



## Многомасштабная модель геодинamo: сопряжение крупномасштабной и мелкомасштабной подмоделей

*Г. М. Водинчар\**, *Л. К. Феценко*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
ул. Мирная, 7, с. Паратунка, Камчатский край, 684034

**Аннотация.** Формирование главного геомагнитного поля обеспечивается работой механизма гидромагнитного динамо — генерации магнитного поля движением проводящей среды. Динамо Земли (геодинамо) управляется конвекцией жидкого металла во внешнем ядре Земли. Этот механизм принципиально нелинейный и трехмерный, поэтому решение уравнений геодинamo возможно только численно. Конвекция в ядре носит характер развитой турбулентности и прямое численное решение с разрешением всех турбулентных масштабов невозможно даже на высокопроизводительных вычислительных системах. Один из выходов — разделение масштабов на крупные и мелкие. На крупных масштабах решаются уравнения геодинamo подходящим численным методом, но с использованием турбулентных значений диффузионных коэффициентов. Эти значения являются свойствами не среды, а потока, поэтому должны вычислять на основе мелкомасштабных движений. Мелкомасштабную динамику можно описывать каскадной моделью магнитогиродинамической конвекции. Соединение двух таких моделей образует многомасштабную модель геодинamo. В работе получены уравнения комплексной каскадной модели магнитогиродинамической конвекции, которые удовлетворяют в бездиссипативном пределе законам сохранения: энергии, перекрестной и магнитной спиральности, энергии температурных пульсаций. Коэффициенты модели согласованы с вероятностями взаимодействия масштабных оболочек. Описывается схема соединения крупномасштабной спектральной модели геодинamo и каскадной модели турбулентной конвекции, которые обмениваются между собой информацией. Спектральная модель определяет значения фазовых переменных наибольших масштабов в каскадной модели. Турбулентные значения диффузионных коэффициентов для спектральной модели вычисляются по фазовым переменным каскадной модели. Получены явные выражения для расчета параметров одной модели по фазовым переменным другой.

*Ключевые слова:* геодинamo, геомагнитное поле, маломодовые модели, спектральные модели, каскадные модели турбулентности, многомасштабные модели

Получение: 12.11.2025; Исправление: 26.11.2025; Принятие: 28.11.2025; Публикация онлайн: 29.11.2025

**Для цитирования.** Водинчар Г.М., Феценко Л.К. Многомасштабная модель геодинamo: сопряжение крупномасштабной и мелкомасштабной подмоделей // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 53. № 4. С. 29-44. EDN: UKRQVI. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-29-44>.

**Финансирование.** Исследование выполнено по Государственному заданию ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2).

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

\***Корреспонденция:**  E-mail: [gvodinchar@ikir.ru](mailto:gvodinchar@ikir.ru)

Контент публикуется на условиях *Creative Commons Attribution 4.0 International License*



© Водинчар Г. М., Феценко Л. К., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)



## Multiscale Geodynamo Model: Coupling Large-Scale and Small-Scale Submodels

*G. M. Vodinchar\**, *L. K. Feshchenko*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,  
Mirnaya Str., 7, Paratunka, Kamchatka region, 683003, Russia

**Abstract.** The formation of the main geomagnetic field is ensured by the hydromagnetic dynamo mechanism — the generation of a magnetic field by the movement of a conducting medium. The Earth's dynamo (geodynamo) is driven by the convection of liquid metal in the Earth's outer core. This mechanism is fundamentally nonlinear and three-dimensional, so solving the geodynamo equations is only possible numerically. Convection in the core is characterized by developed turbulence, and a direct numerical solution with resolution of all turbulent scales is impossible even on high-performance computing systems. One solution is to separate scales into large and small. At large scales, the geodynamo equations are solved using a suitable numerical method, but using turbulent values of the diffusion coefficients. These values are properties of the flow, not the medium, and therefore must be calculated based on small-scale movements. Small-scale dynamics can be described by a shell model of magneto convection. Combining two such models forms a multiscale geodynamo model. This paper derives equations for a complex shell model of magneto convection that satisfy the conservation laws of energy, cross-helicity, magnetic helicity, and temperature fluctuation energy in the dissipation-free limit. The model coefficients are consistent with the probabilities of interaction between scale shells. A scheme is described for coupling a large-scale spectral model of the geodynamo and a shell model of turbulent convection, which exchange information with each other. The spectral model determines the values of the phase variables of the largest scales in the shell model. Turbulent values of the diffusion coefficients for the spectral model are calculated from the phase variables of the shell model. Explicit expressions are obtained for calculating the parameters of one model from the phase variables of the other.

*Key words:* geodynamo, geomagnetic field, low-mode models, spectral models, shell models of turbulence, multiscale models.


Received: 12.11.2025; Revised: 26.11.2025; Accepted: 28.11.2025; First online: 29.11.2025

**For citation.** Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Multiscale geodynamo model: coupling large-scale and small-scale submodels. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, 53: 4, 29-44. EDN: UKRQBI. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-29-44>.

**Funding.** The study was carried out under the State Subject of IKIR FEB RAS (reg. № 124012300245-2).

**Competing interests.** There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

\*Correspondence:  E-mail: [gvodinchar@ikir.ru](mailto:gvodinchar@ikir.ru)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Vodinchar G. M., Feshchenko L. K., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)



## Введение

Главное геомагнитное поле формируется действием механизма гидромагнитного динамо, когда движение проводящей среды (жидкого металла во внешнем ядре Земли) приводит к формированию магнитного поля [1]. Источником движения в ядре является тепловая и/или концентрационная конвекция. Важную роль играет вращение, поскольку кориолисов снос конвективных течений создает трехмерные движения со сложной геометрией, необходимые для работы динамо.

С математической точки зрения задача динамо в ядре Земли (геодинамо) заключается в решении системы уравнений магнитогидродинамической (МГД) конвекции несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат в сферической оболочке [2, 3]. Эта система включает в себя уравнения Навье-Стокса для несжимаемой среды, уравнения температуропроводности, уравнение индукции в приближении МГД, а также условие соленидальности поля магнитной индукции.

Конвекция в жидком ядре Земли носит характер развитой турбулентности. Это видно из оценки числа Рейнольдса  $Re \sim 10^8$  по значению молекулярной кинематической вязкости  $\nu^M = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, характерной скорости  $U_{WD} = 10^{-4}$  м/с (оценка по скорости западного дрейфа геомагнитного поля), характерного размера (радиуса) ядра Земли  $l_c = 3.48 \times 10^6$  м [1, 2].

