 7.7$, зарегистрированы необычные 10–40-минутные сверх-длиннопериодные колебания с амплитудой, примерно на порядок превышавшей амплитуду сейсмических L и R волн, и с характерной временно́й задержкой 7–8 мин в пункте «Карымшина» по отношению к пункту «Фрязино». Результаты проведенных исследований могут быть использованы в работах по предупреждению стихийных бедствий - землетрясений, цунами, ураганов.

Список литературы

1. Nikolaev A. V., Lukanenkov A. V., Dubrov M. N. New Possibilities of Combined Data Processing from Recording of Displacements and Strains in the Field of Seismic Waves. // Doklady Earth Sciences, 2010. vol. 430, no. 2, pp. 258–260.

2. Barbour A. J., Agnew D. C. Detection of seismic signals using seismometers and strainmeters // Bull. Seismol. Soc. Am., 2012. vol. 102, pp. 2484–2490.

3. Takemoto S., Momose H., Araya A., Morii W., Akamatsu J., Ohashi M., Takamori A., Miyoki S., Uchiyama T., Tatsumi D., Higashi T., Telada S., Fukuda Y. A 100 m laser strainmeter system in the Kamioka Mine, Japan, for precise observations of tidal strains // Journal of Geodynamics, 2006. vol. 41, no. 1-3, pp. 23–29.

4. Amoruso A., Crescentini L. The geodetic laser interferometers at Gran Sasso, Italy: recent modifications and correction for local effects // Journal of Geodynamics, 2009. vol. 48, pp. 120–125.

5. Dolgikh G. I. et al. Application of laser strainmeters of vertical and horizontal orientation in geophysical surveys of transition zones // Izvestiya, Physics of the Solid Earth, 2002. vol. 38, no. 8, pp. 686–689.

6. Milyukov V. K., Myasnikov A. V., Kuzminov V. V., Grishin M. Ya., Pershin S. M. 75 m laser strainmeter and aerosol lidar for monitoring the compression/expansion of the Earth's crust in the Baksan Neutrino Observatory / *2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL)*, 2019, pp. 83–86 https://doi.org/10.1109/CAOL46282.2019.

7. Araya et al. Design and operation of a 1500-m laser strainmeter installed at an underground site in Kamioka, Japan // Earth, Planets and Space, 2017. vol. 69, no. 77, pp. 1–7 https://doi.org/10.1186/s40623-017-0660-0.

8. Aleksandrov D., Dubrov M., Kravtsov V., Larionov I. Experience in synchronous observation of seismic-strain oscillations of the Earth by the spaced laser interferometers / *E3S Web of Conferences*, vol. 196, 2020.

9. Dubrov M. N., Larionov I. A., Aleksandrov D. V. et al. System of Laser Interferometers with a Large Spatial Difference to Study the Seismic-Deformation Oscillations of the Earth // J. Commun. Technol. Electron., 2023. vol. 68, pp. 796–809 https://doi.org/10.1134/S1064226923070033.

10. Larionov I. A., Marapulets Yu. V., Shevtsov B. M. Features of the Earth surface deformations in the Kamchatka peninsula and their relation to geoacoustic emission // Solid Earth, 2014. vol. 5, pp. 1293–1300 https://doi.org/10.5194/se-5-1293-2014.

11. Larionov I. A.,. Nepomnyashchiy Yu. A Features of geodeformation changes of near surface sedimentary rocks // Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2016. vol. 14, no. 3, pp. 85–90 https://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-14-3-85-90.

12. Dubrov M. N., Alyoshin V. A. Laser strainmeters: new developments and earthquake prediction applications // Tectonophysics, 1992. vol. 202, no. 2-4, pp. 209–213.

13. Dubrov M. N., Matveev R. F. Development and Study of Multicomponent Geophysical Laser Interferometer-Deformograph // J. Commun. Technol. Electron., 1998. vol. 43, no. 9, pp. 1068–1073.

14. Aleksandrov D. V., Dubrov M. N., Larionov I. A., Marapulets Yu. V., Shevtsov B. M. Earth Strain and Acoustic Monitoring of Geodynamic Processes in Seismic and Aseismic Zones Using Highly Sensitive, Spatially Separated Instruments // Journal of Volcanology and Seismology, 2019. vol. 13, no. 3, pp. 193–200 https://doi.org/10.1134/S0742046319030023.

15. Volkov V., Dubrov M., Larionov I., Mrlina J., Polak V., Aleksandrov D., Golovachev S. Atmosphere and Lithosphere Interaction Could Triggered the 2023 M_w=7.8 Turkey Earthquake. / *Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer, Cham*, Dmitriev, A., Lichtenberger, J., Mandrikova, O., Nahayo, E. (eds) Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors. STRPEP 2023, vol. 196, 2023 https://doi.org/10.1007/978-3-031-50248-4_13.

16. Sutton G., Barstow N. Ocean bottom microseisms from a distant supertyphoon // Geophysical Research Letters, 1996. vol. 23, no. 5, pp. 499–502 ..

17. Hainzl S., Zoller G., Main I. *Dynamics of seismicity patterns and earthquake triggering.* Amsterdam: Elsevier, 2006. 244 pp.

18. Sobolev G. A. Seismicity dynamics and earthquake predictability // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011. vol. 11, pp. 445-458.

19. Tanimoto T., Heki K., Artru-Lambin J. Interaction of solid earth, atmosphere, and ionosphere // Treatise on Geophysics, 2015. vol. 4, pp. 421–443.

20. Nersesov I. L., Latynina L. A. Strain processes before the Spitak earthquake // Tectonophysics, 1992. vol. 4, no. 2-4, pp. 221–225.

21. Volkov V., Mrlina J., Dubrov M., Smirnov V., Golovachev S., Polak V. Atmosphere, ocean and lithosphere interaction as a possible drive of earthquake triggering // Geodesy and Geodynamics, 2020. vol. 11, no. 6, pp. 442-454 https://doi.org/10.1016/j.geog.2020.07.001.

22. Sytinskij A. D. Planetary atmospheric disturbances during strong earthquakes // Geomagnetism and Aeronomy, 1997. vol. 37, no. 2, pp. 256–259.

Информация об авторах

Ларионов Игорь Александрович✉ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Камчатский край, Россия, ORCID 0000-0002-9369-7497.

Александров Дмитрий Валерьевич ✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, г. Фрязино, Московской обл., Россия, ORCID 0000-0001-6955-566X.

Дубров Мстислав Николаевич ✉ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, г. Фрязино, Московской обл., Россия, ORCID 0000-0002-0549-4340.

Еремин Илья Станиславович✉ – научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, г. Фрязино, Московской обл., Россия, ORCID 0009-0000-9101-8633.

Каленов Дмитрий Сергеевич✉ – старший научный сотрудник, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал, г. Фрязино, Московской обл., Россия, ORCID 0009-0008-1872-6084.

References

[1] Nikolaev A. V., Lukanenkov A. V., Dubrov M. N. New Possibilities of Combined Data Processing from Recording of Displacements and Strains in the Field of Seismic Waves, Doklady Earth Sciences. 2010. vol. 430. no. 2. pp. 258–260

[2] Barbour A. J., Agnew D. C. Detection of seismic signals using seismometers and strainmeters. Bull. Seismol. Soc. Am., 2012. vol. 102. pp. 2484–2490

[3] Takemoto S., et. al. A 100 m laser strainmeter system in the Kamioka Mine, Japan, for precise observations of tidal strains, J. of Geodynamics. 2006. vol. 41. no. 1-3. pp. 23–29

[4] Amoruso A., Crescentini L. The geodetic laser interferometers at Gran Sasso, Italy: recent modifications and correction for local effects, J. of Geodynamics. 2009. vol. 48. p. 120–125

[5] Dolgikh G. I. et al. Application of laser strainmeters of vertical and horizontal orientation in geophysical surveys of transition zones, Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2002. vol. 38. no. 8. pp. 686–689

[6] Milyukov V. K., et. al. 75 m laser strainmeter and aerosol lidar for monitoring the compression/expansion of the Earth's crust in the Baksan Neutrino Observatory, 2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL). 2019. pp. 83–86 https://doi.org/10.1109/CAOL46282.2019

[7] Araya et al. Design and operation of a 1500-m laser strainmeter installed at an underground site in Kamioka, Japan, Earth, Planets and Space. 2017. vol. 69. no. 77. pp. 1–7 https://doi.org/10.1186/s40623-017-0660-0

[8] Aleksandrov D., Dubrov M., Kravtsov V., Larionov I. Experience in synchronous observation of seismic-strain oscillations of the Earth by the spaced laser interferometers *E3S Web of Conferences. 2020. vol. 196. 02010 https://doi.org/10.1051/e3sconf/202019602010*.

[9] Dubrov M. N., Larionov I. A., Aleksandrov D. V. et al. System of Laser Interferometers with a Large Spatial Difference to Study the Seismic-Deformation Oscillations of the Earth, J. Commun. Technol. Electron. 2023. vol. 68. pp. 796–809 https://doi.org/10.1134/S1064226923070033.

[10] Larionov I. A., Marapulets Yu. V., Shevtsov B. M. Features of the Earth surface deformations in the Kamchatka peninsula and their relation to geoacoustic emission, Solid Earth. 2014. vol. 5. pp. 1293–1300 https://doi.org/10.5194/se-5-1293-2014.

[11] Larionov I. A., Nepomnyashchiy Yu. A. Features of geodeformation changes of near surface sedimentary rocks. Bulletin KRASEC. Phys. and Math. Sci. 2016. vol. 14. no. 3. pp. 85–90 https://doi.org/10.18454/2079-6641-2016-14-3-85-90 (In Russian).

[12] Dubrov M. N., Alyoshin V. A. Laser strainmeters: new developments and earthquake prediction applications, Tectonophysics. 1992. vol. 202. no. 2-4. pp. 209–213.

[13] Dubrov M. N., Matveev R. F. Development and Study of Multicomponent Geophysical Laser Interferometer-Deformograph, J. Commun. Technol. Electron. 1998. vol. 43. no. 9. pp. 1068–1073

[14] Aleksandrov D. V., et. al. Earth Strain and Acoustic Monitoring of Geodynamic Processes in Seismic and Aseismic Zones Using Highly Sensitive, Spatially Separated Instruments, J. of Volc. and Seism. 2019. vol. 13. no. 3 pp. 193–200 https://doi.org/10.1134/S0742046319030023.

