Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 53. №4. С. 75 - 92. ISSN 2079-6641

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-75-92

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 004.942:517.9:51-7

Программный комплекс ABMSelkovFracSim 2.0 для количественного и качественного анализа дробного осциллятора Селькова

Р. И. Паровик*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, ул. Мирная, 7, с. Паратунка, Камчатский край, Россия

Аннотация. В статье предлагается новая версия программного комплекса ABMSelkovFracSim (ABMSelkovFracSim 2.0), который был написан на языке программирования Python. В этом комплексе был реализован программный модуль построения бифуркационных диаграмм для качественного анализа колебательных режимов дробного осциллятора Селькова. Дробный осциллятор Селькова представляет собой задачу Коши для системы из двух связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными Герасимова-Капуто дробных переменных порядков, а также с непостоянными коэффициентами. Программный комплекс позволяет с помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона не только строить осциллограммы и фазовые траектории в зависимости от значений и функций ключевых параметров модельных уравнений, что было реализовано ранее в программном комплексе ABMSelkovFracSim, но и проводить расчет бифуркационных диаграмм колебательных режимов дробного осциллятора Селькова. Алгоритм построения бифуркационных диаграмм был реализован не только в последовательной версии, но и в параллельной с привлечением вычислительного ресурса центрального процессора (CPU). Алгоритм автоматически определяет количество потоков CPU, и пользователь может выбрать необходимое количество для более быстрого построения бифуркационной диаграммы. В статье мы приводим бифуркационные диаграммы, построенные в зависимости от характерного временного масштаба θ. Показано, что в зависимости от этого масштаба, а также порядков дробных производных могут возникать различные колебательные режимы, которые переходят из одного в другой. Это дает возможность определить диапазоны изменения значений параметра θ, при которых существует тот или иной режим, что важно при решении конкретных прикладных задач.

Ключевые слова: программный комплекс, дробный осциллятор Селькова, метод Адамса-Башфорта-Мултона, бифуркационные диаграммы, осциллограммы, фазовая траектория.

Получение: 20.11.2025; Исправление: 04.12.2025; Принятие: 05.12.2025; Публикация онлайн: 06.12.2025

Для цитирования. Паровик Р. И. Программный комплекс ABMSelkovFracSim 2.0 для количественного и качественного анализа дробного осциллятора Селькова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 53. № 4. С. 75-92. EDN: CLATTO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-75-92.

Финансирование. Работа выполнена государственного задания ИКИР ДВО РАН (№ НИОКТР 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: parovik@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Паровик Р. И., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 53. no. 4. P. 75 - 92. ISSN 2079-6641

INFORMATION AND COMPUTATIONAL TECHNOLOGY

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-75-92

Research Article

Full text in Russian

MSC 65L05, 34A08, 34C23, 65Y05

ABMSelkovFracSim 2.0 Software Package for Quantitative and Qualitative Analysis of the Selkov Fractional Oscillator

R. I. Parovik*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Mirnaya st., 7, Paratunka, Kamchatka, Russia

Abstract. This article presents a new version of the ABMSelkovFracSim software package (ABMSelkovFracSim 2.0), written in the Python programming language. This package includes a software module for constructing bifurcation diagrams for the qualitative analysis of the oscillatory modes of the Selkov fractional oscillator. The Selkov fractional oscillator is a Cauchy problem for a system of two coupled nonlinear ordinary differential equations with Gerasimov-Caputo derivatives of fractional order variables and non-constant coefficients. Using the Adams-Bashforth-Multon numerical algorithm, this software package not only constructs oscillograms and phase trajectories based on the values and functions of key parameters of the model equations, as previously implemented in the ABMSelkovFracSim software package, but also calculates bifurcation diagrams for the oscillatory modes of the Selkov fractional oscillator. The bifurcation diagram construction algorithm was implemented not only in a sequential version but also in a parallel version, leveraging the computing power of the central processing unit (CPU). The algorithm automatically determines the number of CPU threads, and the user can select the required number for faster bifurcation diagram construction. In this article, we present bifurcation diagrams constructed depending on the characteristic time scale of θ. It is shown that, depending on this scale and the orders of fractional derivatives, various oscillatory modes can arise, transitioning from one to another. This makes it possible to determine the ranges of θ parameter values within which a particular mode exists, which is important for solving specific applied problems.

Key words: software package, Selkov fractional oscillator, Adams-Bashforth-Multon method, bifurcation diagrams, oscillograms, phase trajectory.

Received: 20.11.2025; Revised: 04.12.2025; Accepted: 05.12.2025; First online: 06.12.2025

For citation. Parovik R. I. ABMSelkovFracSim 2.0 software package for quantitative and qualitative analysis of the Selkov fractional oscillator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **53**: 4, 75-92. EDN: CLATTO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-53-4-75-92.

Funding. The work was carried out within the framework of the the state Assignment of IKIP FEB RAS (No. NIOKTR 124012300245-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is solely responsible for submitting the final version of the article for publication.

***Correspondence:** E-mail: parovik@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Parovik R. I., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)

Введение

В конце 60-х годов XX века в работе выдающегося биофизика Е. Е. Селькова [1] была предложена математическая модель автоколебательного процесса в гликолитических реакциях субстрата и продукта, которую называют осциллятором Селькова. Однако в силу большого потенциала в различных приложениях осциллятор Селькова не только применяется в биологии. В 2017 году в статье авторов [2] было предложено использовать осциллятор Селькова для описания микросейсм. Здесь предполагалось, что происходит взаимодействие трещин двух типов: мелких и крупных, которые при определенных условиях могут переходить из одного типа в другой, описывая автоколебательный режим. Первый тип — затравочные трещины с меньшей энергией, которые не регистрируются сейсмической аппаратурой, а второй тип – крупные трещины, которые порождают микросейсмы. Первый вид трещин является триггерами для трещин второго вида. Однако возможен процесс и в обратную сторону, крупные трещины могут затягиваться и переходить в более мелкие. Последние как раз и указывает на автоколебательный режим их взаимодействия.