Прямое численное моделирование таких трехмерных нестационарных потоков с разрешением всех турбулентных масштабов невозможно. Однако можно ограничиться описанием относительно крупномасштабных течений, используя подходы среднего поля. Но тогда возникает вопрос о турбулентных значениях вязкости, магнитной вязкости и температуропроводности, которые являются свойствами не среды, а потока. Также стоит вопрос об интенсивности  $\alpha$ -эффекта, играющего ключевую роль в магнитогидродинамике средних полей [4].

Один из возможных подходов к решению этих задач заключается в разбиении на две масштабные области — крупные и мелкие масштабы. Граница между этими масштабами условна и определяется в конечном счете вычислительными возможностями для прямого численного решения уравнений геодинамо, хотя теоретически она, вероятно, совпадает с верхней границей инерционного интервала турбулентности.

Крупномасштабные процессы описываются тогда с помощью уравнений средних полей и их решений сеточными, спектральными (проеекционными) или комбинированными сеточно-спектральными методами. Геометрическую структуру полей геодинамо на мелких масштабах (подсеточных, в случае использования разностных методов) можно не вычислять, гораздо важнее описать перенос энергии между крупными и мелкими масштабами. Это можно сделать с помощью каскадной модели МГД конвекции. Такие две модели необходимо соединить между собой на масштабах, которые являются самыми мелкими в крупномасштабной модели и самыми крупными в каскадной. Сопряжение крупномасштабных моделей с каскадными ранее применялось в работах по двумодовому  $\alpha^2$ -динамо [5] и конвекции в ядре Земли без учета магнитного поля [6].

Настоящая работа посвящена разработке одной такой комбинированной многомасштабной модели. Крупномасштабные структуры описываются спектральной моделью геодинамо, а мелкомасштабные — комплексной каскадной моделью МГД конвекции. Предварительно вычисляются коэффициенты каскадной модели.

## Уравнения крупномасштабного геодинамо

Будем использовать геоцентрическую сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  стандартно связанную с геоцентрическими декартовыми координатами  $(x, y, z)$  в которых  $e_z$  – орт оси вращения Земли. Жидкое ядро образует сферический слой, определяемый неравенством  $r_i \leq r \leq r_o$ , где внутренняя граница (ICB) определяется как  $r = r_i$ , а граница ядро-мантия (СМВ) как  $r = r_o$ . Температура на ICB и СМВ постоянна и равна  $T_i$  и  $T_o$  соответственно.

Введем отклонение  $T$  поля температуры от гиперболического по радиусу профиля  $T_s(r)$ , удовлетворяющего условиям  $T_s(r_i) = T_i$  и  $T_s(r_o) = T_o$ , который определяет равновесное распределение температуры в ядре (распределение в отсутствие конвекции). Далее будем называть  $T$  просто полем температуры.

При описании крупномасштабного динамо используются турбулентные значения диффузионных коэффициентов: вязкости  $\nu^T$ , температуропроводности  $\kappa^T$  и магнитной вязкости  $\eta^T$ .

Крупномасштабные поле скорости жидкости  $\mathbf{v}$ , поле магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и поле температуры  $T$  связываются между собой обезразмеренными уравнениями МГД конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - \frac{1}{E^T} \mathbf{e}_z \times \mathbf{v} + \frac{Ra^T}{Pr^T} T \mathbf{r} + \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) (T + T_s) = \frac{1}{Pr^T} \Delta T, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + R_\alpha^T \text{rot} (\alpha(\mathbf{r}) \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm^T} \Delta \mathbf{B}, \quad (1c)$$

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0. \quad (1d)$$

Безразмерными параметрами подобия являются *турбулентные* число Экмана  $E^T$ , число Рэлея  $Ra^T$ , число Прандтля  $Pr^T$ , магнитное число Прандтля  $Pm^T$ , амплитуда  $\alpha$ - эффекта  $R_\alpha^T$ .

Такой вид безразмерной системы соответствует выбору внешнего радиуса жидкого ядра  $l_C$  в качестве единицы длины, характерного времени вязкой диссипации  $l_C^2/\nu^T$  в качестве единицы времени, разности температуры на границах ядра  $\delta T = T_i - T_o$  в качестве единицы температуры, величины  $\rho(\nu^T)^2/l_C^2$  в качестве единицы давления и величины  $\sqrt{\rho \mu_0 \mu \nu^T}/l_C$  в качестве единицы магнитной индукции, где  $\rho$  – средняя плотность,  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость,  $\mu_0$  – магнитная постоянная. В этих единицах  $r_i = 0.35$ ,  $r_o = 1$  и

$$T_s = \frac{r_i}{1 - r_i} \left( \frac{1}{r} - 1 \right) + T_i - 1. \quad (2)$$

В правой части уравнения индукции (1с) член  $\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  описывает генерацию магнитного поля за счет крупномасштабных движений  $\mathbf{v}$ , а член  $R_\alpha \text{rot}(\alpha(\mathbf{r})\mathbf{B})$  описывает мелкомасштабный турбулентный генератор ( $\alpha$ -эффект). Мелкомасштабная турбулентность считается изотропной и однородной, поэтому для  $\alpha$ -эффекта используется скалярная параметризация в виде  $\alpha(\mathbf{r}) = r \cos \theta$ .

Для полей  $\Gamma$  и  $\mathbf{v}$  ставятся нулевые граничные условия на ICB и CMB:

$$\Gamma(r = r_i) = \Gamma(r = 1) = 0, \quad \mathbf{v}(r = r_i) = \mathbf{v}(r = 1) = 0. \quad (3)$$

Формулировка граничных условий для поля  $\mathbf{B}$  значительно сложнее. Это связано с тем, что данное поле существует и в твердом ядре ( $r < r_i$ ) и вне ядра ( $r > 1$ ). В твердом проводящем ядре генерация поля отсутствует, поэтому уравнения для магнитного поля приобретают вид:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_m \Gamma} \Delta \mathbf{B}, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

который совпадает с соответствующими уравнениями из (1), если положить в них  $\mathbf{v} = 0$  и  $\alpha(\mathbf{r}) = 0$ . Поэтому можно считать, что система (1) задает магнитное поле и в твердом ядре, тогда необходимы граничные условия в центре ядра:  $\mathbf{B}(r = 0) < \infty$ .

Для поля вне ядра ставятся вакуумные условия  $\text{rot} \mathbf{B} = 0$ , тогда поле вне ядра является потенциальным с гармоническим потенциалом. Это приводит к граничным условиям при  $r = 1$  отдельно для тороидальной и полоидальной компонент поля, которые обеспечат непрерывную сшивку полей внутри и вне ядра. Полная формулировка этих условий приведена в статье авторов [7], она громоздка и не важна для настоящей работы, поэтому здесь не приводится.