[15] Volkov V., et.al. Atmosphere and Lithosphere Interaction Could Triggered the 2023 M_w=7.8 Turkey Earthquake. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. STRPEP 2023. 2023. vol. 196. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50248-4_13

[16] Sutton G., Barstow N. Ocean bottom microseisms from a distant supertyphoon, Geophysical Research Letters. 1996. vol. 23. no. 5. pp. 499–502

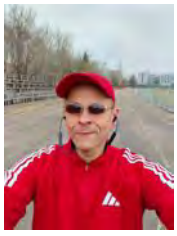
[17] Hainzl S., Zoller G., Main I. Dynamics of seismicity patterns and earthquake triggering. Amsterdam. Elsevier, 2006. 244 p.
[18] Sobolev G. A. Seismicity dynamics and earthquake predictability, Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2011. vol 11. pp. 445-458
[19] Tanimoto T., Heki K., Artru-Lambin J. Interaction of solid earth, atmosphere, and ionosphere, Treatise on Geophysics. 2015. vol. 4. pp. 421–443
[20] Nersesov I. L., Latynina L. A. Strain processes before the Spitak earthquake, Tectonophysics. 1992. vol. 4. no. 2-4. pp. 221–225
[21] Volkov V., Mrlina J., Dubrov M., Smirnov V., Golovachev S., Polak V. Atmosphere, ocean and lithosphere interaction as a possible drive of earthquake triggering, Geodesy and Geodynamics. 2020. vol. 11. no. 6. pp. 442-454 https://doi.org/10.1016/j.geog.2020.07.001.
[22] Sytinskij A. D. Planetary atmospheric disturbances during strong earthquakes, Geomagnetism and Aeronomy. 1997. vol. 37. no. 2. pp. 256–259

Information about the authors

Larionov Igor Alexandrovich – PhD (Phys. & Math.), Leading Researcher, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0002-9369-7497

Alexandrov Dmitry Valerievich – PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher, V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, Fryazino, Moscow Region, Russia, ORCID 0000-0001-6955-566X.

Dubrov Mstislav Nikolaevich – PhD (Phys. & Math.), Leading Researcher, V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, Fryazino, Moscow Region, Russia, ORCID 0000-0002-0549-4340.



Eremin Ilya Stanislavovich – Researcher, V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, Fryazino, Moscow Region, Russia, ORCID 0009-0000-9101-8633.

Kalenov Dmitry Sergeevich – Senior Researcher, V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences, Fryazino Branch, Fryazino, Moscow Region, Russia, ORCID 0009-0008-1872-6084.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 51. №2. С. 122 - 141. ISSN 2079-6641

ПРИБОРЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-122-141

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 621.396

Аппаратно-программный комплекс и методика наблюдений ОНЧ–излучений на Камчатке

Е. И. Малкин**, Г. И. Дружин

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Россия

Аннотация. Настоящая работа посвящена описанию аппаратурно-программного комплекса, разработанного в Институте космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН и установленного в районе р. Карымшина (Елизовский район, Камчатский край, Россия). Аппаратурно-программный комплекс предназначен для приема естественного электромагнитного излучения в ОНЧ диапазоне с целью исследования источников электромагнитных излучений и выявления особенностей распространения сигналов вдоль земной поверхности и при прохождении их через ионосферу и магнитосферу Земли. Особое внимание при этом было уделено точности определения азимутальных углов прихода излучений от высотных грозовых разрядов, ответственных за возникновение свистящих атмосфериков, наблюдаемых в ОНЧ–диапазоне. Подробно дано описание: приемного антенного комплекса; методики определения азимутов прихода излучений; калибровки ОНЧ–пеленгатора; проверки работоспособности комплекса при приеме сигналов радиостанций точного времени и от грозовых разрядов, зарегистрированных всемирной сетью WWLLN. Приемный антенный комплекс состоит из: двух магнитных антенн, расположенных вертикально, плоскостью в направлении север-юг и восток-запад, и электрической антенны. Каждая магнитная антенна содержит 98 витков медного провода и имеет геометрическую площадь 48 м^2. Электрическая штыревая антенна имеет высоту 9 м от верхней части до её основания. При приеме сигналов применялись 2 метода определения азимута источников ОНЧ-излучений – амплитудный и спектральный. Для оперативной работы использовался наиболее простой, амплитудный метод. Для более точного определения азимута разработан спектральный метод, вычисление с помощью которого занимает большее время, но который позволяет более чем на порядок увеличить точность в определении азимута, по сравнению с амплитудным методом. Применение спектрального метода позволило провести исследования связи высотных грозовых разрядов с активностью гроз метеорологического и вулканического происхождения и показать, что высотные грозовые разряды являются источниками вистлеров. Для регистрации и хранения данных был разработан программный комплекс, включающий в себя клиентскую и серверную части. Сервер выполняет обработку потока данных, полученных с АЦП, и привязку к точному времени. Клиентская часть отвечает за формирование полноценного архива и его хранение. Калибровки магнитных антенн осуществлялась путем подачи шумовых и синусоидальных сигналов на магнитные и электрическую антенны.

Ключевые слова: регистрация атмосфериков, направление, электромагнитные импульсы, ОНЧ-пеленгатор молний

Получение: 03.06.2025; Исправление: 27.06.2025; Принятие: 18.09.2025; Публикация онлайн: 19.09.2025

Для цитирования. Малкин Е. И., Дружин Г. И. Аппаратно-программный комплекс и методика наблюдений ОНЧ–излучений на Камчатке // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 51. № 2. С. 122-141. EDN: YIHWLI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-122-141.

Финансирование. Работа выполнена за счет гос. задания ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2)

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: malkin@ikir.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 51. no. 2. P. 122 - 141. ISSN 2079-6641

INSTRUMENTS AND METHODS OF MEASUREMENT

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-122-141

Research Article

Full text in Russian

MSC 78A30

Hardware and Software Complex and Methods of Observing VLF Radiation in Kamchatka

*E. I. Malkin**, *G. I. Druzhin*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
684034, Paratunka, Elizovo raion, Kamchakskiy kray, Russia

Abstract. The paper is devoted to the description of the hardware-software complex developed at the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS and installed in the region of Karymshina river (Elizovo raion, Kamchatksiy kray, Russia). The hardware-software complex is aimed at receiving the natural electromagnetic radiation in VLF range to investigate electromagnetic radiation sources and detect the features of signal propagation along the Earth surface and during its passage though the Earth ionosphere and magnetosphere. Special attention was focused on the detection accuracy of azimuthal arrival angles of the radiation from height lightning discharges responsible for whistler occurrences observed in the VLF range. Detailed description is given for the receiving antenna complex, the method for detection of radiation arrival azimuth, VLF direction finder calibration, checking the complex operation when receiving signals from correct time radio stations and from lightning discharges recorded by the WWLLN global network. The receiving antenna complex consists of two magnetic antennas, arranged vertically with the plane in the north-southern and east-western directions, and an electric antenna. Each magnetic antenna contains 98 coils of copper wire and has the geometric square of 48 m^2. The electric rode antenna has the height of 9 m from its upper part to its basis. When receiving signals, two method for determination of VLF radiation source azimuths were applied, the amplitude and spectral ones. For the effective operation, the simplest one, the amplitude method, was applied. For the most accurate determination of the azimuth, the spectral method was developed. It takes more time to make calculations by it but it allows one to improve the accuracy of azimuth determination by more than one order compared to the amplitude method. Application of the spectral method made it possible to investigate the relation of height lightning strokes with the activity of thunderstorms of meteorological and volcanic origin and showed that height lightning discharges are the sources of whistlers. A software complex was developed to record and store the data. It includes client and server ends. The server processes the data flow from the ADC and makes correct time referencing. The client end is responsible for full archive organization and its storage. Magnetic antennas are calibrated by sending noise and sinusoidal signals on magnetic and electric antennas.

Key words: atmospherics registration, direction, electromagnetic pulses, VLF direction finder lightning.

Received: 03.06.2025; Revised: 17.09.2025; Accepted: 18.09.2025; First online: 19.09.2025

For citation. Malkin E. I., Druzhin G. I. Hardware-software complex and method of VLF radiation observations in Kamchatka. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **51**: 2, 122-141. EDN: YIHWLI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-51-2-122-141.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (Reg. No. NIOKTR 124012300245-2)

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: malkin@ikir.ru

Введение

Естественное электромагнитное излучение, регистрируемое на земной поверхности, формируется в основном, источниками атмосферного [1–4] и магнитосферного [1, 3, 5–7] происхождений. В некоторых случаях наблюдаются излучения, совпадающее с процессами, происходящими в земной коре и при извержении вулканов [8–14]. В большинстве случаев для исследования этих процессов применяются методы пассивной локации. К настоящему времени разработаны десятки методов и систем пассивной локации гроз, широко используемых для решения практических задач. Среди этих систем особое место занимают однопунктовые грозопеленгаторы. Они состоят из пеленгатора, в котором для определения направления на источник излучения традиционно используются скрещенные магнитные рамки E-H–дальномера, в котором используется различная зависимость от расстояния отношения вертикальной электрической к горизонтальным магнитным составляющим электромагнитного поля при излучении молниевого разряда [15]. В работе [16] приводится анализ погрешностей трёх методов местоопределения грозового разряда: однопунктового, триангуляционного и гибридного двухпунктового. Описывается алгоритм определения координат грозового разряда в зависимости от углов прихода атмосфериков в пункты регистрации, учитывающий точности различных методов с наименьшими ошибками определения местоположения грозового разряда.

Методика и система измерений пространственных углов прихода электромагнитных волн ОНЧ-диапазона описаны в работах [17–19]. Развитие методов комплексного мониторинга окружающей среды с целью регистрации атмосфериков предполагает наращивание геофизических исследований, создание стационарных и мобильных пунктов наблюдений [20].

Международный опыт работ в данной области подтверждает, что получение достоверной информации о развитии и обнаружении грозовых облаков, его типах и масштабах возможно только в случае привлечения всех современных методов исследований [21–25].

Целью настоящей работы является описание разработанного в ИКИР ДВО РАН аппаратно-программного комплекса, предназначенного для пеленгации источников естественного электромагнитного излучения в КНЧ-ОНЧ диапазоне.