Дальнейшее продолжение исследования осциллятора Селькова было проведено в работах автора [3, 4]. В этих работах было предложено учитывать эффекты наследственности (памяти) в колебательной системе Селькова, которые указывают на то, что система может "помнить" оказанное на нее воздействие, причем отклик системы на это воздействие может быть не мгновенным, а происходит через некоторое время. Последнее характерно для пластичных сред, которые изучаются в рамках наследственной механики [5]. Следуя этому подходу, текущее состояние колебательной системы Селькова будет зависеть от предыдущих ее состояний, что с математической точки зрения приводит нас к теории итегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа [6]. Вито Вольтерра описывал эффекты наследственности или по его терминалогии эредитарности с помощью интегро-дифференциальных уравнений, в подынтегральных выражениях которых находились разностные ядра (функции памяти), которые и определяли тип наследственности. В силу того, что в природе распространенны степенные законы [7], то функция памяти в работах [3, 4] выбиралась степенной, что естественным образом сводило интегро-дифференциальные уравнения к уравнениям с производными дробных порядков, математический аппарат которых хорошо изучен [8, 9]. Поэтому осциллятор Селькова со степенной памятью, которая описывается с помощью производных дробных порядков мы будем называть дробным осциллятором Селькова. В работах автора [3, 4] исследовался дробный осциллятор Селькова в случаях когда порядки дробных производных являются постоянными, а также переменными, зависящими от времени. Предложен численный алгоритм Адамса-Башфорта-Мултона для численного анализа и построения осциллограмм и фазовых траекторий, а также проведен качественный анализ: исследованы точки покоя, исследованы регулярные и хаотические режимы с помощью максимальных показателей Ляпунова, Теста 0-1 [10]. В статье [11] были произведены расчеты 2D и 3D

бифуркационных диаграмм для исследования условий переключения между различными колебательными режимами. С целью автоматизации расчетов по модели дробной колебательной системы Селькова на языке программирования Python [12] в среде PyCharm [13] был разработан программный комплекс ABMSelkovFracSim [14].

Однако организация расчетов в программном комплексе ABMSelkovFracSim проводилась при условии, что коэффициенты в модельных уравнениях дробного осциллятора Селькова являются константами. Дальнейшее продолжение исследования дробного осциллятора Селькова связано с учетом переменных коэффициентов, что отражено в работе [15]. Переменные коэффициенты здесь возникают в результате ввода характерного временного масштаба, который дает согласование размерностей в модельных уравнениях дробного осциллятора Селькова [16]. В настоящей работе мы предлагаем модернизацию программного комплекса ABMSelkovFracSim, который учитывает в расчетах характерный временной масштаб. Показано на бифуркационных диаграммах, что характерный временной масштаб имеет важное значение при исследовании переключения колебательных режимов. В работе дается описание нового программного комплекса ABMSelkovFracSim 2.0, а также проводится демонстрация его работы на конкретных примерах. Особенностью программного комплекса является возможность параллельного счета на центральном процессоре (CPU) для более быстрого построения бифуркационных диаграмм.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую задачу Коши [15]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x(t) = -\nu_1(t)\, x(t) + w_1(t)\, y(t) + h_1(t)\, x^2(t)\, y(t)\,, x(0) = x_0, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y(t) = \nu_2(t) - w_2(t)\, y(t)) - h_2(t)\, x^2(t)\, y(t)\,, y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t), y(t) \in C^1[0,T]$ — функции решения; $\nu_1(t) = \theta^{1-\alpha_1(t)}$, $\nu_2(t) = \nu_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$, $w_1(t) = w_0\theta^{1-\alpha_1(t)}, w_2(t) = w_0\theta^{1-\alpha_2(t)}, h_1(t) = h_0\theta^{1-\alpha_1(t)}, h_2(t) = h_0\theta^{1-\alpha_2(t)}$ — функции из класса $C[0,T]$; θ — характерный временной масштаб с размерностью времени; ν_0, w_0, h_0 — заданные константы; $t \in [0,T]$ — текущее время процесса; $T > 0$ — время моделирования; x_0, y_0 — положительные константы, отвечающие за начальные условия.

Операторы дробных производных переменных порядков $0 < \alpha_1(t), \alpha_2(t) < 1$ имеют следующий вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_1(t)}}, \quad \partial_{0t}^{\alpha_2(t)} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2(t))} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_2(t)}},$$

и понимаются в смысле Герасимова-Капуто [17, 18]. Более подробно о свойствах таких операторов можно узнать из обзорной статьи [19].

Задачу Коши (1) мы будем называть дробным осциллятором Селькова. В случае, когда $\theta = 1$, мы получаем дробный осциллятор Селькова с постоянными коэффициентами, который был исследован в статьях [3, 4, 10, 11]. Случай, когда порядки дробных производных являются константами и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ соответствует классическому осциллятору Селькова [1].

В качестве методики решения задачи Коши (1) был выбран численный алгоритм из семейства методов предиктор-корректор Адамса-Башфорта-Мултона (АБМ) [15], свойства которого можно изучить в работах [20, 21]. В качестве альтернативы можно воспользоваться, например, нелокальной неявной конечно разностной схемой [22]. В программном комплексе ABMSelkovFracSim 2.0 на языке программирования Python были реализованы методы расчета по схеме АБМ при различных функциях $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$:

1. Метод ABMSelkovFracConst (постоянные дробные порядки)

$$\alpha_1(t) = a_1 = \text{const}, \alpha_2(t) = a_2 = \text{const},$$

где $a_1, a_2 \in (0, 1]$ – постоянные значения дробных порядков.

2. Метод ABMSelkovFracCos (косинусоидальная зависимость)

$$\alpha_1(t) = a_1 - k_1 \left|\cos(\phi_1 t + f_1)\right|, \alpha_2(t) = a_2 - k_2 \left|\cos(\phi_2 t + f_2)\right|,$$

где $a_1, a_2 \in (0, 1]$ - начальные значения порядка; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ — амплитуда колебаний; $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^+$ — частота колебаний; $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ — начальная фаза.

3. Метод ABMSelkovFracExp (экспоненциальная зависимость)

$$\alpha_1(t) = a_1 - k_1 \exp(-\phi_1 t), \alpha_2(t) = a_2 - k_2 \exp(-\phi_2 t),$$

где $a_1, a_2 \in (0, 1]$ — предельные значения при $t \to \infty$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ — начальное отклонение, $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}^+$ - скорость экспоненциального затухания.

4. Метод ABMSelkovFracLinear (линейная зависимость)

$$\alpha_1(t) = \max(a_1 - k_1 t, \varepsilon), \alpha_2(t) = \max(a_2 - k_2 t, \varepsilon),$$

где $a_1, a_2 \in (0, 1]$ — начальные значения при $t = 0$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$ – коэффициенты линейного убывания, $\varepsilon = 0.01$ — нижняя граница для устойчивости расчетов.