## Спектральная подмодель

Технология построения спектральных моделей геодинамо на основе комбинированных символьно-численных вычислений была разработана авторами ранее [7].

Поля задачи геодинамо в этих моделях приближенно представлены линейными комбинациями конечного числа мод:

$$\mathbf{v}(r, t) = \sum_{l=1}^{L_{\max}} \beta_l(t) \mathbf{v}_l(r), \quad \Gamma(r, t) = \sum_{s=1}^{S_{\max}} \alpha_s(t) T_s(r), \quad \mathbf{B}(r, t) = \sum_{p=1}^{P_{\max}} \gamma_p(t) \mathbf{B}_p(r). \quad (5)$$

Сами такие моды являются собственными модами свободного затухания полей, т.е. решениями спектральных задач:

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{v} - \nabla p + \Delta \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{v} = 0, \\ \lambda \Gamma + \Delta \Gamma &= 0, \\ \eta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

с описанными выше граничными условиями для полей.

Спектральная модель задается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_l}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L_{\max}} B_{lij} \beta_i \beta_j - \mu_l \beta_l + \frac{1}{E^T} \sum_{i=1}^{L_{\max}} E_{li} \beta_i + Gr^T \sum_{i=1}^{S_{\max}} C_{li} \alpha_i + \sum_{i,j=1}^{P_{\max}} Q_{lij} \gamma_i \gamma_j, \\ l &= 1, \dots, L_{\max}, \\ \frac{d\alpha_s}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L_{\max}, S_{\max}} F_{sij} \beta_i \alpha_j + \sum_{i=1}^{L_{\max}} H_{si} \beta_i - \frac{1}{Pr^T} \lambda_s \alpha_s, \\ s &= 1, \dots, S_{\max}, \\ \frac{d\gamma_p}{dt} &= \sum_{i,j=1}^{L_{\max}, P_{\max}} W_{pij} \beta_i \gamma_j + R_\alpha^T \sum_{i=1}^{P_{\max}} W_{pi}^\alpha \gamma_i - \frac{1}{Pm^T} \eta_p \gamma_p, \\ p &= 1, \dots, P_{\max}, \end{aligned} \quad (7)$$

с турбулентными значениями параметров подобия, которые определяются выражениями:

$$E^T = \frac{\Omega l_C^2}{\nu^T}, \quad Gr^T = \frac{Ra^T}{Pr^T} = \frac{\beta g \delta T l_C^3}{(\nu^T)^2}, \quad Pr^T = \frac{\nu^T}{\kappa^T}, \quad Pm^T = \frac{\nu^T}{\eta^T}, \quad R_\alpha^T = \frac{l_C \alpha_0^T}{\nu^T}, \quad (8)$$

где  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли;  $g$  – ускорение свободного падения на СМВ;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения;  $\alpha_0^T$  – интенсивность  $\alpha$ -эффекта, а параметр  $Gr^T$  называется турбулентным числом Грасгофа.

В системе (7)  $\mu_l > 0$ ,  $\lambda_s > 0$  и  $\eta_p > 0$  являются собственными значениями соответствующих мод, а остальные коэффициенты (коэффициенты Галеркина) определяются функциональными скалярными произведениями в объеме ядра:

$$\begin{aligned} B_{lij} &= -\langle (v_i \nabla) v_j, v_l \rangle, \quad E_{li} = -2 \langle e_z \times v_i, v_l \rangle, \quad C_{li} = \langle T_i r, v_l \rangle, \\ Q_{lij} &= \langle \text{rot} B_i \times B_j, v_l \rangle, \quad F_{sij} = -\langle v_i (\nabla T_j), T_s \rangle, \quad H_{si} = \frac{r_i}{1-r_i} \langle r^{-2} v_i e_r, T_s \rangle, \\ W_{pij} &= \langle \text{rot} (v_i \times B_j), B_s \rangle, \quad W_{pi}^\alpha = \langle \text{rot} (r \cos \theta B_i), B_s \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Технология расчета собственных мод, собственных значений и коэффициентов Галеркина подробно описана в работе [7]. Каждая мода скорости и магнитного поля определяется мультииндексами вида  $(type, k, n, m)$ , где  $k$ ,  $n$  и  $m$  соответствуют дискретизации спектра по  $r$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  соответственно, а  $type$  – бинарный индекс типа моды: тороидальная или полоидальная. Температурные моды определяются мультииндексами  $(k, n, m)$ . Мода с индексами  $n$  и  $m$  определяется в  $(\theta, \varphi)$ -направлении сферической гармоникой  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ .

Для того, чтобы спектральная модель корректно описывала крупномасштабные турбулентные течения необходимо с одной стороны учесть перенос энергии в масштабы, которые мельче масштабов всех используемых мод. С другой стороны,  $\alpha$ -эффект является механизмом переноса энергии мелкомасштабных пульсаций в крупные масштабы. Для учета этих факторов необходимо рассматривать  $\nu^T$ ,  $\eta^T$ ,  $\kappa^T$  и  $\alpha_0^T$  не константами, а функциями мелкомасштабных течений. Такие течения уже будем описывать каскадной моделью МГД конвекции.

## Каскадная подмодель

При построении любой каскадной модели турбулентности физическое пространство разбивается на иерархические диапазоны безразмерных масштабов  $\mathcal{L}_n = (q^{-n-1}; q^{-n}]$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель прогрессии  $q > 1$ . Каждый масштаб определяется своим характерным волновым числом  $k_n = q^n$ . Это разбиение определяет в пространстве безразмерных волновых векторов масштабные оболочки  $\mathcal{P}_n = \{\mathbf{k} \mid q^n \leq \|\mathbf{k}\| < q^{n+1}\}$ . Затем вводятся вещественные или комплексные коллективные переменные скорости  $U_n(t)$ , магнитного поля  $B_n(t)$  и поля температуры  $\Theta_n(t)$ , где  $|U_n(t)|$ ,  $|B_n(t)|$  и  $|\Theta_n(t)|$  интерпретируются как меры суммарной интенсивности всех структур (вихрей) заданного диапазона масштабов [8, 9].