1 Аппаратно-программный комплекс и методика наблюдений

1.1 Антенный комплекс

Для наблюдений за естественным электромагнитным излучением в диапазоне очень низких частот в Комплексном геофизическом стационаре «р. Карымшина» ($\phi = 52^0 49' \text{ N}, \quad \lambda = 158^0 07' \text{ E}$) ИКИР ДВО РАН, расположенном на полуострове Камчатка, в 1993 г. был установлен ОНЧ-регистратор с аналоговой обработкой сигнала [26]. В 2005 г. была проведена его модернизация, была подключена антенная система, состоящая из трёх взаимно-перпендикулярных

рамочных антенн и одной штыревой электрической антенны (рис. 1), что позволило определять направление прихода электромагнитного излучения. Две рамочные антенны, предназначенные для приёма магнитной составляющей электромагнитного поля, расположены вертикально и ориентированы плоскостью в направлении север-юг и восток-запад, третья горизонтально. Высота рамочных антенн $h = 4$ м, ширина $l = 8$ м, количество витков $N = 98$. Штыревая антенна длиной 2 м была закреплена на верхнем основании рамочных антенн. В центре антенной системы была установлена малая рамочная антенна, предназначенная для калибровки ОНЧ-пеленгатора по магнитной составляющей излучений. Вблизи нижнего основания антенн находились предварительные усилители, сигналы с которых поступали по кабельной линии связи длиной 200 м на блок повторителей напряжения и записывались на персональный компьютер через 16-bit звуковую плату Fast Track Ultra 8R с частотой дискретизации 44100 Гц. Затем сигналы по системе телеметрии поступали в центр обработки данных, где проводилась предварительная обработка и хранение информации. В силу ограниченности технологий, хранение данных до 2011 года было фрагментарным. После создания сетевого хранилища сохраняется непрерывный поток данных по настоящее время, позволяя проводить ретроспективный анализ. После обильных снегопадов в 2014 г. каркас рамочной антенны был повреждён и было принято решение о полной перестройке антенного комплекса. В 2016 г. в эксплуатацию была введена новая антенная система с установкой электрического несимметричного диполя отдельно от каркаса магнитных антенн. Система регистрации была сохранена без изменений. В 2020 г. была произведена модернизация системы регистрации, АЦП было заменено на промышленную L-CARD E-502, что позволило отказаться от кабельной линии связи и тем самым уменьшить уровень помех, отношение сигнал шум было увеличено в 2 раза. Также была увеличена частота дискретизации до 62.5 кГц.

Магнитные антенны расположены вертикально, плоскостью в направлении север-юг (PA1) и восток-запад (PA2), и имеют следующие параметры: высота антенн $h = 6$ м, ширина антенн $l = 8$ м, геометрическая площадь $S = 48$ м^2; количество витков $N = 98$, эффективная площадь антенн $S_{eff} = SN = 4704$ м^2, активное сопротивление постоянному току $R = 240$ Ом, индуктивность $L \simeq 0.276$ Гн, собственная емкость $C_m \simeq 5.5$ пФ.

Электрическая антенна. Для приёма электрической составляющей излучений применяется штыревая электрическая антенна (ЭА), которая включает в себя металлическое основание высотой $h_o = 2.3$ м, в верхней части которого находится изолятор, на который крепится штырь длиной $l_e = 8$ м. Общая высота штыревой антенны от верхней части штыря до его основания $l = 9$ м. Следовательно, действующая высота электрической антенны $h_E = l \cdot 0.5 = 4.5$ м.

Согласование электрической и магнитных антенн. С целью расширения частотного диапазона магнитных антенн и получения значений в рабочем диапазоне действующих высот антенн, слабо зависящих от частоты, выходы магнитных антенн зашунтированы сопротивлением $R_H = 1$ кОм.

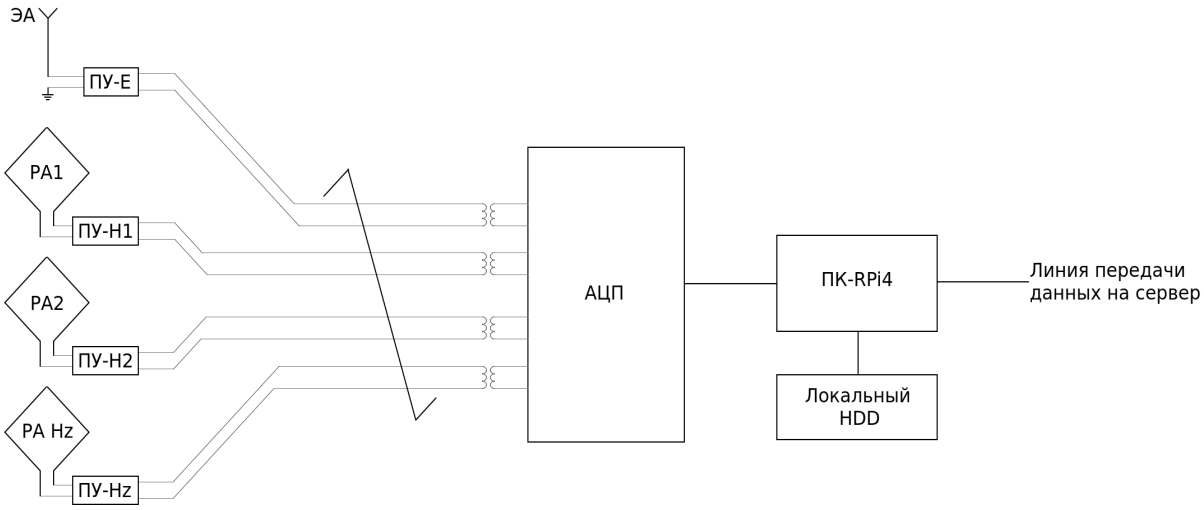


Рис. 1. Структурная схема ОНЧ-пеленгатора
Figure 1. Block diagram of the VLF direction finder

1.2 Усилители аналогового сигнала

Предварительные усилители (ПУ) по магнитной составляющей излучений собраны на прецизионных операционных усилителях *AD744(AD797)*. Первый каскад выполнен по несимметричной схеме. Во втором каскаде на микросхемах *OP37(OP27)* реализован фильтр Батерворта с частотой среза 10 кГц – подавлением 5 дБ на октаву. Таким образом рабочий диапазон предварительного усилителя составляет 300 Гц ÷ 18 кГц. Выходной каскад усилителя реализован на микросхеме *SSM2142*, которая формирует дифференциальный выход, что позволяет передать усиленный сигнал по витой паре на расстояние до 2 км. Благодаря используемым операционным усилителям коэффициенты передачи ПУ магнитных антенн совпадают до 10^{-4}.

Схемотехника предварительного усилителя электрической составляющей отличается наличием грозозащиты, реализованной парой диодов и неоновой лампой. Принципиальные схемы представлены на рис. 2.

1.3 Аналого-цифровая обработка сигнала и хранение данных

Для регистрации и хранения данных был разработан программный комплекс, включающий в себя клиентскую и серверную части. Сервер выполняет обработку потока данных, полученных с АЦП, по протоколу TCP и привязку к точному времени, которое определяется по сигналу модуля, подключенного к порту RS235 компьютера. Для обработки данных GPS/GLONAS-модуля на компьютере установлен NTP-сервер, позволяющий определять время с точностью до 1 мкс, что подтверждается данными Всемирной сети определения местоположения молний – World Wide Lightning Location Network (WWLLN).

Клиентская часть отвечает за формирование полноценного архива и его хранение.

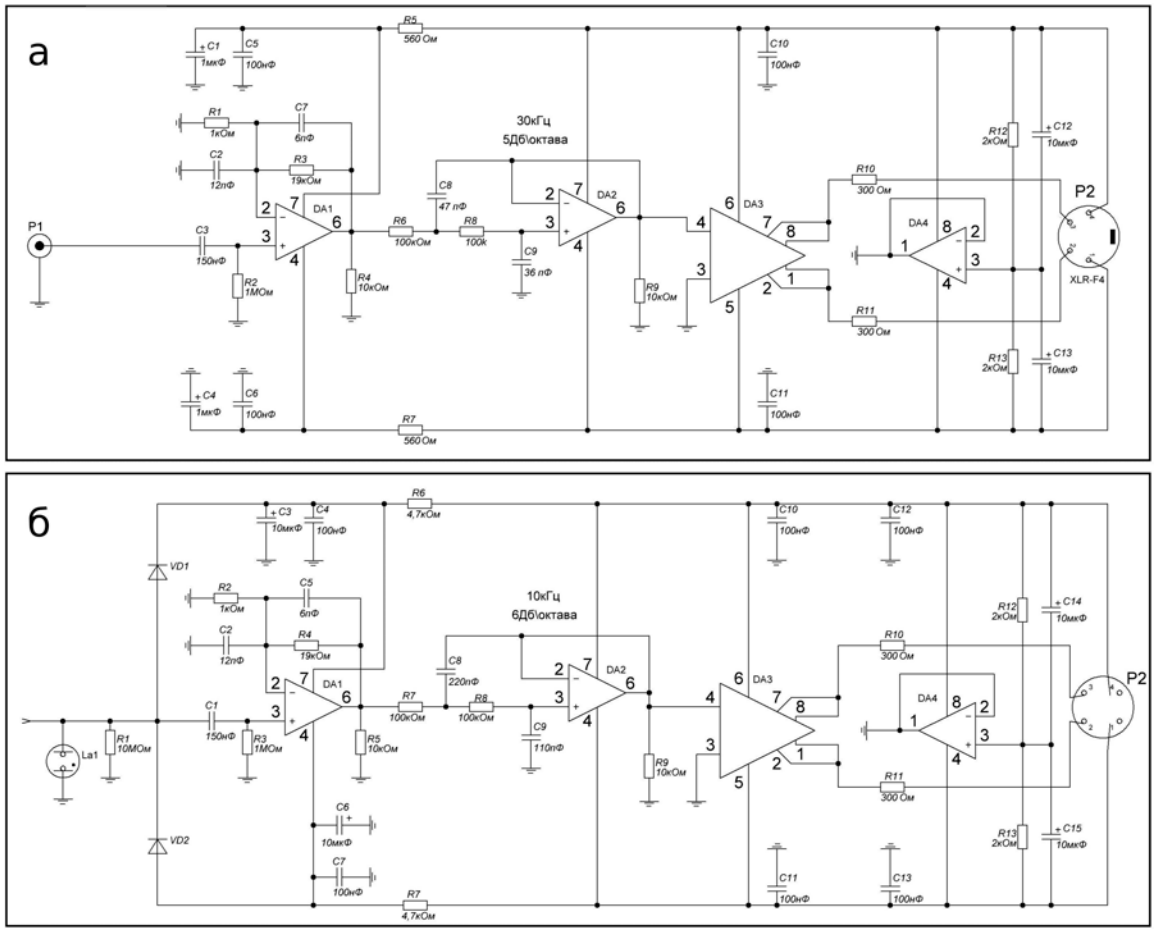


Рис. 2. Принципиальная схема предварительного усилителя рамочной антенны (а), и электрической антенны (б)

Figure 2. Schematic diagram of the preamplifier of the loop antenna (a) and the electric antenna (b)

Архив аппаратно выполнен на базе двух серверов Supermicro с четырьмя архивами, выполненными по схеме Raid10, общий объём которых составляет 100 ТБ. Клиентская часть представляет собой набор bash-скриптов для операционной системы Devuan (семейства Linux), осуществляющих контроль работоспособности комплекса, синхронизацию времени, сохранения кэша данных станции и их архивацию. На случай обрыва связи, в серверной части предусмотрено сохранение оцифрованных данных на локальный носитель. Данные, полученные клиентом, преобразовываются в wav-формат и сжимаются архиватором pbzip2. Данная процедура позволяет добиться до 60 % экономии места на носителях, при этом сформировать возвратный архив (архив без потерь).