Algorithm 1 Метод ABMSelkovFracCos

Require: T, N, $\mathrm{Init} = [x_0, y_0]$
Require: $[a_1, a_2, k_1, k_2, \phi_1, \phi_2, f_1, f_2, \theta]$
Require: $[\nu, w, h]$ - параметры модели
Ensure: x, y, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$

$\tau \leftarrow T/N$
$x[0] \leftarrow x_0$, $y[0] \leftarrow y_0$
Инициализация массивов x, y, α_1, α_2 размером N
▷ Предвычисление дробных порядков
for $j = 0$ **to** $N - 1$ **do**
  $t_j \leftarrow \tau \cdot j$
  $\alpha_1[j] \leftarrow a_1 - k_1 \cdot |\cos(\phi_1 \cdot t_j + f_1)|$
  $\alpha_2[j] \leftarrow a_2 - k_2 \cdot |\cos(\phi_2 \cdot t_j + f_2)|$
end for
for $s = 1$ **to** $N - 1$ **do**
▷ 1. Предиктор
  $\mathrm{sum}_x \leftarrow 0$, $\mathrm{sum}_y \leftarrow 0$
  for $p = 0$ **to** $s - 1$ **do**
    $C_x \leftarrow (s - p + 1)^{\alpha_1[s]} - (s - p)^{\alpha_1[s]}$
    $C_y \leftarrow (s - p + 1)^{\alpha_2[s]} - (s - p)^{\alpha_2[s]}$
    $F_x \leftarrow -x[p]\theta^{1-\alpha_1[p]} + w\theta^{1-\alpha_1[p]}y[p] + h\theta^{1-\alpha_1[p]}x[p]^2y[p]$
    $F_y \leftarrow \nu\theta^{1-\alpha_2[p]} - w\theta^{1-\alpha_2[p]}y[p] - h\theta^{1-\alpha_2[p]}x[p]^2y[p]$
    $\mathrm{sum}_x \leftarrow \mathrm{sum}_x + C_x \cdot F_x$
    $\mathrm{sum}_y \leftarrow \mathrm{sum}_y + C_y \cdot F_y$
  end for
  $x[s] \leftarrow x[0] + \frac{\tau^{\alpha_1[s]}}{\Gamma(\alpha_1[s]+1)} \cdot \mathrm{sum}_x$
  $y[s] \leftarrow y[0] + \frac{\tau^{\alpha_2[s]}}{\Gamma(\alpha_2[s]+1)} \cdot \mathrm{sum}_y$
▷ 2. Корректор
  $\mathrm{sum}_{xx} \leftarrow 0$, $\mathrm{sum}_{yy} \leftarrow 0$
  for $p = 0$ **to** $s - 1$ **do**
    $A \leftarrow (s - p + 2)^{\alpha_1[p]+1} + (s - p)^{\alpha_1[p]+1} - 2(s - p + 1)^{\alpha_1[p]+1}$
    $B \leftarrow (s - p + 2)^{\alpha_2[p]+1} + (s - p)^{\alpha_2[p]+1} - 2(s - p + 1)^{\alpha_2[p]+1}$
    $F_x \leftarrow -x[p]\theta^{1-\alpha_1[p]} + w\theta^{1-\alpha_1[p]}y[p] + h\theta^{1-\alpha_1[p]}x[p]^2y[p]$
    $F_y \leftarrow \nu\theta^{1-\alpha_2[p]} - w\theta^{1-\alpha_2[p]}y[p] - h\theta^{1-\alpha_2[p]}x[p]^2y[p]$
    $\mathrm{sum}_{xx} \leftarrow \mathrm{sum}_{xx} + F_x \cdot A$
    $\mathrm{sum}_{yy} \leftarrow \mathrm{sum}_{yy} + F_y \cdot B$
  end for
  $F_{xs} \leftarrow -x[s]\theta^{1-\alpha_1[s]} + w\theta^{1-\alpha_1[s]}y[s] + h\theta^{1-\alpha_1[s]}x[s]^2y[s]$
  $F_{ys} \leftarrow \nu\theta^{1-\alpha_2[s]} - w\theta^{1-\alpha_2[s]}y[s] - h\theta^{1-\alpha_2[s]}x[s]^2y[s]$
  $x[s] \leftarrow x[0] + \frac{\tau^{\alpha_1[s]}}{\Gamma(\alpha_1[s]+2)} \cdot (F_{xs} + \mathrm{sum}_{xx})$
  $y[s] \leftarrow y[0] + \frac{\tau^{\alpha_2[s]}}{\Gamma(\alpha_2[s]+2)} \cdot (F_{ys} + \mathrm{sum}_{yy})$
end for
return x, y, α_1, α_2

В качестве примера приведен Алгоритм 1 метода ABMSelkovFracCos в виде псевдо-кода. Для остальных методов, реализация аналогична, т.е. пункты 10-36 Алгоритма 1 будут одинаковыми для всех методов, только меняются зависимости 7-8.

Программный комплекс ABMSelkovFracSim 2.0

Программный комлекс ABMSelkovFracSim 2.0 был написан на языке программирования Python [12] в среде PyCharm [13]. На рис. 1 представлен скриншот главного окна программного комплекса в режиме Single calculation.