При описании мелкомасштабных полей будем использовать молекулярные значения диффузионных коэффициентов: вязкости  $\nu^M$ , температуропроводности  $\kappa^M$  и магнитной вязкости  $\eta^M$ . Возьмем в качестве единиц: скорости — наблюдаемую скорость  $U_{WD}$  западного дрейфа геомагнитного поля, длины — радиус внешнего ядра  $l_C$ , температуры — величину  $U_{WD}^2 / (g\beta l_C)$ , магнитной индукции — величину  $\sqrt{\rho\mu_0\mu} U_{WD}$ .

Будем использовать комплексную каскадную модель МГД-конвекции, относящуюся к классу каскадных моделей турбулентности типа GOY [8, 10]. В безразмерной форме ее уравнения имеют общий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= ik_n \sum_{i,j=-J}^J S_{ij} U_{n+i}^* U_{n+j}^* - Re^{-1} k_n^2 U_n + ik_n \sum_{i,j=-J}^J L_{ij} B_{n+i}^* B_{n+j}^* + \Theta_n, \\ \frac{d\Theta_n}{dt} &= ik_n \sum_{i,j=-J}^J H_{ij} U_{n+i}^* \Theta_{n+j}^* - Pe^{-1} k_n^2 \Theta_n + Q_n(t), \\ \frac{dB_n}{dt} &= ik_n \sum_{i,j=-J}^J W_{ij} U_{n+i}^* B_{n+j}^* - Rm^{-1} k_n^2 B_n, \\ n &= n_{\min}, \dots, n_{\max}, \quad S_{ij} = S_{ji}, \quad L_{ij} = L_{ji}, \end{aligned} \tag{10}$$

где  $S_{ij}$ ,  $L_{ij}$ ,  $H_{ij}$ ,  $W_{ij}$  — вещественные коэффициенты,  $Q_n(t)$  — моделирует тепловой подвод энергии в  $n$ -ую оболочку, параметр  $J$  определяет нелокальность модели в пространстве масштабов, символ звездочки означает сопряжение для комплексных переменных.

Отметим, что здесь число Рейнольдса  $Re = l_C U_{WD} / \nu^M$ , число Пекле  $Pe = l_C U_{WD} / \kappa^M$  и магнитное число Рейнольдса  $Rm = l_C U_{WD} / \eta^M$  определяются молекулярными значениями диффузионных коэффициентов вязкости  $\nu^M$ , температуропроводности  $\kappa^M$  и магнитной вязкости  $\eta^M$  в отличие от параметров (8) спектральной модели. Кроме того единицы скорости, времени, температуры и магнитной индукции в спектральной и каскадной моделях тоже отличаются.

Индекс  $n_{\min}$  соответствует наибольшему масштабу, который не отражается в спектральной части комбинированной модели, а  $n_{\max}$  соответствует колмогоровскому масштабу  $Re^{-3/4}$ .

Для значений  $U_{WD} = 10^{-4}$  м/с,  $l_C = 3.48 \times 10^6$  м,  $\nu^M = 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $\eta^M = 1$  м<sup>2</sup>/с и  $\kappa^M = 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с получим:

$$Re = 3.5 \times 10^8, \quad Pe = 3.5 \times 10^7, \quad Rm = 3.5 \times 10^2, \quad Pr = 10^{-1}. \quad (11)$$

Из неравенства  $q^{-n_{\max}-1} < Re^{-3/4} \leq q^{-n_{\max}}$  получаем тогда, что  $n_{\max} = 30$  при  $q = (1 + \sqrt{5})/2$  (константа «золотого сечения»). Известно, что именно такое значение  $q$  может наиболее эффективно обеспечить в каскадной модели перенос энергии между масштабными оболочками [9].

Ранее авторами была разработана технология построения каскадных моделей на основе символьных вычислений [11, 12]. Эта технология позволяет получать параметрические классы моделей, в которых выполняются в бездиссипативном пределе и при  $Q_n(t) = 0$  каскадные аналоги законов сохранения: полной энергии

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (|U_n|^2 + |B_n|^2), \quad \text{перекрестной спиральности } H_C = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (U_n B_n^* + U_n^* B_n),$$

магнитной спиральности  $H_B = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n k_n^{-1} |B_n|^2$ , энергии температурных

$$\text{пульсаций } E_\Theta = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\Theta_n|^2.$$

Для комбинированной модели брали  $J = 2$ , что соответствует взаимодействию соседних оболочек, поскольку не ставилась цель исследовать эффекты масштабной нелокальности. Применение авторской технологии дало следующие коэффициенты в нелинейных членах системы (10):

$$\begin{aligned} S_{-2,-1} = S_{-1,-2} = \tau_1, \quad S_{-1,1} = S_{1,-1} = q(q-1)\tau_1, \quad S_{1,2} = S_{2,1} = -q^3\tau_1, \\ L_{-2,-1} = L_{-1,-2} = \tau_2, \quad L_{-1,1} = L_{1,-1} = -(q-1)((q+1)\tau_1 + \tau_2), \\ L_{1,2} = L_{2,1} = q((q^2-1)\tau_1 - \tau_2), \quad W_{-2,-1} = W_{-1,1} = -\frac{2((q^2-1)\tau_1 - \tau_2)}{q+1} \\ W_{-1,-2} = -W_{1,2} = \frac{2q((q+1)\tau_1 + \tau_2)}{q+1}, \quad W_{1,-1} = W_{2,1} = -\frac{2q^2\tau_2}{q+1}, \\ H_{-2,-2} = \tau_3, \quad H_{-2,-1} = -\tau_4/q, \quad H_{-1,-2} = \tau_5, \quad H_{-1,-1} = -\tau_3/q, \quad H_{-1,1} = \tau_4, \\ H_{0,-2} = \tau_7, \quad H_{0,-1} = -\tau_8/q, \quad H_{0,1} = \tau_6, \quad H_{0,2} = -q^2\tau_3, \quad H_{1,-1} = -\tau_9/q, \\ H_{1,1} = \tau_8, \quad H_{1,2} = -q^2\tau_5, \quad H_{2,1} = \tau_9, \quad H_{2,2} = -q^2\tau_7, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\tau_i$  – свободные вещественные параметры. Все прочие коэффициенты нелинейных членов в (10), которых нет среди (12) равны нулю. Отметим, что при таких коэффициентах упомянутые выше законы сохранения выполняются абсолютно точно при любом  $q > 1$ .

Для получения числовых значений коэффициентов необходимо выбрать значение  $q$  и параметров  $\tau_i$ . Использовалось  $q = (1 + \sqrt{5})/2$ , а параметры  $\tau_i$

определялись из условия

$$R(\tau_1, \dots, \tau_9) = \max \left\{ \left| \lg \frac{|S_{ij}|}{p_{ij}} \right|, \left| \lg \frac{|L_{ij}|}{p_{ij}} \right|, \left| \lg \frac{|W_{ij}|}{p_{ij}} \right|, \left| \lg \frac{|H_{ij}|}{p_{ij}} \right| \right\} \rightarrow \min, \quad (13)$$

где  $p_{ij}$  вероятности взаимодействия трех волн из оболочек  $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+i}, \mathcal{P}_{n+j}$ .