1.4 Программный комплекс пеленгатора и методика анализа данных

Багодаря конструкции ОНЧ-пеленгатор способен регистрировать отдельные компоненты поля с привязкой к географическим направлениям. При этом, азимут

источника плоскополяризованной электромагнитной волны будет определяется по формуле $\varphi = \arctan(U_{ew}/U_{ns})$, где U_{ew} – значение напряжения, полученное с выхода усилителя рамочной антенны с направления восток-запад, U_{ns} – с направления север-юг. Устранение неоднозначности пеленга происходит путём учёта разности фаз между сигналами электрической и магнитными компонентами поля. Для определения азимута в среде MATLAB было реализовано два алгоритма. Первый позволяет в режиме реального времени определять азимут прихода электромагнитной волны с погрешностью до 5°. Второй требует значительных вычислительных ресурсов и не способен обрабатывать поток данных в реальном времени, но погрешность определения азимута снижается до 0.5°. Основной вклад в это значение вносит несимметричность антенн. Неортогональность антенн также вносит вклад в погрешность определения азимута, максимальное значение которого достигается при значениях азимутов $\Delta\alpha \pm k\frac{\pi}{2}$, $\Delta\alpha$ может быть представлена в следующем виде:

$$\Delta\alpha = (\widehat{n_1, n_2}) - \frac{\pi}{2}$$

где n_1, n_2 – нормали к плоскостям антенн.

При строительстве данная величина закладывалась в пределах 0.2°. По итогам приёмки данная величина оказалась менее 0.003°.

1.5 Методика определения азимута

Диаграмма направленности магнитной антенны, малой по сравнению с длиной волны (размеры антенны много меньше длины волны), представляет собой «восьмерку» (см. рис. 3).

Поэтому отношение амплитуд сигналов, полученных на этих антеннах будет определять величину тангенса угла ($\tan(\phi)$) прихода электромагнитной волны. В связи с этим точность определения амплитуд имеет первостепенное значение.

Преобразование параметров электромагнитного сигнала в цифровой можно описать следующим равенством: $U(t) = k_a \cdot k_p \cdot k_l \cdot k_q \cdot H(t)$, где $U(t)$ – мгновенное значение напряжения на входе АЦП, k_a – коэффициент передачи антенны, k_p – коэффициент передачи предварительного усилителя, k_l – коэффициент передачи аналоговой линии, k_q – коэффициент передачи при квантовании, $H(t)$ – мгновенное значение величины напряжённости магнитного поля. Учитывая коэффициенты передачи, получим:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{H_{ew}(t)}{H_{ns}(t)}\right) = \arctan\left(\frac{U_{ew}(t) \cdot k_{a\ ns} \cdot k_{p\ ns} \cdot k_{l\ ns} \cdot k_{q\ ns}}{U_{ns}(t) \cdot k_{a\ ew} \cdot k_{p\ ew} \cdot k_{l\ ew} \cdot k_{q\ we}}\right). \qquad (1)$$

Так как коэффициенты передачи не зависят от времени, их можно объединить в калибровочный коэффициент, который находится исходя из метода определения азимута и условия равенства магнитных компонент.

$$C = \frac{k_{a\ ns} \cdot k_{p\ ns} \cdot k_{l\ ns} \cdot k_{q\ ns}}{k_{a\ ew} \cdot k_{p\ ew} \cdot k_{l\ ew} \cdot k_{q\ we}}$$

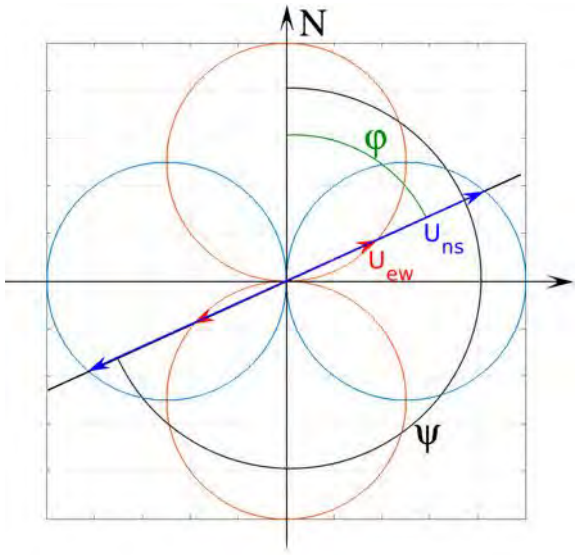


Рис. 3. Определение направления прихода волны по измерениям напряжений на выходах магнитных и электрической антенн, используя свойства их диаграмм направленности, N - север

Figure 3. Determination the direction of wave arrival by measuring the voltages at the outputs of magnetic and electric antennas using the properties of their radiation patterns, N - north

Поскольку угол ϕ может находиться в любой четверти (квадранте), то возникает неоднозначность в определении направления прихода волны, которая устраняется с помощью измерения напряжения на выходе электрической антенны U_e. В случае, если $sign(U_{ns} \cdot U_e) > 0$ и $sign(U_{ew}\ U_e) > 0$, то азимутальный угол прихода волны $\Psi = \phi$ находится в 1-ом квадранте (излучение приходит с азимутального направления, лежащего в диапазоне азимутальных углов от 0 до 90 град). Возможные варианты определения прихода волны представлены ниже:

$sign(U_{ns} \cdot U_e) = 1,\ sign(U_{ew} \cdot U_e) = 1 \qquad \psi = \phi + \phi_0 \qquad (0^\circ - 90^\circ)$

$sign(U_{ns} \cdot U_e) = -1,\ sign(U_{ew} \cdot U_e) = 1 \qquad \psi = 180^\circ - \phi + \phi_0 \quad (90^\circ - 180^\circ)$

$sign(U_{ns} \cdot U_e) = -1,\ sign(U_{ew} \cdot U_e) = -1 \quad \psi = 180^\circ + \phi + \phi_0 \quad (180^\circ - 270^\circ)$

$sign(U_{ns} \cdot U_e) = 1,\ sign(U_{ew} \cdot U_e) = -1 \qquad \psi = 360^\circ - \phi + \phi_0 \quad (270^\circ - 360^\circ)$

ϕ_0 – угол поворота антенн относительно географических направлений.

1.5.1 Амплитудный метод определения азимута

Амплитудный метод заключается в определении азимута по локальным амплитудным значениям полупериодов ОНЧ-сферика. Приведём пример вычисления азимута.

На рис. 4 представлен пример зарегистрированного атмосферика 20.12.2017 00:17:42.068. По данным WWLLN координаты разряда, источника сферика 21.4188° N, 152.2412° W. Определение наличия сигнала во временной выборке определяется превышением фона в 2 раза. Величина фона вычисляется, как семикратное значение среднеквадратичного отклонения. После определения временного интервала определяются локальные максимумы полупериодов ОНЧ-

сферика. В данном примере, можно выделить 6 значений, подставив которые в формулу (1) и, применив правила устранения неоднозначности, получим ряд значений $Az = \{106.3709°,\ 106.6559°, 107.6498°,\ 108.0114°,\ 108.4267°,\ 108.5596°\}$. Среднее медианное значение результирующего ряда $Az = 107.8306°$ и будет азимут прихода данного сферика. Решая прямую геодезическую задачу исходя из данных WWLLN истинный азимут источника составляет $Az = 110.004°$. Абсолютная погрешность измерения азимута $\Delta Az = 2.1734°$.

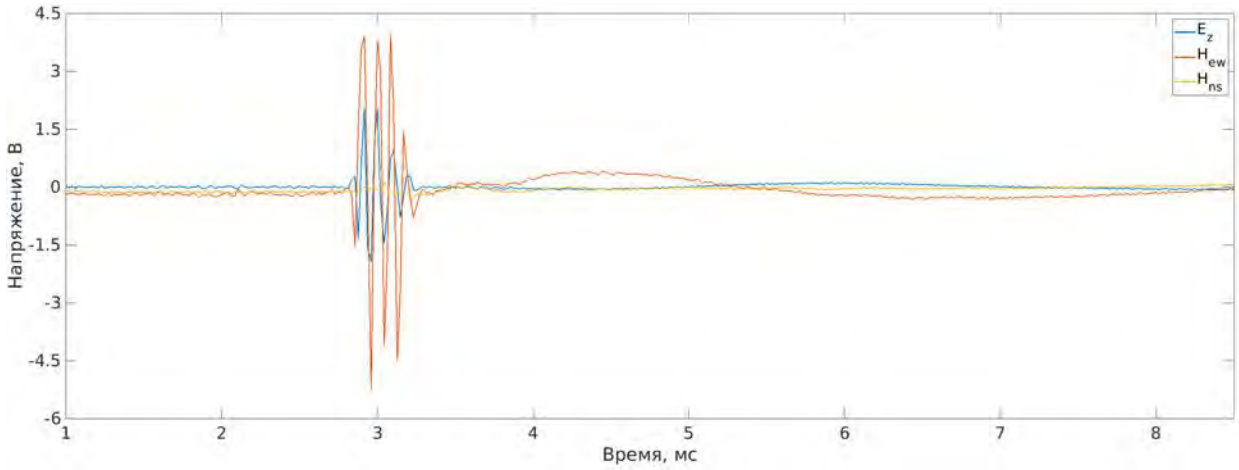


Рис. 4. Пример регистрации сигнала, пришедшего от грозового источника по волноводу Земля - ионосфера. H_{NS} (север - юг) и H_{EW} (восток - запад) - магнитные компоненты вектора H, $_Z$ - вертикальная электрическая компонента вектора E. Частота дискретизации - 48 кГц, время реализации 8.5 мс

Figure 4. An example of recording a signal coming from a lightning source via the Earth-ionosphere waveguide. H_{NS} (north-south) and H_{EW} (east -west) are the magnetic components of vector H, E_Z is the vertical electrical component of vector E. The sampling rate is 48 kHz, and the implementation time is 8.5 ms

При определении точности данного метода была использована контрольная выборка состоящая из $\sim 6 \cdot 10^7$ событий зарегистрированных с 01.01.2017 по 31.12.2017. Итоговая погрешность составила $\sim 3.5°$.