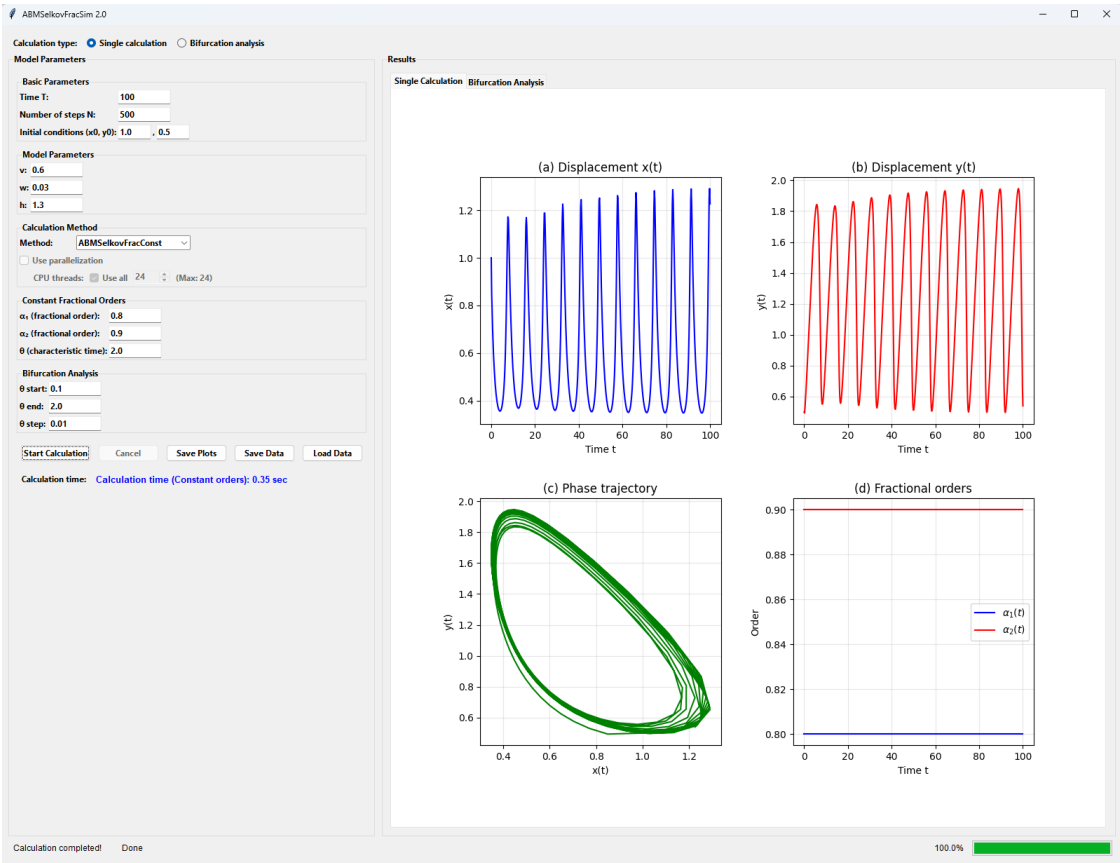

Рис. 1. Скриншот главного окна программного комплекса ABMSelkovFracSim 2.0 в режиме Single calculation

Figure 1. Screenshot of the main window of the ABMSelkovFracSim 2.0 software package in Single calculation mode

На рис. 1 в левой части интерфейса программного комплекса мы видим поля для ввода значений ключевых параметров задачи Коши (1), а также возможность выбора метода решения. Также мы видим два режима Single calculation и Bifurcation analysis. На рис. 1 выбран режим Single calculation, который позволяет по выбраному методу из списка, строить осциллограммы и фазовые траектории. Графики выводятся в правую часть интерфейса главного окна. Для контроля

правильности вычисления также выводятся графики функций $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, они должны принимать значения из полуинтервала $(0, 1]$. На интерфейсе есть кнопки для начала расчета, остановки расчета, сохранение графиков, сохранение результатов расчета в файл с расширением pkl, а также загрузка данных из файла с расширением pkl. Необходимо отметить, что на интерфейс выводится дополнительная информация для пользователя: время расчета, прогесс-бар о выполнении расчета, наличие ошибок при выполнении расчета.

На рис. 2 представлен скриншот главного окна программного комплекса в режиме Bifurcation analysis.

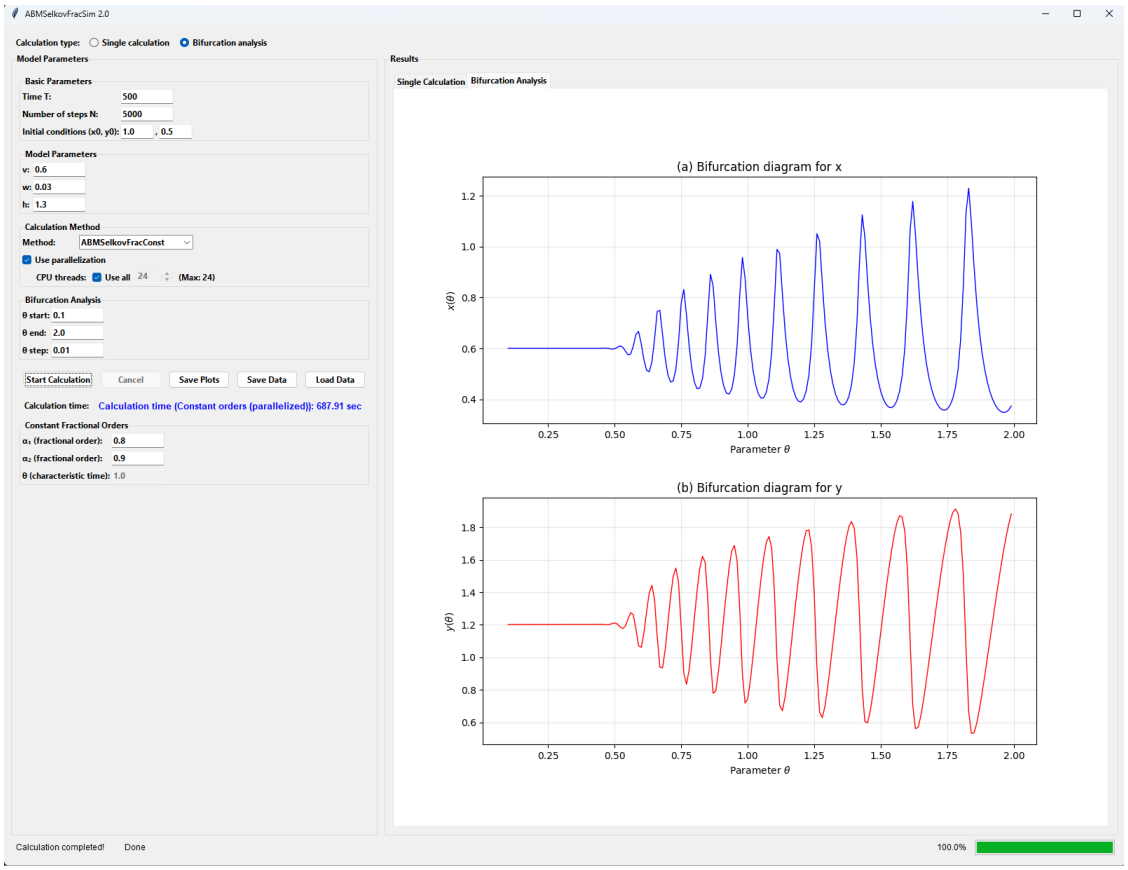

Рис. 2. Скриншот главного окна программного комплекса ABMSelkovFracSim 2.0 в режиме Bifurcation analysis

Figure 2. Screenshot of the main window of the ABMSelkovFracSim 2.0 software package in Bifurcation Analysis mode

При выборе режима Bifurcation Analysis пользователю открывается возможность выбрать параллельную реализацию алгоритма расчета бифуркационной диаграммы. Алгоритм автоматически определяет количество потоков CPU и пользователь может выбрать необходимое количество для более быстрого расчета бифуркационной диаграммы. Также пользователю доступна настройка ключевого параметра, в данном случае θ, в зависимости от котрого строится бифуркационная диаграмма. Пользователь может задать диапазон

изменения значений параметра и его шаг. Также можно сохранять результаты моделирования: графики и полученные данные.