Такая минимизация согласовывает абсолютные значения коэффициентов, которые являются мерами нелинейных взаимодействий масштабных оболочек и вероятности этих взаимодействий. Известно, что волны из трех оболочек  $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n+i}, \mathcal{P}_{n+j}$  могут взаимодействовать в нелинейных членах уравнений МГД-конвекции тогда и только тогда, когда их волновые векторы образуют треугольник. Из соображений подобия ясно, что эти вероятности не зависят от  $n$ , причем  $p_{ij} = p_{ji}$ . Поэтому  $p_{ij}$  можно рассчитать методом Монте-Карло, генерируя случайные длины волновых векторов равномерно распределенных в оболочках  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j$ . Для каждой пары  $(i, j)$ , где  $i, j = -2, \dots, 2$  были проведены по  $10^8$  имитаций и получены значения вероятностей (приведены только ненулевые значения при  $i \leq j$ ):

$$\begin{aligned} p_{-2,-2} &= 0.0635, & p_{-2,-1} &= 0.4999, & p_{-2,0} &= 0.9514, & p_{-2,1} &= 0.2059, \\ p_{-1,-1} &= 0.8971, & p_{-1,0} &= 1, & p_{-1,1} &= 0.5, & p_{0,0} &= 1, & p_{0,1} &= 0.8969, \\ p_{0,2} &= 0.0636, & p_{1,1} &= 1, & p_{1,2} &= 0.5001, & p_{2,2} &= 0.9516. \end{aligned} \quad (14)$$

Визуально это распределение вероятностей приведено на рис. 1(а).

Задача минимизации (13) решалась методом покоординатного спуска с шагом  $10^{-3}$ . Для поиска начальных приближений использовались результаты  $10^3$  случайных выборов девяток параметров  $\tau_i$  из отрезка  $[-100, 100]$ , который заведомо покрывает искомые значения. Использование покоординатного спуска связано с недифференцируемостью целевой функции в (13). Найденные оптимальные значения параметров  $\tau_i$  следующие:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.885, & \tau_2 &= -0.308, & \tau_3 &= 0.035, & \tau_4 &= 0.618, & \tau_5 &= 0.276, \\ \tau_6 &= 1.109, & \tau_7 &= 0.526, & \tau_8 &= 1.236, & \tau_9 &= 0.618 \end{aligned} \quad (15)$$

Их подстановка в (12) дает необходимые числовые значения коэффициентов нелинейных членов каскадной модели. В табл. 1 приведены вычисленные значения коэффициентов и логарифмы отношений модулей коэффициентов модели к вероятностям из целевой функции оптимизационной задачи (13). В заголовке таблицы для всех коэффициентов используется символическое обозначение  $S_{ij}$ . Видно, что относительное отклонение коэффициентов от соответствующих вероятностей не превосходит  $10^{0.66} = 4.57$ , т.е. они одного порядка.

Величина относительного отклонения модулей коэффициентов от вероятностей в логарифмической шкале по абсолютной величине представлена на рис. 1(б-д). Белым цветом на этих рисунках обозначены отсутствующие в (12) коэффициенты, которые соответствуют взаимодействиям, запрещенным законами сохранения.

Таблица 1

## Коэффициенты каскадной модели (10) [Shell model (10) coefficients]

Символ $C_{ij}$	Значение $C_{ij}$	$\lg ( C_{ij} /p_{ij})$
$S_{-2,-1} = S_{-1,-2}$	0.885	0.248103
$S_{-1,1} = S_{1,-1}$	-0.110625	-0.655103
$S_{1,2} = S_{2,1}$	-0.550347	0.0415585
$L_{-2,-1} = L_{-1,-2}$	-0.782325	0.194548
$L_{-1,1} = L_{1,-1}$	0.125660	-0.599759
$L_{1,2} = L_{2,1}$	0.462708	-0.0337714
$W_{-2,-1}$	-0.584928	0.0682601
$W_{-1,-2}$	0.790272	0.198937
$W_{-1,1}$	-0.584928	0.0681450
$W_{1,-1}$	0.615	0.0899192
$W_{1,2}$	-0.790272	0.198698
$W_{2,1}$	0.615	0.0897956
$H_{-2,-2}$	0.035	-0.258945
$H_{-2,-1}$	-0.724030	0.160916
$H_{-1,-2}$	0.276	-0.257931
$H_{-1,-1}$	-1.29927	0.160871
$H_{-1,1}$	0.618	0.0920325
$H_{0,-2}$	0.526	-0.257362
$H_{0,-1}$	-1.44806	0.160787
$H_{0,1}$	1.109	0.0921836
$H_{0,2}$	-0.0254994	-0.397004
$H_{1,-1}$	-0.724030	0.160799
$H_{1,1}$	1.236	0.0920185
$H_{1,2}$	-0.201081	-0.395708
$H_{2,1}$	0.618	0.0919095
$H_{2,2}$	-0.383219	-0.394986

## Сопряжение спектральной и каскадной моделей

Для соединения каскадной (мелкомасштабной) и спектральной (крупномасштабной) моделей необходимо организовать обмен информацией между ними.

Каскадная модель нуждается прежде всего в значении  $n_{\min}$ , которое зависит от самого мелкого масштаба, представленного в спектральной части комбинированной модели.

Рассмотрим оценку масштаба моды, которая определяется сферической гармоникой  $Y_n^m(\theta, \varphi)$ . Если это тессеральная или секториальная гармоника, она разбивает поверхность сферы радиуса  $r$  на  $2m(n - |m| + 1)$  клеток, пары которых дают области с характерной площадью  $S = 4\pi r^2 / (m(n - |m| + 1))$ . Для зональной

гармоники ( $m = 0$ ) эта площадь будет  $S = 8\pi r / (n + 1)$ . Типичное значение радиуса  $r = (r_{\min} + 1)/2$ . Для магнитных мод  $r_{\min} = 0$ , а для мод скорости и температуры  $r_{\min} = 0.35$ . Если радиальный индекс моды равен  $k$ , то ее масштаб по радиусу можно оценить как  $h = (1 - r_{\min}) / (k + 1)$ . Характерный линейный масштаб моды можно тогда определить как  $(hS/3)^{1/3}$ . После этого легко установить к какой масштабной оболочке относится данная мода.