1.5.2 Спектральный метод определения азимута

Спектральный метод заключается в определении азимута исходя из значений спектральных компонент ОНЧ-сферика. При переходе к спектральным компонентам необходимо немного модифицировать формулу расчета азимута и критерии устранения неоднозначности.

$$\varphi(f) = \arctan\left(\frac{H_{ew}(f)}{H_{ns}(f)}\right) = \arctan\left(\frac{U_{ew}(f)}{U_{ns}(f)} \cdot C(f)\right)$$

где $C(f) = \dfrac{k_{a\ ns}(f) \cdot k_{p\ ns}(f) \cdot k_{l\ ns}(f) \cdot k_{q\ ns}}{k_{a\ ew}(f) \cdot k_{p\ ew}(f) \cdot k_{l\ ew}(f) \cdot k_{q\ we}}$, коэффициенты определяемые в ходе калибровочных измерений.

Поиск атмосфериков осуществляется на временной 15 минутной выборке, во всех каналах регистрации. Выбор интервала продиктован суточным изменением спектральной плотности мощности (СПМ) шума. Так как длительность сферика составляет во временном интервале от 0.5 до 10 мс, то для наибольшей точности определения азимута длина временного интервала выбрана по максимальной длительности сигнала, то есть 10 мс или 480 точек (при частоте дискретизации 48 кГц). Вычисления спектральной плотности мощности осуществляются с помощью оконного дискретного преобразования Фурье (ДПФ), с окном Чебышёва. Также для повышения точности в алгоритме применяется 95% перекрытие окна.

В результате преобразований получаем хронограмму СПМ. Величина СПМ шума для конкретной частоты определяется как среднее медианное значение. Бины (значение СПМ на определённой частоте в определённом интервале времени), относящиеся к сигналу, определяются по критерию превышения СПМ шума на 7 дБ. Совокупность бинов, относящихся к одной и той же временной метке, составляет спектр атмосферика. Отношение спектров атмосферика, полученных с магнитных антенн, образуют ряд азимутов, со средним количеством значений более 100. Это позволяет минимизировать случайную погрешность на порядок. Приведём расчет азимута источника сферика, приведенного на рис. 4.

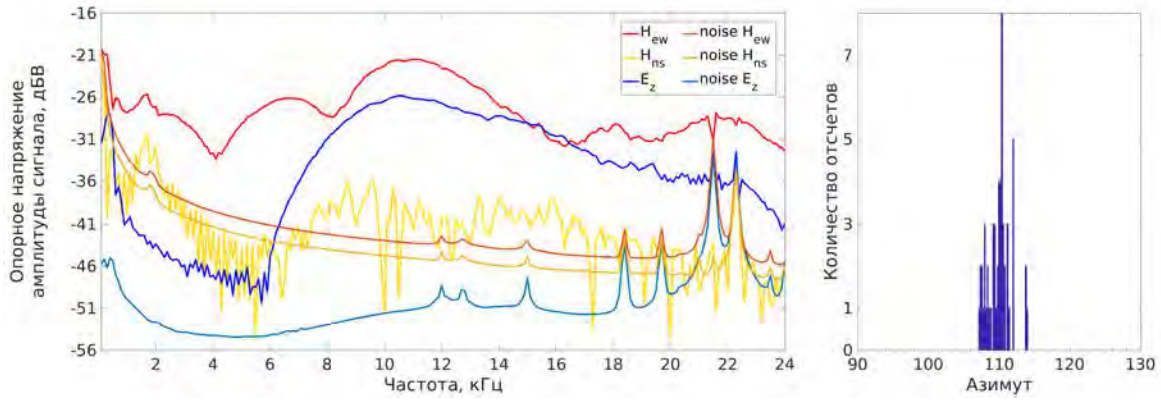


Рис. 5. Спектральная плотность мощности сигнала и шума по компонентам поля (слева); гистограмма азимутов вычисленных по частотам (справа)

Figure 5. Spectral density of signal and noise power by field components (left); histogram of azimuths calculated by frequencies (right)

Из приведённых на рис. 5 графиков видно, что не все точки удовлетворяют условию превышения шума. Если для компонент Восток-Запад магнитного поля и вертикальной электрической ему соответствуют 213 и 185 соответственно, то для компоненты Север-Юг лишь 54. Так как основным критерием выбора достоверных значений является превышение шума во всех каналах, то в расчет азимута войдут лишь эти 54 точки. Гистограмма, приведённая на рис. 5 показывает, что азимуты всех расчетных компонент находятся в диапазоне от 107.25° до 114.05°. Среднее медианное значение результирующего ряда $Az = 110.191^\circ$, абсолютная погрешность измерения азимута $\Delta Az = 0.187^\circ$.

Проверка на контрольной выборке показала, что погрешность данного метода составляет $\sim 0.2°$.

2 Калибровка ОНЧ–пеленгатора

Суть калибровки магнитных антенн заключается в том, чтобы навести одинаковый магнитный поток. Это возможно, если магнитный контур, выступающий в качестве эталонного источника, будет ориентирован под углом 45° к плоскостям антенн. Калибровочный контур состоит из одного витка диаметром $d = 1$ м, что позволяет пренебречь изменением резонансных характеристик самих антенн. Собственный резонанс калибровочного контура составляет ~ 100 кГц.

Вычисления калибровочных коэффициентов, входящих в расчёт, зависит от выбранной методики определения азимута источника. Для амплитудного метода на калибровочный виток в течение 15 мин. подаётся сигнал белого шума в диапазоне 30 Гц – 24 кГц. Количество мгновенных значений амплитуд составляет $\sim 4 \cdot 10^7$, что позволяет минимизировать случайную погрешность определения калибровочного коэффициента до $\sim 10^{-2}$.

Для спектрального метода на калибровочную антенну посредством цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) подаётся немодулированный монохроматический сигнал постоянной амплитуды. Длительность сигнала составляет 1 с. На протяжении часа, каждую секунду частота дискретно увеличивается от 5 Гц до 18 кГц с шагом 5 Гц.

В результате проведенной калибровки от 26.07.2023 были получены результаты, представленные на графиках рис. 6.

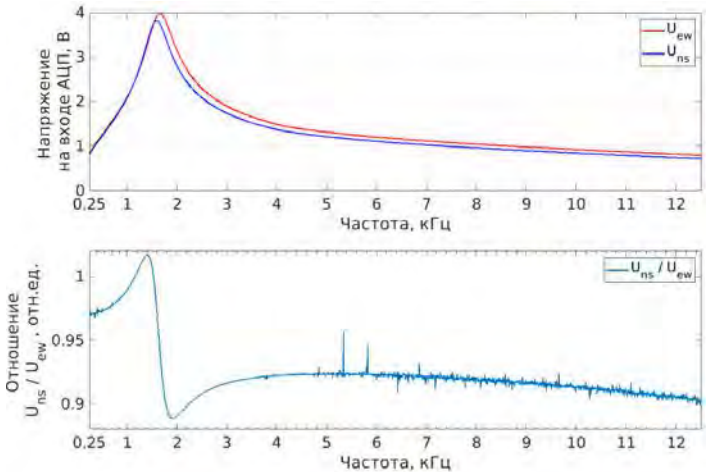


Рис. 6. Результаты калибровки 26.07.2023: вверху – АЧХ антенн; внизу – отношение коэффициентов передачи антенн

Figure 6. Calibration results on July 26, 2023: antenna amplitudefrequency response at the top; antenna transmission ratio at the bottom

Также результаты калибровки позволяют проверить фазировку антенн и величину поворота антенного комплекса относительно географических направлений, который возник из-за особенностей грунта в точке установки.

2.1 Проверка комплекса

Для проверки работоспособности комплекса выбран ряд реперных источников, одним из которых являются радиостанции точного времени РСДН 20, а в качестве нерегулярных источников выбраны грозовые разряды, лоцированные сетью WWLLN. Все данные по грозовым разрядам для удобства сведены в таблицу 1:

Таблица 1

Сведения о расчёте пеленга грозовых разрядов
Information about calculating the bearing of lightning discharges

Время	Долгота	Широта	Азимут геодезический	Азимут измеренный
18:07:35.468088	37.2179° с.ш.	133.6975° в.д.	237.2968°	236.9578°
18:07:35.717809	36.717° с.ш.	133.7047° в.д.	236.4838°	237.094°
18:10:49.334914	37.1318° с.ш.	133.7856° в.д.	237.019°	237.6311°
18:19:25.025042	37.9711° с.ш.	134.0605° в.д.	237.9813°	238.8637°

Нахождение азимута радиостанций.

Краткая характеристика системы точного времени, базирующейся на сети радиостанций РСДН-20 «Альфа».

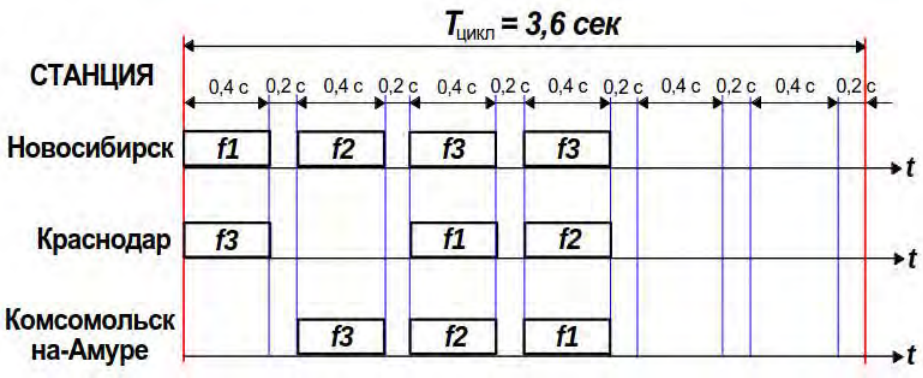


Рис. 7. Временные диаграммы сигналов РСДН-20 («Альфа»). $T_{цикл}$ - длительность последовательности сигналов; t - время; f_1, f_2, f_3 - частоты сигналов, равные 11.905, 12.649, 14.881 кГц, соответственно

Figure 7. Time diagrams of RSDN-20 (Alpha) signals. T_{cycle} is the duration of the signal sequence; t is the time; f_1, f_2, f_3 are the signal frequencies equal to 11.905, 12.649, 14.881 kHz, respectively

Система «Альфа» состоит из четырёх передатчиков (рис. 7), которые расположены в районах:

1. Новосибирск (55°45′31″ с. ш. 84°26′45″ в. д.),
2. Краснодар (45°24′12″ с. ш. 38°09′30″ в. д.),

3. Комсомольск-на-Амуре (п. Эльбан) (50°04′21″ с. ш. 136°36′34″ в. д.),
4. Ревда, Мурманская обл. (68°02′13″ с. ш. 34°40′43″ в. д.).