Приведем алгоритм реализации построения бифуркационной диаграммы в виде следующего псевдо-кода.

Algorithm 2 BifurcationAnalysis - Бифуркационный анализ по параметру θ

Require: θ_{start}, θ_{end}, θ_{step} - диапазон и шаг θ
Require: Параметры модели: T, N, Init, $[v, w, h]$
Require: Метод расчета и соответствующие параметры дробных порядков
Ensure: θ_{values}, x_{final}, y_{final} - результаты для каждого θ

```
Создать массив θ_values ← [θ_start : θ_step : θ_end]
n_points ← длина(θ_values)
Инициализировать массивы x_results, y_results
if Использовать параллельные вычисления then
    Определить число потоков: n_threads
    Создать пул процессов из n_threads воркеров
    for θ in θ_values do
        Подготовить параметры для воркера
        Добавить задачу в пул: calculate_single(θ, параметры)
    end for
    while есть незавершенные задачи do
        Получить результат из завершенной задачи
        Сохранить x_final(θ), y_final(θ)
        Обновить прогресс: выполнено / n_points × 100%
    end while
else
    for i = 0 to n_points − 1 do
        θ ← θ_values[i]
        x, y ← выбрать_метод(θ, параметры)
        x_results[i] ← x[N − 1]                    ▷ Конечное значение x
        y_results[i] ← y[N − 1]                    ▷ Конечное значение y
        Обновить прогресс: (i+1) / n_points × 100%
    end for
end if
Отфильтровать результаты с NaN/Inf значениями
Построить бифуркационные диаграммы: x_final(θ), y_final(θ)
return θ_values, x_results, y_results
```

Остановимся более подробнее на параллельной реализации в Алгоритме 2 для расчета бифуркационной диаграммы дробного осциллятора Селькова. Рассмотрим сначала математическую формализацию.

Математическую формализацию для параллельной реализации в Алгоритме 2 можно представить следующим образом:

1. Формулировка задачи

   Дано:

   - Множество параметров $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_M\}$.

   - Функция $F(\theta, t, x, y)$, описывающая систему уравнений в (1).

   - Численный метод решения $ABM(F, \theta, \text{params})$.

   Необходимо найти $\{x_{\text{final}}(\theta_i), y_{\text{final}}(\theta_i)\}$ для всех $\theta_i \in \Theta$.

2. Распараллеливание проводится по данным

$$\text{ParallelCompute}(\Theta) = \bigcup_{i=1}^{M} \text{Compute}(\theta_i),$$

   где $\text{Compute}(\theta_i)$ выполняются независимо.

3. Оптимальное число процессов

   Для системы с C ядрами (потоками) CPU:

$$n_{\text{optimal}} = \min(C, M, n_{\text{max}}),$$

   где n_{max} — ограничение на память.

4. Временная сложность алгоритма определяется для последовательного алгоритма: $T_s = M \cdot t_{\text{calc}}$, а для параллельного алгоритма: $T_p = \frac{M}{n_{\text{optimal}}} \cdot t_{\text{calc}} + t_{\text{overhead}}$, где t_{overhead} включает время на накладные расходы: создание процессов; передачу данных; синхронизацию; сбор результатов.

5. Ускорение (Speedup) можно определить по формуле

$$S(n_{\text{optimal}}) = \frac{T_s}{T_p} = \frac{M \cdot t_{\text{calc}}}{\frac{M}{n_{\text{optimal}}} \cdot t_{\text{calc}} + t_{\text{overhead}}}.$$

6. Эффективность (Efficiency) можно определить по формуле

$$E(n) = \frac{S(n_{\text{optimal}})}{n_{\text{optimal}}} = \frac{T_s}{n_{\text{optimal}} \cdot T_p}.$$

Параллелизация представлена в Алгоритме 3.

Algorithm 3 ParallelBifurcationAnalysis

Require: θ_s, θ_e, $\Delta\theta$, T, N, $[x_0, y_0]$, $[v, w, h]$, method, params, n_w
Ensure: Θ, X, Y

```
τ ← T/N, Θ ← [θ_s : Δθ : θ_e], n ← |Θ|
Инициализировать X, Y размера n
cp ← {T, N, Init : [x_0, y_0], par : [v, w, h], method, method_params : params}
ex ← ProcessPoolExecutor(n_w), futures ← []
for i = 0 to n − 1 do
    tp ← cp, tp.θ ← Θ[i]
    futures.append(ex.submit(calculate_single_theta, tp))
end for
done ← 0, err ← 0
while done < n do
    for all fut ∈ as_completed(futures) do
        done ← done + 1
        if fut.exception() then
            err ← err + 1, continue
        end if
        θ_i, x_i, y_i ← fut.result()
        idx ← find_index(Θ, θ_i)
        X[idx] ← x_i, Y[idx] ← y_i
    end for
end while
ex.shutdown()
valid ← ¬(isnan(X) ∨ isnan(Y) ∨ isinf(X) ∨ isinf(Y))
return Θ[valid], X[valid], Y[valid]
```

Результаты исследований

Рассмотрим некоторые примеры работы программного комплекса ABMSelkovFracSim 2.0. Расчеты в этой статье проводились на персональном компьютере с процессором 12th Gen Intel(R) Core(TM) i9-12900KF с тактовой частотой 3.20 ГГц, 16 ядрами (24 потока) с максимальной частотой до 5.2 ГГц, 64 ГБ оперативной памяти и операционной системой Windows 11 Pro.

Пример 1. Выберем метод расчета ABMSelkovFracCos. Значения параметров: $T = 200, N = 3000, x_0 = 1, y_0 = 0.5, v_0 = 0.6, w_0 = 0.03, h_0 = 1.3, a_1 = 0.8, a_0 = 0.9, k_1 = 0.04, k_2 = 0.02, \phi_1 = 3.5, \phi_1 = 1.5, f_1 = f_2 = 0$.

$$\alpha_1(t) = 0.8 - 0.04\cos(3.5t), \alpha_2(t) = 0.9 - 0.02\cos(1.5t).$$

Для построения бифуркационной диаграммы выбирался параметр $\theta \in [0.1, 2]$ с шагом $h = 0.01$.