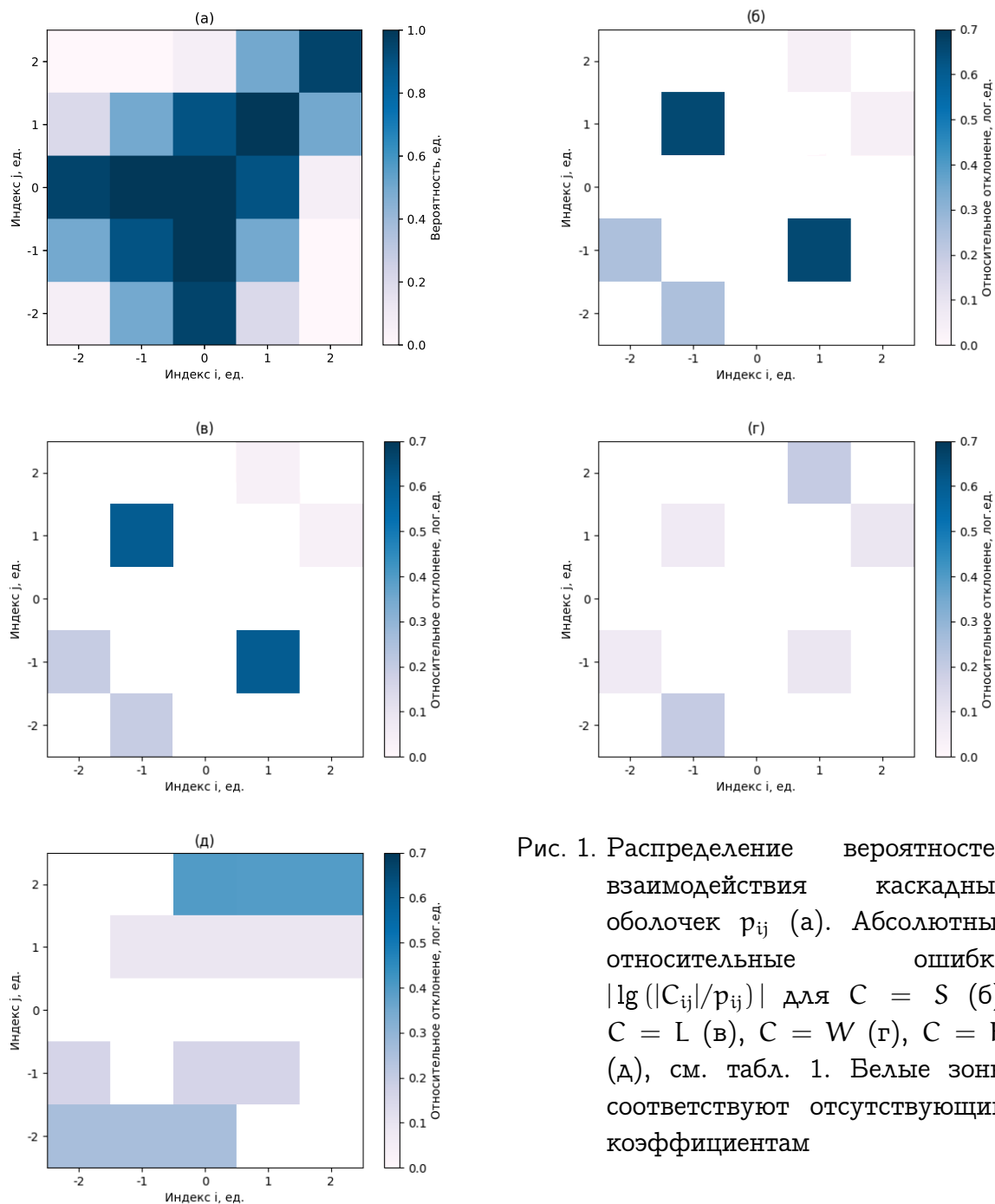


Рис. 1. Распределение вероятностей взаимодействия каскадных оболочек  $p_{ij}$  (а). Абсолютные относительные ошибки  $|\lg(|C_{ij}|/p_{ij})|$  для  $C = S$  (б),  $C = L$  (в),  $C = W$  (г),  $C = H$  (д), см. табл. 1. Белые зоны соответствуют отсутствующим коэффициентам

Figure 1. Interaction shells probability distribution of  $p_{ij}$  (а). Absolute relative errors  $|\lg(|C_{ij}|/p_{ij})|$  for  $C = S$  (б),  $C = L$  (в),  $C = W$  (г),  $C = H$  (д), see Table 1. White areas correspond to missing coefficients

Рассмотрим два примера. Определим линейный масштаб тороидальной моды скорости  $v_{1,5,2}^T$ . Для нее  $r_{\min} = 0.35$ ,  $k = 1$ ,  $n = 5$ ,  $m = 2$ . Поэтому  $S = 1.06$ ,  $h = 0.325$  и линейный масштаб  $0.487$ . Это мода из масштабной оболочки  $\mathcal{P}_1$ . Теперь определим линейный масштаб полоидальной магнитной моды  $B_{0,1,0}^P$  (главная дипольная мода). Для нее  $r_{\min} = 0$ ,  $k = 0$ ,  $n = 1$ ,  $m = 0$ . Поэтому  $S = 6.28$ ,  $h = 0.5$  и линейный масштаб  $1.015$ . Это мода из масштабной оболочки  $\mathcal{P}_{-1}$ .

Определив для каждой моды номер ее масштабной оболочки и наибольший из этих номеров, полагаем  $n_{\min}$  на единицу больше.

Следующее, что передается в каскадную модель из спектральной — это значения коллективных переменных для  $n = n_{\min} - 1$  и  $n = n_{\min} - 2$ . Эти переменные входят в уравнение каскадной модели (10), но для них в модели нет эволюционных уравнений, поэтому значения переменных надо задавать как «граничные условия». Для модулей этих переменных будем использовать значения переменных амплитуд мод из (7) с учетом различных единиц в спектральной и каскадной моделях при их обезразмеривании.