Структура пакета сигнала точного времени хорошо видна на примере спектрохронограмм, полученных 06.04.2017 22:41:15.215482 UTC (рис. 8) и 25.03.2024 17:05:49.280069 UTC (рис. 9).

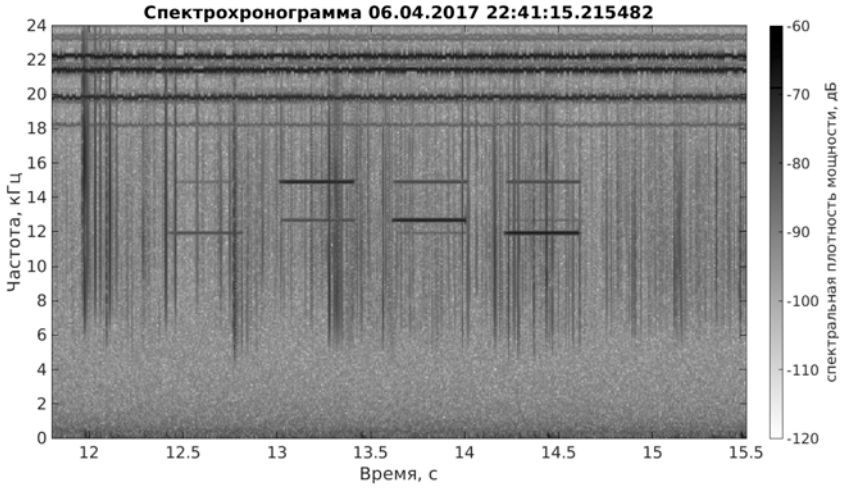


Рис. 8. Спектрохронограмма записи электрической компоненты, полученная 06.04.2017 22:41:15.215482 с помощью комплекса ОНЧ-пеленгатора

Figure 8. Spectro chronogram of the record of an electrical component, obtained on April 06, 2017 at 22:41:15.215482 UT using the VLF direction finder complex

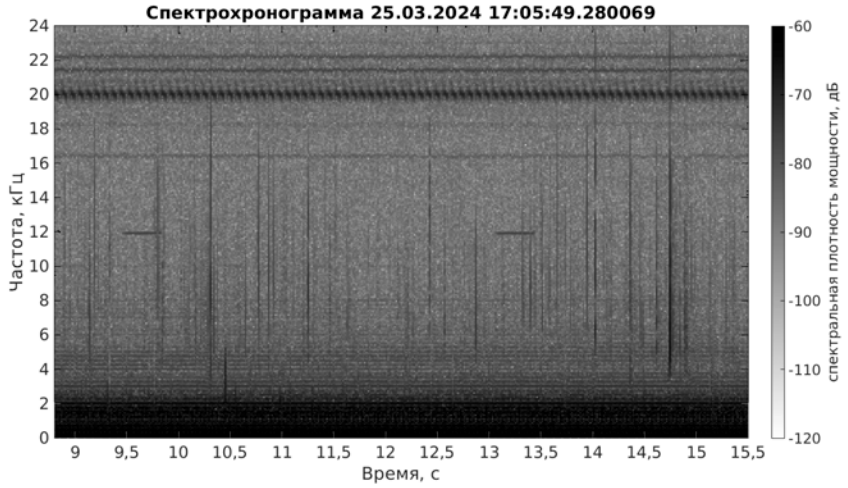


Рис. 9. Спектрохронограмма записи электрической компоненты полученная 25.03.2024 22:41:15.215482 с помощью комплекса ОНЧ-пеленгатора

Figure 9. Spectro chronogram of the record of an electrical component obtained on March 25, 2024 at 22:41:15.215482 UT using the VLF direction finder complex

Частота сигнала составляет 11.905 кГц (рис. 10) со средним отношением сигнал/шум 9.8 дБ, что говорит об удовлетворительном приёме сигнала, достаточном для выделении полезного сигнала на фоне шумов.

При помощи полосового фильтра выделен сигнал во всех компонентах поля, описанных в работе [25] и показанных на рис. 11.

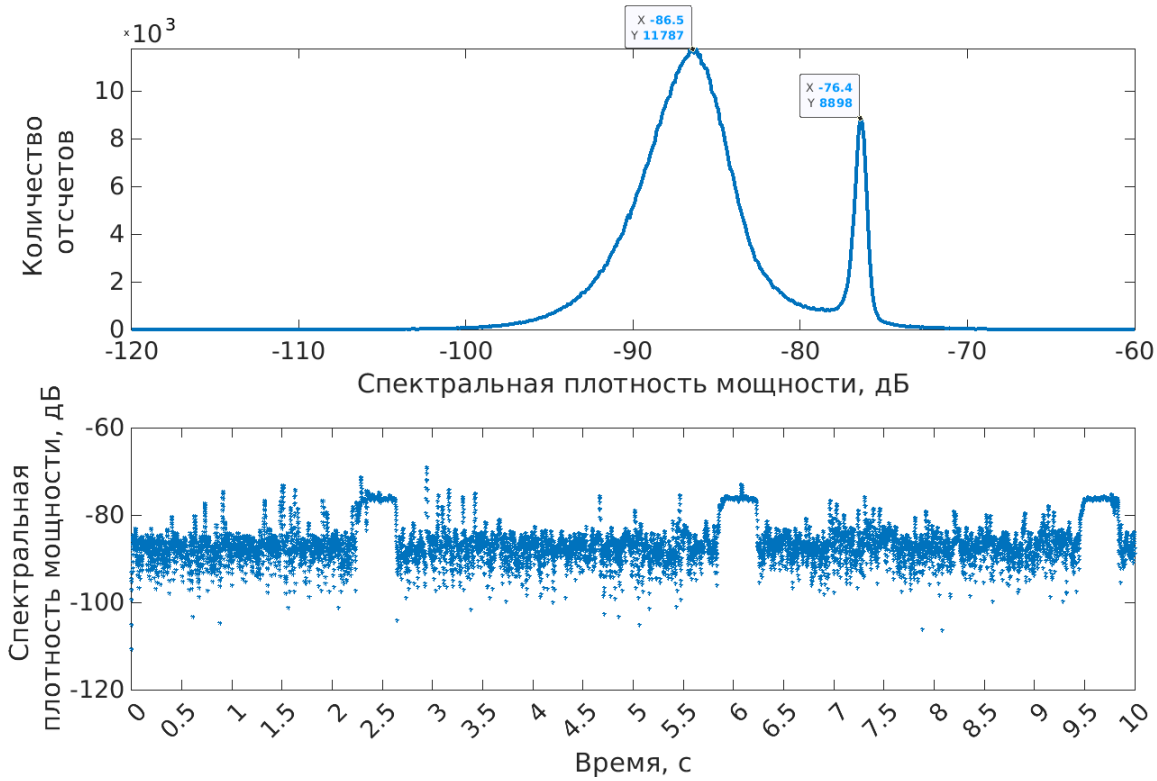


Рис. 10. Гистограмма распределения количества временных интервалов от спектральной плотности мощности на частоте 11.905 кГц (верх), зависимость спектральной плотности мощности от времени (низ)

Figure 10. Histogram of the distribution of the number of time intervals from the spectral power density at a frequency of 11.905 kHz (top), dependence of the spectral power density on time (bottom)

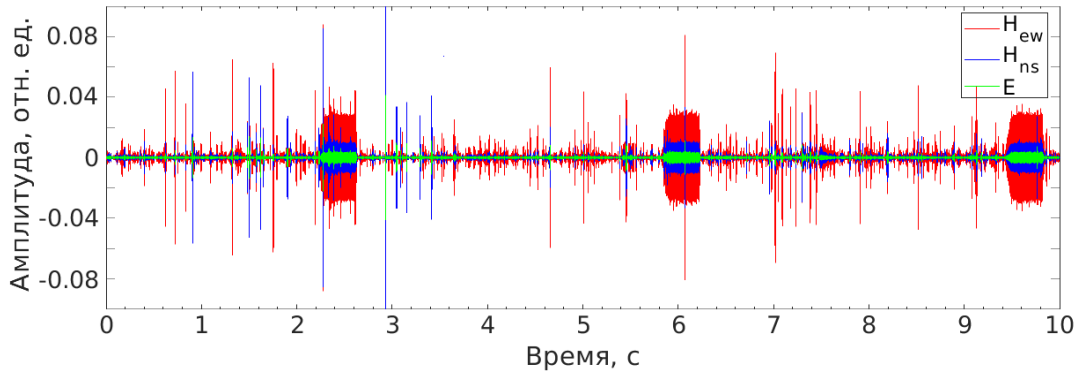


Рис. 11. Волновая форма сигналов компонент поля после применения полосового фильтра

Figure 11. Waveform of the field component signals after applying a bandpass filter

На рис. 12 показан азимут радиостанции по прямым вычислениям, который составляет 238.80°. С учетом поправки на поворот антенны получим 263.03°. Абсолютная погрешность составила +3.79°.

Столь высокой погрешности можно избежать, если принять поправку на степень поляризации сигнала, где угол φ необходимо вычислять по следующей формуле:

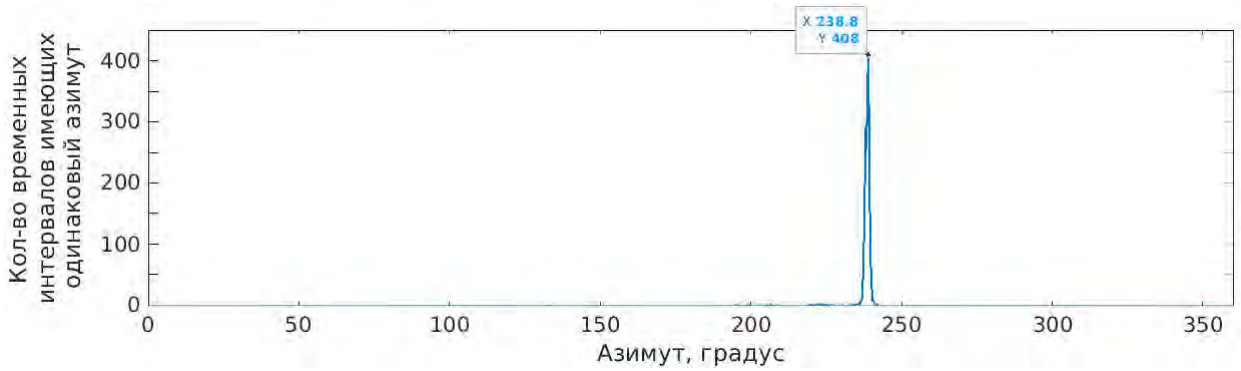


Рис. 12. Зависимость количества интервалов анализируемого ряда, содержащих сигнал, от азимутального угла

Figure 12. Dependence of the number of intervals of the analyzed series containing the signal on the azimuth angle

$$\varphi = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\frac{H_{ew}}{H_{ns}}\cos(\delta)}{1-(\frac{H_{ew}}{H_{ns}})^2} \tag{2}$$

где H_{ew}, H_{ns} — амплитуды сигналов в каналах ВЗ и СЮ, δ — сдвиг фазы между сигналами каналов.