Результаты расчета бифуркационной диаграммы для Примера 1 приведены на рис. 3

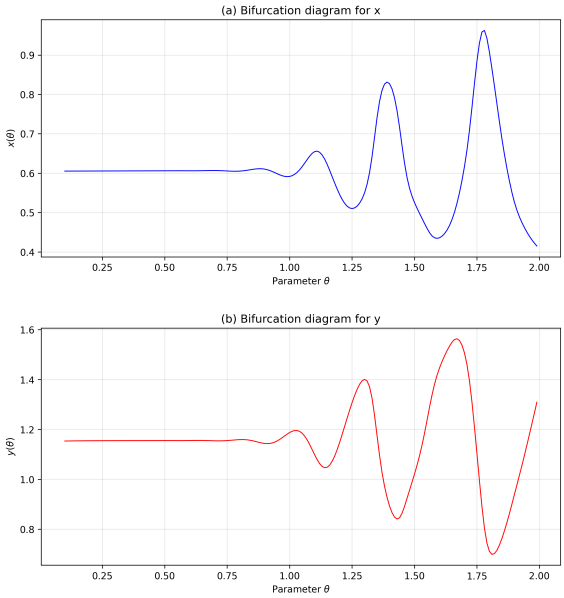

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для Примера 1
Figure 3. Bifurcation diagram for Example 1

Мы видим, что на рис. 3 есть области изменения значений параметра θ при котором поведение функций $x(\theta)$ и $y(\theta)$ заметно отличается, что указывает на возможную смену режимов дробного осциллятора Селькова. Примерно на интервале $\theta \in [0.1, 0.9]$ мы видим спокойной поведение этих функций без вслесков, а на интервале $\theta \in [1, 2]$ мы видим всплески функций колебательного характера с возрастающей амплитудой. Построим осциллограммы и фазовые траекториии для каждого из интервалов. Выберем для первого интервала $\theta = 0.5$, а для второго $\theta = 1.5$.

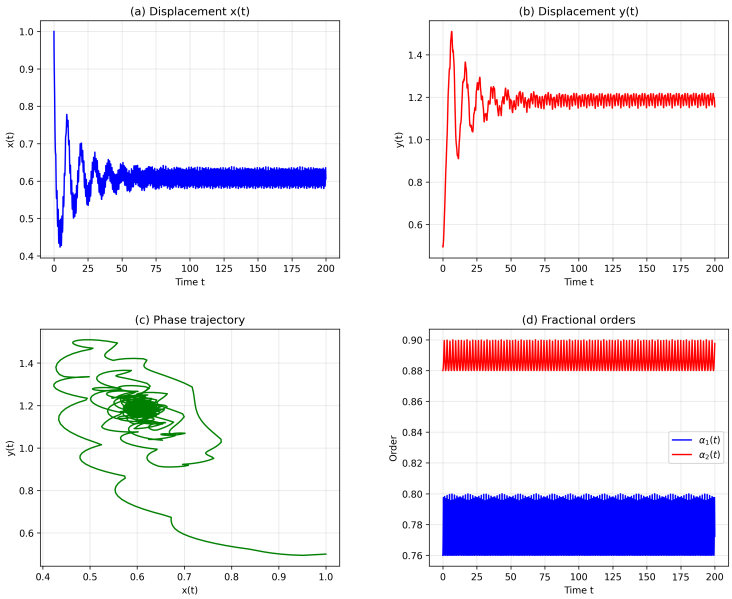

Рис. 4. Осциллограммы и фзовая траектория для Примера 1 при $\theta = 0.5$
Figure 4. Oscillograms and phase trajectory for Example 1 at $\theta = 0.5$

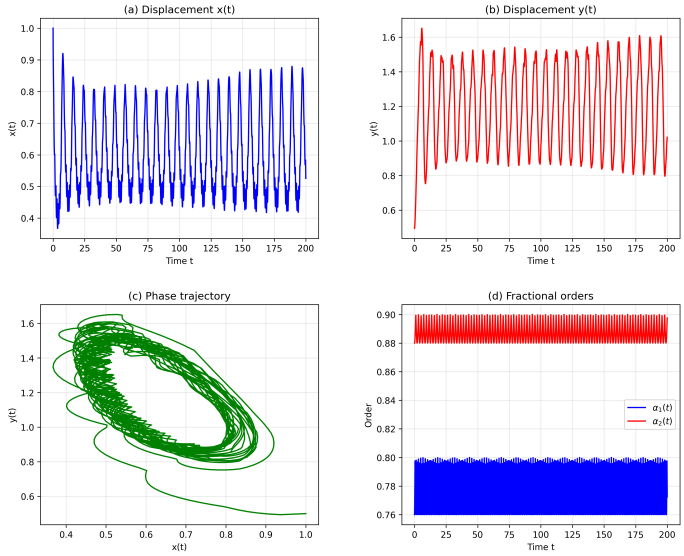

Рис. 5. Осциллограммы и фзовая траектория для Примера 1 при $\theta = 1.5$
Figure 5. Oscillograms and phase trajectory for Example 1 at $\theta = 1.5$

На рис.4 мы видим, что колебания затухают до некоторого момента времени, а потом происходят сложные колебания похожие на хаотические, значения амплитуды которых сильно не меняется. На рис.5 мы видим выход фазовой траектории на некоторый аттрактор или областья притяжения. Причем эта область увеличивается при увеличении значений θ. Отметим, что системе нужно некоторое время для выхода на тот или иной режим, что указывает на наличие памяти в системе. Кроме того, засчет того, что порядки дробных производных описывают колебательный процесс, то и вазовые траектории также испутывают колебания, что сильно усложняет поведение системы.

Пример 2. Рассмотрим другой пример. Выберем метод расчета ABMSelkovFracEXP. Значения параметров возьмем из предыдущего примера.