Например, размерная величина скорости для оболочки  $\mathcal{P}_{n_{\min}-1}$  в каскадной модели будет  $U_{WD}|U_{n_{\min}-1}|$ , а размерная величина суммы всех мод скорости  $v_i$  в спектральной модели, масштабы которых относятся к этой же оболочке, будет  $\frac{v^M}{l_c} \sqrt{\sum_i \beta_i^2}$ . Приравнивая эти выражения, получим  $|U_{n_{\min}-1}| = \frac{U_{WD} v^M}{l_c} \sqrt{\sum_i \beta_i^2} = \text{Re}^{-1} \sqrt{\sum_i \beta_i^2}$ . Поступая аналогично и с другими полями, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} |U_{n_{\min}-1}| &= \text{Re}^{-1} \sqrt{\sum_i \beta_i^2}, & |U_{n_{\min}-2}| &= \text{Re}^{-1} \sqrt{\sum_j \beta_j^2} \\ |B_{n_{\min}-1}| &= \text{Re}^{-1} \sqrt{\sum_i \gamma_i^2}, & |B_{n_{\min}-2}| &= \text{Re}^{-1} \sqrt{\sum_j \gamma_j^2}, \\ |\Theta_{n_{\min}-1}| &= \frac{g\beta l_c \delta T}{U_{WD}^2} \sqrt{\sum_i \alpha_i^2}, & |\Theta_{n_{\min}-2}| &= \frac{g\beta l_c \delta T}{U_{WD}^2} \sqrt{\sum_j \alpha_j^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где суммирование по  $i$  распространяется на моды, относящиеся к  $\mathcal{P}_{n_{\min}-1}$ , а по  $j$  распространяется на моды, относящиеся к  $\mathcal{P}_{n_{\min}-2}$ . Аргументы граничных переменных можно задать случайными равномерными из отрезка  $(-\pi; \pi]$ .

Отметим, что в каскадной модели (10) есть тепловой источник  $Q_n(t)$ . Если использовать эту модель отдельно, то такой источник необходим, поскольку именно он обеспечивает внешний подвод энергии в систему. Однако в случае сопряжения каскадной и спектральной моделей внешний подвод энергии идет из крупномасштабной части в виде граничных условий (16). Это согласуется с тем, что тепловой поток из недр Земли практически равномерен по ее поверхности, т.е. масштаб подвода тепловой энергии в геодинамо лежит за пределами масштабов каскадной модели. Поэтому в комбинированной модели тепловой источник  $Q_n(t)$  не используется или его можно вводить в виде случайной функции для моделирования флуктуаций.

Передача информации из мелкомасштабной модели в крупномасштабную должна дать значения турбулентных диссипативных коэффициентов как функций коллективных переменных.

Сначала рассмотрим выражение турбулентной вязкости  $\nu^T$ , используя идеи работы [6]. В размерном виде скорость диссипации кинетической энергии в каскадной модели будет  $\varepsilon = \frac{\nu^M U_{WD}}{l_c^2} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} k_n^2 |U_n(t)|^2$ . Известную оценку Смагоринского для турбулентной вязкости [13] можно записать в виде  $\nu^T = 0.1 (l_c^4 \varepsilon)^{1/3}$ . Тогда

$$\nu^T = 0.1 \left[ l_c^2 \nu^M U_{WD} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} k_n^2 |U_n(t)|^2 \right]^{1/3}, \quad (17)$$

что дает турбулентные значения чисел Грасгофа  $Gr^T$  и Экмана  $E^T$  (8) в спектральной модели.

Турбулентное значение числа Прандтля  $Pr^T$  для развитой турбулентности мало зависит от вида конкретного течения. Известна полученная методами ренорм-групп теоретическая зависимость  $Pr^T = 0.7/(RePr^T) + 0.85$  в диапазоне значений молекулярного числа Прандтля  $0.058 < Pr < 65$  [14], уточненная для жидких металлов экспериментально в форме  $Pr^T = 2/(RePr^T) + 0.85$  [15]. Последнее выражение можно записать как  $(Pr^T)^2 - 0.85 Pr^T - 2/Re = 0$ , откуда ясно, что для числа Рейнольдса  $Re \sim 10^8$  можно считать  $Pr^T = 0.85$ .

Для расчета турбулентного коэффициента магнитной вязкости известна оценка  $\eta^T = 2E_c \tau_c / 3$ , где  $\tau_c$  – время оборота энергонесущего вихря, а  $E_c$  – его кинетическая энергия [8]. В переменных каскадной модели для вихря  $n$ -ой оболочки в размерной форме  $E_c(n) = U_{WD}^2 |U_n|^2 / 2$  и  $\tau_c(n) = l_c k_n^{-1} / (U_{WD} |U_n|)$ , где  $E_c(n)$  – кинетическая энергия оболочки, а  $\tau_c(n)$  – характерное время оборота вихрей оболочки. Тогда

$$\eta^T = \frac{1}{3} U_{WD} l_c \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} k_n^{-1} |U_n(t)|, \quad (18)$$

что вместе с (17) дает возможность определить  $Pm^T$  в (8).

Похожим образом можно получить и выражение для интенсивности  $\alpha$ -эффекта как функции коллективных переменных. Из теории  $\alpha$ -эффекта известна для нее оценка  $\alpha_0^T = -N_c \tau_c / 3$ , где  $N_c$  – гидродинамическая спиральность энергонесущего вихря [8]. В каскадной модели спиральность  $n$ -ой оболочки в размерной форме  $N_c(n) = (-1)^n U_{WD}^2 |U_n|^2 k_n / l_c$ , поэтому

$$\alpha_0^T = -\frac{1}{3} U_{WD} \sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} (-1)^n |U_n(t)|, \quad (19)$$

что дает турбулентное значение интенсивности  $\alpha$ -эффекта  $R_\alpha^T$  (8) в спектральной модели.

В настоящей работе мы рассмотрели только сопряжение моделей. Следующий этап – это проведение вычислительных экспериментов с многомасштабной

моделью. Пока необходимо для ясности отметить такие моменты. Очевидно, что характерные времена процессов в каскадной модели много меньше характерных времен в спектральной. Поэтому шаг численного решения спектральной модели  $h_{SP}$  будет содержать в себе много шагов численного решения каскадной  $h_{sh}$ , т.е. один шаг  $h_{SP}$  будет определять целый промежуток решения каскадной модели. И в течение всего этого промежутка граничные значения и их случайно сгенерированные аргументы будут фиксированными. После расчета решений каскадной модели на интервале длины  $h_{SP}$  вычисляются турбулентные коэффициенты для спектральной модели и делается расчет одного шага ее решения. Этот расчет даст новые граничные условия для каскадной модели и описанный вычислительный процесс повторится.

Известно, что решения каскадных моделей часто осциллируют и спектральные законы реализуются в них только в среднем [8]. Поэтому в качестве значений коллективных переменных  $U_n(t)$  в формулах (17-19) будут использоваться их средние значения за промежуток решения длительностью  $h_{SP}$ . Это обеспечит подавление возможных нефизичных флуктуаций.