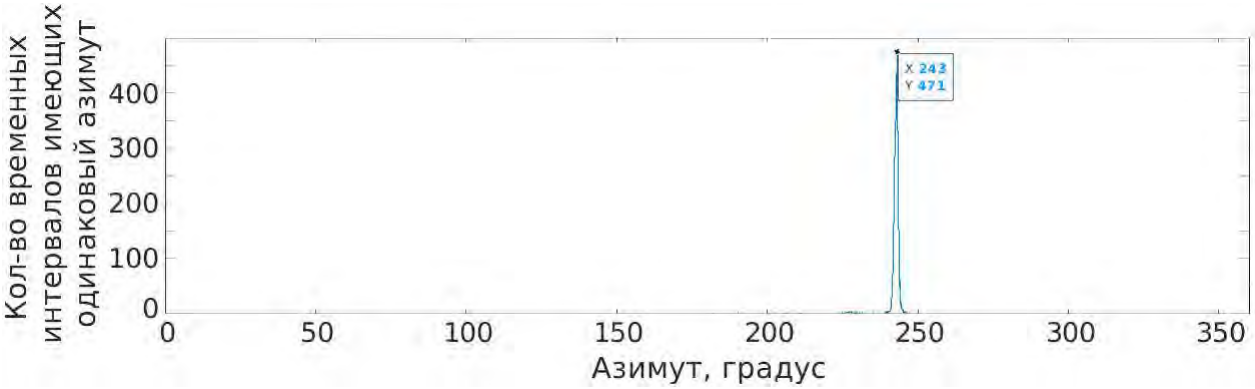


Рис. 13. Зависимость количества интервалов анализируемого ряда, содержащих сигнал, от азимутального угла, с учетом поправки на степень поляризации сигнала

Figure 13. Dependence of the number of intervals of the analyzed series containing the signal on the azimuth angle, taking into account the signal polarization degree

Согласно поправке (2) на эллиптическую поляризацию сигнала, азимут радиостанции составляет 243° с учетом поворота антенны получим 267.23° (рис. 13). Абсолютная погрешность при данном подходе составила -0.21°.

Заключение

В работе подробно описаны: антенный комплекс, методики определения азимута, калибровка и проверка комплекса. Дано описание разработанного метода определения азимута по спектральным компонентам электромагнитного сигнала. Особое внимание уделено проверке достоверности полученным данным.

В результате были синхронизированы базы данных, полученные с комплекса радионаблюдений WWLLN и ОНЧ-радиопеленгатора [25]. Спектральный метод определения азимута позволил уменьшить погрешность ранее используемого метода. В результате появилась возможность провести исследование связи атмосфериков и вистлеров с высотными электрическими разрядами грозовой активности метеорологического и вулканического происхождения. Результаты исследований с использованием полученных данных опубликованы в работах [14, 27].

Благодарности. Авторы выражает благодарность и признательность сотрудникам Лаборатории электромагнитных излучений и Группы информационных технологий ИКИР ДВО РАН Дмитрию Викторовичу Санникову, Александру Владимировичу Кайсину, Ивану Евгеньевичу Стасию, Аркадию Вениаминовичу Иванову, Ивану Владимировичу Жидкову – всем, кто поддерживал и помогал, обеспечивая непрерывную функциональность технических комплексов, экспериментальных установок, оказывая помощь в написании специализированных научных компьютерных программ и программ общего назначения, обеспечении передачи данных, поддержке всех информационных систем в рабочем состоянии. Особую благодарность авторы выражают к.ф.-м.н. Нине Володаровне Черневой за подготовку статьи к печати и ценные замечания.

Аббревиатуры

ОНЧ	Очень Низкие Частоты
АЦП	Аналого-Цифровой Преобразователь
ЭА	Электрическая Антенна
ПУ	Предварительный Усилитель
WWLLN	World Wide Lightning Location Network (Всемирная сеть определения местоположения молний)
СПМ	Спектральная Плотность Мощности
ЦАП	Цифро-Аналоговый Преобразователь

Список литературы

1. Альперт Я. Л. *Распространение электромагничных волн и ионосфера.* М.: Наука, 1972. 564 с.
2. Александров М. С. и др. *Флуктуации электромагнитного поля Земли в диапазоне СНЧ.* М.: Наука, 1972. 195 с.
3. Распопов О. М., Клейменова Н. Г. *Возмущения электромагнитного поля Земли: в 3 ч. Часть 3. ОНЧ-излучения.* Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1977. 144 с.
4. Дружин Г. И., Чернева Н. В., Мельников А. Н. Гроза в районе полуострова Камчатка по данным наблюдений за ОНЧ-излучением // Метеорология и гидрология, 2011. Т. 7, С. 32–39.
5. Дэвис К. *Радиоволны в ионосфере.* М.: Мир, 1973. 504 с.
6. Storey L. R. O. An investigation of whistling atmospherics // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1953. vol. 246, no. 908, pp. 113-141 https://doi.org/10.1098/rsta.1953.0011.

7. Угаров В. А., Гершман Б. Н. Распространение и генерация низкочастотных электромагнитных волн в верхней атмосфере // Успехи физических наук, 1960. Т. 72, №10, С. 235-271 https://doi.org/10.3367/UFNr.0072.196010c.02355.

8. Collier A. B., Bremner S., Lichtenberger J., Downs J. R., Rodger C. J., Steinbach P., McDowell G. Global lightning distribution andwhistlers observed at dunedin, new zealand // Annales Geophysicae, 2010. vol. 28, no. 2, pp. 499–513 https://doi.org/10.5194/angeo-28-499-2010.

9. Behnke S. A., Thomas, R. J., Krehbiel P. R., McNutt S. R. Spectacular lightning revealed in 2009 Mount Redoubt eruption // Eos, Transactions American Geophysical Union, 2012. vol. 93, no. 20, pp. 193–194 https://doi.org/10.1029/2012EO200001.

10. Behnke S. A., Thomas, R. J., McNutt S. R., Schneider D. J, Krehbiel P. R, Rison William, Edens H. E. Observations of volcanic lightning during the 2009 eruption of redoubt volcano // Journal of Volcanology and Geothermal Research, 2013. vol. 259, pp. 214–234 https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2011.12.010.

11. Behnke S. A., McNutt S. R. Using lightning observations as a volcanic eruption monitoring tool // Bull. Volcanol, 2014. vol. 76, pp. 847 https://doi.org/10.1007/s00445-014-0847-1.

12. Antel C., Collier A. B., Lichtenberger J., Rodger C. J. Investigating Dunedin whistlers using volcanic lightning // Geophysical Research Letters, 2014. vol. 41, no. 13, pp. 4420-4426 https://doi.org/10.1002/2014GL060332.

13. Shevtsov B. M, Firstov P. P., Cherneva N. V., Holzworth R. H., Akbashev R. R. Lightning and electrical activity during the Shiveluch volcano eruption on 16 November 2014 // Natural Hazards and Earth System Sciences, 2016. vol. 16, no. 3, pp. 871–874 https://doi.org/10.5194/nhess-16-871-201.

14. Malkin E. I., Shevtsov B. M., Cherneva N. V., Kazakov E. A., Lichtenberger J. High-Altitude Discharges and Whistlers of Volcanic Thunderstorms // Atmosphere, 2024. vol. 15, pp. 1503 https://doi.org/10.3390/atmos15121503.

15. Кононов И. И., Петренко И. А., Снегуров В. С. *Радиотехнические методы местоопределения грозовых очагов*. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1986.

16. Козлов В. И., Маркова А. Ю., Шабаганова С. Н. Погрешности методов наблюдения грозовых разрядов одно- и двухпунктовыми системами грозолокации // Наука и образование, 2010. Т. 1, С. 7–12.

17. Дружин Г. И., Козлов В. И., Лаптев А. Д., Муллаяров В. А. Измерение углов прихода квазигармонических ОНЧ-сигналов // Геомагнетизм и аэрономия, 1988. Т. 28, №1, С. 164-168.

18. Козлов В. И., Муллаяров В. А., Каримов Р. Р. Инструментальные наблюдения гроз в Якутии в 2003–2006 годах // Известия вузов. Радиофизика, 2008. Т. LI, №10, С. 825–829.

19. Козлов В. И., Муллаяров В. А., Каримов Р. Р. Пространственное распределение плотности грозовых разрядов на Востоке России по данным дистанционных наблюдений // Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2011. Т. 8, С. 257-262.

20. Капустина О. В., Дружин Г. И., Никифоров В. Е. Передвижной комплекс регистрации низкочастотных электромагнитных волн // Электромагнитные волны и электронные системы, 2024. Т. 29, С. 76–81.

21. Rodger C. J., Werner S., Brundell J. B., Lay E. H., Thomson N. R., Holzworth R. H., Dowden R. L. Detection efficiency of the VLF World-Wide Lightning Location Network (WWLLN): initial case study // Annales Geophysicae, 2006. vol. 24, no. 12, pp. 3197–3214, https://doi.org/10.5194/angeo-24-3197-2006.

22. Козлов В. И., Муллаяров В. А., Тарабукина Л. Д., Торопов А. А. Временной интервал между ОНЧ- и КНЧ-радиоимпульсами разрядовой молнии // Вестник Якутского государственного университета, 2009. Т. 6, С. 13-18.

23. Abarca Sergio F., Corbosiero Kristen L., Galarneau Thomas J. An evaluation of the Worldwide Lightning Location Network (WWLLN) using the National Lightning Detection Network (NLDN) as ground truth // Journal of Geophysical Research: Atmospheres, 2010. vol. 115 https://doi.org/10.1029/2009JD013411.