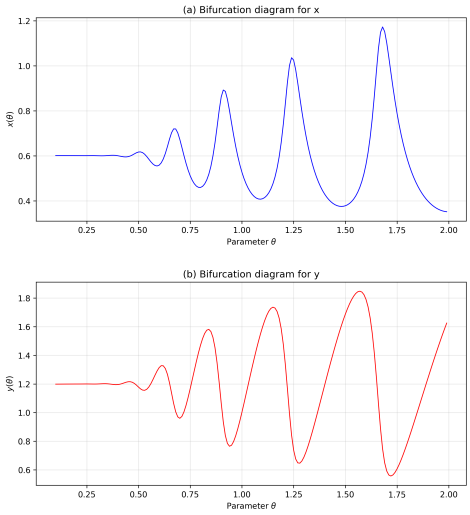

Рис. 6. Бифуркационная диаграмма для Примера 2
Figure 6. Bifurcation diagram for Example 2

На рис. 6 мы также видим два диапазона изменения θ: $[0.1, 0.49]$, $[0.5, 2]$, на которых динамика отличается. Построим осциллограммы и фазовые траектории при конретных значениях θ.

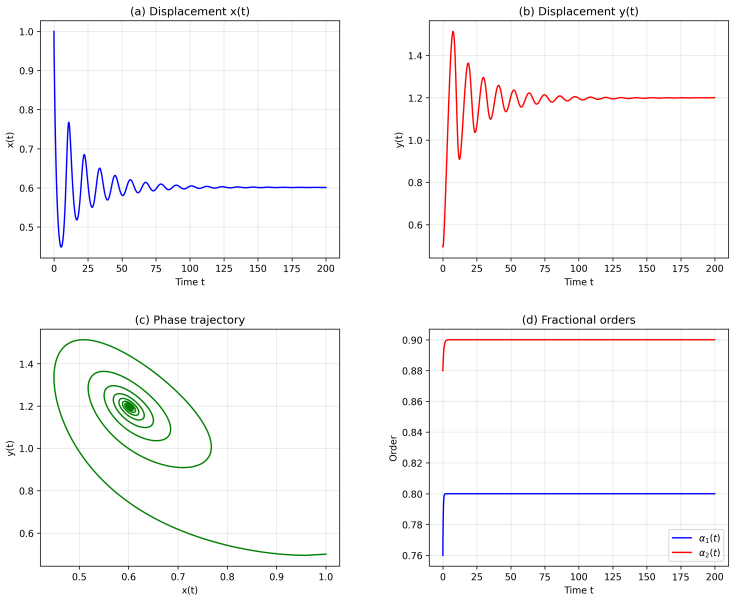

Рис. 7. Осциллограммы и фзовая траектория для Примера 2 при $\theta = 0.25$
Figure 7. Oscillograms and phase trajectory for Example 2 at $\theta = 0.25$

На рис. 7 мы видим затухающий режим при $\theta = 0.25$.

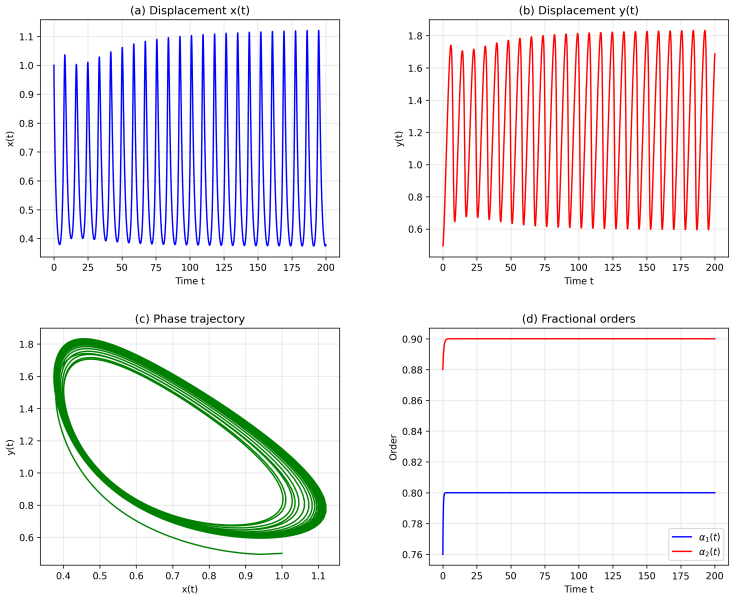

Рис. 8. Осциллограммы и фзовая траектория для Примера 2 при $\theta = 1.5$
Figure 8. Oscillograms and phase trajectory for Example 2 at $\theta = 1.5$

На рис. 8 мы видим релаксационные колебания при $\theta = 1.5$, фазовая траектория выходит на предельный цикл.

Отметим, что построение бифуркационной диаграммы рис. 6 для последовательного варианта заняло 3676.87 с., а для параллельного 334.47

с., т.е. параллельный вариант сработал в 11 раз быстрее последовательного. Это обусловлено тем, что последовательная версия алгоритма нагружала CPU всего на 9-10%, а в параллельной версии нагрузка доходила до 100%, т.е. были задействованы все 24 потока CPU.

Заключение

В работе было дано описание новой версии программного комплекса ABMSelkovFracSim, в котором были реализованы различные методы расчета осциллограмм и фазовых траекторий в зависимости от типа функций $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$. Предложен модуль расчета бифуркационной диаграммы – зависимости решения $x(\theta)$ и $y(\theta)$ от характерного масштаба θ с учетом выбора метода расчета в последовательном и параллельном исполнении. Показано, что бифуркационная диаграмма дает информацию о смене режимов дробного осциллятора Селькова, а параллельная версия ее расчета в 11 раз быстрее последовательной. Поэтому программный комплекс ABMSelkovFracSim 2.0 позволяет проводить количественный и качественный анализ дробного осциллятора Селькова. Дальнейшее развитие программного комплекса связано с добавлением возможности построения бифуркационных диаграмм по другим ключевым параметрам дробного осциллятора Селькова, например, ν, w, h. Также предполагается разработка модуля исследования регулярных и хаотических режимов с помощью алгоритма Тест 0-1 [10, 23, 24].

Аббревиатуры

CPU центральный процессор
АБМ метод Адамса-Башфорта-Мултона

Список литературы

1. Selkov E. E. Self-oscillations in glycolysis. I. A simple kinetic model // Eur. J. Biochem, 1968. no. 4, pp. 79–86.
2. Маковецкий В. И., Дудченко И. П., Закупин А. С. Автоколебательная модель источников микросейсм // Геосистемы переходных зон, 2017. №4(1), С. 37–46.
3. Parovik R.I. Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms // Mathematics, 2022. Т. 10, №22, 4208 DOI: 10.3390/math10224208.
4. Паровик Р. И. Исследование дробной динамической системы Селькова // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2022. Т. 41, №4, С. 146-166 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-146-166.
5. Rabotnov Y. N. *Elements of Hereditary Solid Mechanics*: Mir, 1980.
6. Volterra V. *Functional Theory, Integral and Integro-Differential Equations*: Dover Publications, 2005.
7. Schroeder M. *Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise*: Courier Corporation, 2009.
8. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и их приложения.* М.: Физматлит. 272 с.
9. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2006.