## Заключение

В работе была предложена схема сопряжения крупномасштабной спектральной модели геодинамо и каскадной модели турбулентной мелкомасштабной магнитогидродинамической конвекции. Получены параметрические выражения для коэффициентов каскадной модели, обеспечивающие выполнение законов сохранения. Подбор свободных параметров выполнен так, чтобы коэффициенты взаимодействий между каскадными масштабными оболочками были максимально согласованы с вероятностями взаимодействий этих оболочек.

В схеме сопряжения каскадная и спектральная модели обмениваются информацией. Спектральная модель дает граничные значения переменных наибольших масштабов каскадной модели. Турбулентные значения диффузионных коэффициентов для спектральной модели вычисляются по коллективным переменным каскадной модели. Получены явные выражения для расчета параметров одной модели по фазовым переменным другой. Сопряженные между собой по такой схеме каскадная и спектральная модели образуют единую многомасштабную модель геодинамо.

Развитием настоящей работы будет построение алгоритмов численных решений и их программной реализации, а также проведение вычислительного эксперимента с многомасштабной моделью и интерпретация его результатов.


## Список литературы

1. Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996. 532 pp.
2. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 2000. vol. 358, pp. 873–897 DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.
3. Aurnou J., King E. The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems // *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2017. vol. 473, 20160731 DOI:10.1098/rspa.2016.0731.


4. Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. *Магнитные поля в астрофизике.* М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006. 384 с.
5. Frick P., Sokoloff D., Stepanov R. Large-small scales interactions and quenching in  $\alpha^2$ -dynamo // *Physical Rev. E.*, 2006. vol. 74, pp. 4155-4164.
6. Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer // *EuroPhys. Letters.*, 2002. vol. 59, no. 2, pp. 212-217.
7. Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System // *Mathematics.*, 2023. vol. 11, no. 13, 3000 DOI: 10.3390/math11133000.
8. Фрик П. Г. *Турбулентность: подходы и модели.* М.-Ижевск: РХД, 2010. 292 с.
9. Ditlevsen P. D. *Turbulence and shell models.* New York: Cambridge Univ. Press, 2011. 164 pp.
10. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // *Physics Reports*, 2013. vol. 523, no. 1, pp. 1–60 DOI: 10.1016/j.physrep.2012.09.001.
11. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры // *Вычислительные технологии*, 2021. Т. 26, № 5, С. 65–80 DOI: 10.25743/ICT.2021.26.5.006.
12. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Вычислительная технология построения каскадных моделей магнитогидродинамической турбулентности // *Информатика и автоматизация*, 2024. Т. 23, № 6, С. 1665–1697 DOI: 10.15622/ia.23.6.4.
13. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1. The basic experiment // *Monthly Weather Review.*, 1963. vol. 91, pp. 99-164.
14. Yakhot V., Orszag S., Yakhot A. Heat transfer in turbulent fluid. 1. Pipe flows // *Inter. J. Heat Mass Transfer.*, 1987. vol. 30, no. 1, pp. 15-22.
15. Кириллов П. Л. Теплообмен в турбулентном потоке. Ч.1. Турбулентное число Прандтля // *Атомная энергия*, 2017. Т. 122, № 3, С. 133–145.

### Информация об авторах



*Водинчар Глеб Михайлович* ✉ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, и.о. заведующего лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-5516-1931.



*Фещенко Любовь Константиновна* ✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-5970-7316.

## References

- [1] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. London: Academic Press, 1996. 532 pp.
- [2] Jones C. A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2000. vol. 358, pp. 873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565
- [3] Aurnou J., King E. The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., 2017. vol. 473, 20160731. DOI: 10.1098/rspa.2016.0731
- [4] Zeldovich Ya. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnitny'e polya v astrofizike [Magnetic fields in astrophysics]. Moscow-Izhevsk, NIC RHD, 2006. 384 p. (In Russian).
- [5] Frick P., Sokoloff D., Stepanov R. Large-small scales interactions and quenching in  $\alpha^2$ -dynamo, Physical Rev. E., 2006, vol. 74, pp. 4155–4164.
- [6] Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D., Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer, EuroPhys. Letters, 2002, vol. 59, no. 2, pp. 212–217.
- [7] Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 13, 3000. DOI:10.3390/math11133000
- [8] Frick P.G. Turbulence: approaches and models [Turbulence: approaches and models]. Moscow, Izhevsk, 2010, 332 p. (In Russian).
- [9] Ditlevsen P.D. Turbulence and shell models, New York: Cambridge Univ. Press, 2011, 332 p.
- [10] Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence, Physics Reports, 2013, vol. 523, no. 1, pp. 1–60. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.09.001
- [11] Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Avtomatizirovannaya generatsiya kaskadnykh modeley turbulentnosti metodami komp'yuternoy algebry [Automated Generation of Cascade Models of Turbulence Using Computer Algebra Methods]. Computation Technology, 2021, vol. 26, no 5, pp. 65–80. DOI: 10.25743/ICT.2021.26.5.006 (In Russian).
- [12] Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Vy'chislitel'naya texnologiya postroeniya kaskadny'x modelej magnitogidrodinamicheskoy turbulentnosti [Computational Technology for Shell Models of Magnetohydrodynamic Turbulence]. Informatics and Automation, 2024, vol. 23, no 6, pp. 1665–1697. DOI: 10.15622/ia.23.6.4 (In Russian).
- [13] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: 1. The basic experiment, Monthly Weather Review, 1963, vol. 91, pp 99–164.
- [14] Yakhot V., Orszag S., Yakhot A. Heat transfer in turbulent fluid. 1. Pipe flows, Inter. J. Heat Mass Transfer, 1987, vol. 30, no. 1, pp. 15–22.
- [15] Kirillov P.L. Teploobmen v turbulentnom potoke. CH.1. Turbulentnoye chislo Prandtl'ya [Heat Transfer in Turbulent Flow. Part 1. Turbulent Prandtl Number], Atomnaya energiya, 2017, vol. 122, no. 3, pp. 133–145. (In Russian).

### Information about the authors



*Vodinchar Gleb Mikhailovich* ✉ – PhD (Phys. & Math.), Leading Researcher, Acting Head of the Laboratory for Simulation of Physical Processes, IKIR FEB RAS, Russia, ORCID 0000-0002-5516-1931.



*Feshchenko Liubov Konstantinovna* ✉ – PhD (Phys. & Math.), Researcher, Laboratory for Modeling Physical Processes, IKIR FEB RAS, Russia, ORCID 0000-0001-5970-7316.