24. Hutchins M. L., Jacobson Abram R., Holzworth Robert H., Brundell James B. Azimuthal dependence of VLF propagation // Journal of Geophysical Research: Space Physics, 2013. vol. 118, pp. 5808-5812 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-27-2-95-104.

25. Дружин Г. И., Пухов В. М., Санников Д. В., Малкин Е.И. ОНЧ-пеленгатор грозовых разрядов // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2019. Т. 27, №2, С. 95–104 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-27-2-95-104.

26. Дружин Г. И., Пухов В. М., Санников Д. В., Малкин Е.И. ОНЧ-регистратор грозовых разрядов // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2019. Т. 27, №2, С. 105–116 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-27-2-105-1164.

27. Akbashev R. R., Malkin E. I., Cherneva N. V. A Characteristic Electrostatic Structure of Eruptive Plumes Emitted by Large Explosive Eruptions of Shiveluch and Bezymianny Volcanoes, Kamchatka // Journal of Volcanology and Seismology, 2024. no. 2 (11), pp. 323–339 https://doi.org/10.1134/S0742046324700672.

Информация об авторах

Малкин Евгений Ильич✉ – научный сотрудник Лаборатории электромагнитных излучений Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-8037-1335.

Дружин Геннадий Иванович✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Лаборатории электромагнитных излучений Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-1009-1044.

References

[1] Alpert J. L. Propagation of electromagnetic waves and ionosphere. M.:«Nauka», 1972 (in Russian).

[2] Alexandrov M. S. and et. al. Fluctuations of the Earth's electromagnetic field in the ULF range. M.:«Nauka», 1972 (in Russian).

[3] Raspopov O.M. Kleimenova N.G. Disturbances of the Earth's electromagnetic field: at 3 a.m. Part 3. VLF radiation. L.:«Publishing House of Leningrad University», 1977 (in Russian).

[4] Druzhin G. I. Cherneva N. V. Melnikov A. N. Thunderstorm in the kamchatka peninsula area according to observations of vlf radiation. Meteorology and hydrology, 7:32–39, 2011 (in Russian).

[5] Davis K. Radio waves in the ionosphere. M.:«Mir», 1973 (in Russian).

[6] Storey L. R. O. An investigation of whistling atmospherics. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 246(908):113–141, 1953.

[7] Gershman B. N., Ugarov V. A. Propagation and generation of low- frequency electromagnetic waves in the upper atmosphere. UFN, 72(10):235–271, 1960 (in Russian).

[8] Collier A. B., Bremner S., Lichtenberger J., Downs J. R., Rodger C. J., Steinbach P., McDowell G. Global lightning distribution and whistlers observed at dunedin, new zealand. Annales Geophysicae, 28(2):499–513, 2010.

[9] Behnke S. A., Thomas R. J., Krehbiel P. R., McNutt S. R. Spectacular lightning revealed in 2009 mount redoubt eruption. Eos, Transactions American Geophysical Union, 93(20):193194, 2012.

[10] Behnke S. A., Thomas R. J., McNutt S. R, Schneider D. J., Krehbiel P. R., Rison W., Edens H. E. Observations of volcanic lightning during the 2009 eruption of redoubt volcano. Journal of Volcanology and Geothermal Research, 259:214–234, 2013.

[11] Behnke S. A., McNutt S. R. Using lightning observations as a volcanic eruption monitoring tool. Bull. Volcanol, 76:847, 2014.

[12] Antel C., Collier A. B., Lichtenberger J., Craig J. Rodger. Investigating dunedin whistlers using volcanic lightning Geophysical Research Letters, 41(13):4420–4426, 2014.

[13] Shevtsov B. M., Firstov P. P., Cherneva N. V., Holzworth R. H., and Akbashev R. R. Lightning and electrical activity during the shiveluch volcano eruption on 16 november 2014. Natural Hazards and Earth System Sciences, 16(3):871–874, 2016.

[14] Malkin E. I., Shevtsov B. M., Cherneva N. V., Kazakov E. A., Lichtenberger J. High-Altitude Discharges and Whistlers of Volcanic Thunderstorms // Atmosphere, 2024, vol. 15, pp. 1503. DOI: 10.3390/atmos15121503.

[15] Kononov I. I., Petrenko I. A., Snegurov V. S. Radiotekhnicheskiye metody mestoopredeleniya grozovykh ochagov. Leningrad: «Gidrometeoizdat». 1986 (In Russian).

[16] Kozlov V. I., Markova A. Yu., Shabaganova S. N. Pogreshnosti metodov nablyudeniya grozovykh razryadov odno- i dvukhpunktovymi sistemami grozolokatsii, Nauka i obrazovaniye, 2010, vol.1, pp. 7–12 (In Russian).

[17] Druzhin G. I., Kozlov V. I., Laptev A. D., Mullayarov V. A. Izmereniye uglov prikhoda kvazigarmonicheskikh ONCh-signalov, Geomagnetizm i aeronomiya, 1988, vol. 28, no. 1, pp. 164-168 (In Russian).

[18] Kozlov V. I., Mullayarov V. A., Karimov R. R. Instrumentalnyye nablyudeniya groz v Yakutii v 2003–2006 godakh, Izvestiya vuzov. Radiofizika, 2008, vol. LI, no. 10, pp. 825–829 (In Russian).

[19] Kozlov V. I., Mullayarov V. A., Karimov R. R. Prostranstvennoye raspredeleniye plotnosti grozovykh razryadov na Vostoke Rossii po dannym distantsionnykh nablyudeniy. Sovremennyye problemy distantsionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa, 2011, vol. 8, no. 3, pp. 257-262 (In Russian).
[20] Kapustina O. V., Druzhin G. I., Nikiforov V. E. Peredvizhnoy kompleks registratsii nizkochastotnykh elektromagnitnykh voln, Elektromagnitnyye volny i elektronnyye sistemy, 2024, vol. 29, pp. 76–81 (In Russian).
[21] Rodger C. J., Werner S., Brundell J. B., Lay E. H., Thomson N. R., Holzworth R. H., Dowden R. L. Detection efficiency of the VLF World-Wide Lightning Location Network (WWLLN): initial case study, Annales Geophysicae, 2006, vol. 24, no. 12, pp. 3197–3214.
[22] Kozlov V. I., Mullayarov V. A., Tarabukina L. D., Toropov A. A. Vremennoy interval mezhdu ONCh- i KNCh-radioimpulsami razryadovoy molnii, Vestnik Yakutskogo gosudarstvennogo universiteta, 2009, vol. 6, pp. 13-18 (In Russian).
[23] Abarca S. F., Corbosiero K. L., Galarneau T. J. An evaluation of the Worldwide Lightning Location Network (WWLLN) using the National Lightning Detection Network (NLDN) as ground truth, Journal of Geophysical Research: Atmospheres, 2010, vol. 115.
[24] Hutchins M. L., A. R. Jacobson R. H. Holzworth, Brundell J. B., Azimuthal dependence of VLF propagation, J. Geophys. Res. Space Physics, 2013, vol. 118, pp. 5808–5812. DOI: 10.1002/jgra.50533.
[25] Druzhin G. I., Pukhov V. M., Sannikov D. V., Malkin E. I. ONCh-pelengator grozovykh razryadov, Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki., 2019, vol.27 (2), pp. 95-104.
[26] Druzhin G.I., Pukhov V.M., Sannikov D.V., Malkin E.I., Stasiy I.E. VLF– recorder for the study of natural radio emission, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2019, vol.27 (2), pp. 105-116.
[27] Akbashev R. R., Malkin E. I., Cherneva N. V. A Characteristic Electrostatic Structure of Eruptive Plumes Emitted by Large Explosive Eruptions of Shiveluch and Bezymianny Volcanoes, Kamchatka. J. Volcanolog. Seismol, 2024, vol. 18, pp. 323-339.

Information about the authors

Malkin Evgeny Ilyich ✉ – Researcher at the Laboratory of Electromagnetic Radiation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0001-8037-1335.

Druzhin Gennady Ivanovich✉ – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher at the Laboratory of Electromagnetic Radiation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1009-1044.

ВЕСТНИК КРАУНЦ
(Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»)
Физико-математические науки
2025. Т. 51. № 2

Главный редактор Ю.В. Марапулец
Редактор, технический редактор Р.И. Паровик
Компьютерная верстка LaTex Р.И. Паровик
Макет обложки CorelDRAW И.Р. Бондарева

Учредители: ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»
Адрес учредителей, редакции и издательства:
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7
Тел. (4153) 133-193, parovik@krasec.ru, feshchenko@krasec.ru, www.ikir.ru
683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
Тел. (4152) 427-078, parovik@krasec.ru, www.kamgu.ru

Подписано в печать 21.11.2025. Дата выхода в свет 24.11.2025 Формат 60x84/8.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 16,36. Тираж 500 экз. Заказ № 1919.

Отпечатано
Отпечатано в типографии «МЕДИАМИР».
664043, Иркутская область, Иркутский р-н, Маркова, ул. Медовая, 1/1-10

Издательство «Камчатпресс».
683017, г. Петропавловск-Камчатский,ул. Кроноцкая, 12а
www.kamchatpress.com

Bulletin KRASEC
(Kamchatka Regional Association «Scientific-Education Centre»)
Physical and Mathematical Sciences
2025. vol. 51. no. 2

Editor-in-Chief Yu. V. Marapulets
Technical Editor R.I. Parovik
Computer Makeup LaTex R.I. Parovik
Cover Mockup CorelDRAW I.R. Bondareva

Establishers: Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Vitus Bering Kamchatka State University
Address of establishers, editors office and publisher's house:
684034, Kamchatskiy kray, v. Paratunka, Mirnaya St., 7
Phone (4153) 133-193, parovik@krasec.ru, feshchenko@krasec.ru, www.kamgu.ru
683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya St., 4
Phone (4152) 427-078, parovik@krasec.ru, www.kamgu.ru
Signed to print 21.11.2025. Imprint day 24.11.2025. Format 60x84/8
Offset paper. Digital printing. Font «Times New Roman»
Conv. printer's sheet 16,36. Editons 500 copies. Order № 1919.

Printed
Printed at the «MEDIAMIR» printing house.
664043, Irkutsk region, Irkutsky district, Markova, Medovaya st., 1/1-10

Kamchatpress Publishing House.
683017, Petropavlovsk-Kamchatsky, Kronotskaya St., 12a
www.kamchatpress.com

Vestnik KRAUNTs Fiziko-matematicheskie nauki
2025. Vol. 51. no. 2