10. Паровик Р. И. Качественный анализ дробной динамической системы Селькова с переменной памятью с помощью модифицированного алгоритма Тест 0-1 // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2023. Т. 45, №4, С. 9-23 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-9-23.
11. Паровик Р. И. Исследование бифуркационных диаграмм дробной динамической системы Селькова для описания автоколебательных режимов микросейсм // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки, 2024. Т. 49, №4, С. 24-35 DOI: 10.26117/2079-6641-2024-49-4-24-35.
12. Shaw Z. A. *Learn Python the Hard Way*: Addison-Wesley Professional, 2024.
13. Van Horn B. M., Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications Like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*: Packt Publishing Ltd, 2023.
14. Паровик Р.И. *ABMSelkovFracSim – программный комплекс для качественного и количественного анализа дробной динамической системы Селькова*, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024681529 Российская Федерация. заявл. 11.09.2024 : опубл. 11.09.2024. заявитель Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космофизических исследований и распространения радиоволн Дальневосточного отделения Российской академии наук.
15. Parovik R. Selkov's Dynamic System of Fractional Variable Order with Non-Constant Coefficients // Mathematics, 2025. vol. 13, no. 3 DOI: 10.3390/math13030372.
16. Aguilar J. F. G., Hernández M. M. Space-Time Fractional Diffusion-Advection Equation with Caputo Derivative // Abstract and Applied Analysis, 2014. vol. 2014, pp. 1–8 DOI: 10.1155/2014/283019.
17. Novozhenova O. G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2017. vol. 20 (3), pp. 790–809 DOI: 10.1515/fca-2017-0040.
18. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // Meccanica, 2017. vol. 52 (13), pp. 3043–3052 DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y.
19. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2020. vol. 476 (2234), 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
20. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations // Nonlinear Dynamics, 2002. vol. 29 (1/4), pp. 3–22 DOI: 10.1023/A:1016592219341.
21. Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system // ANZIAM Journal, 2006. vol. 47, 168 DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.
22. Parovik R. I., Tverdyi D. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation // Mathematical and Computational Applications, 2021. vol. 26, no. 3, 55 DOI: 10.3390/mca26030055.
23. Gottwald G. A., Melbourne I. On the Implementation of the 0–1 Test for Chaos // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2009. vol. 8(1), pp. 129–145 DOI: 10.1137/080718851.
24. Armand Eyebe Fouda J. S., Bodo B., Sabat S. L., Effa J. Y. A Modified 0-1 Test for Chaos Detection in Oversampled Time Series Observations // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014. vol. 24 (05), 1450063 DOI: 10.1142/S0218127414500631.

Информация об авторе

Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, профессор ДВО РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Selkov E. E. Self-oscillations in glycolysis. I. A simple kinetic model. Eur. J. Biochem. 1968. no. 4. pp. 79–86.

[2] Makovetsky V. I., Dudchenko I. P., Zakupin A. S. Auto oscillation model of microseism's sources. Geosist. Pereh. Zon. 2017. no. 4. pp. 37–46 (In Russian).

[3] Parovik R. I. Studies of the Fractional Selkov Dynamical System for Describing the Self-Oscillatory Regime of Microseisms. Mathematics. 2022. vol. 10, No. 22. 4208. DOI: 10.3390/math10224208.

[4] Parovik R. I. Investigation of the Selkov fractional dynamical systems. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2022. vol. 41. no. 4. pp. 146-166. DOI:10.26117/2079-6641-2022-41-4-146166 (In Russian).

[5] Rabotnov Y. N. Elements of Hereditary Solid Mechanics, Mir. 1980.

[6] Volterra V. Functional Theory, Integral and Integro-Differential Equations, Dover Publications. 2005.

[7] Schroeder M.Fractals, chaos, power laws: Minutes from an infinite paradise. Courier Corporation. 2009.

[8] Nakhushev A. M. Fractional calculus and its applications, FIZMATLIT, Moscow. 2003. 272 p. (In Russian).

[9] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands. 2006.

[10] Parovik R. I. Qualitative analysis of Selkov's fractional dynamical system with variable memory using a modified Test 0-1 algorithm. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2023. vol. 45. no. 4. pp. 9-23. DOI:10.26117/2079-6641-2023-45-4-9-23 (In Russian).

[11] Parovik R.I. Study of bifurcation diagrams of Selkov's fractional dynamic system to describe self-oscillatory modes of microseisms. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2024. vol. 49. no. 4. pp. 24-35. DOI:10.26117/2079-6641-2024-49-4-24-35 (In Russian).

[12] Shaw Z.A. Learn Python the Hard Way. Addison-Wesley Professional. 2024.

[13] Van Horn B.M., Nguyen Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications Like a Pro with the Ultimate Python Development Tool, Packt Publishing Ltd. 2023.

[14] Parovik R. I. ABMSelkovFracSim — a software package for the qualitative and quantitative analysis of the Selkov fractional dynamic systemCertificate of state registration of computer program No. 2024681529 Russian Federation. Appl. 11.09.2024: Published 11.09.2024. Applicant: Federal State Budgetary Scientific Institution Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences. (In Russian).

[15] Parovik R. Selkov's Dynamic System of Fractional Variable Order with Non-Constant Coefficients. Mathematics. 2025. Vol. 13, No. 3. DOI: 10.3390/math13030372.

[16] Aguilar J. F. G., Hernández M. M. Space-Time Fractional Diffusion-Advection Equation with Caputo Derivative. Abstract and Applied Analysis. 2014. vol. 2014. pp. 1–8. DOI: 10.1155/2014/283019

[17] Novozhenova O. G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2017. vol. 20 (3). pp. 790–809. DOI: 10.1515/fca-2017-0040.

[18] Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena. Meccanica. 2017. vol. 52 (13). pp. 3043–3052. DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y.

[19] Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2020. vol. 476 (2234). 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.

[20] Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A Predictor-Corrector Approach for the Numerical Solution of Fractional Differential Equations. Nonlinear Dynamics. 2002. vol. 29 (1/4). pp. 3–22. DOI: 10.1023/A:1016592219341

[21] Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system. ANZIAM Journal. 2006. vol. 47. 168. DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.

[22] Parovik R. I., Tverdyi D. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation. Mathematical and Computational Applications. 2021. vol. 26, no. 3. 55. DOI: 10.3390/mca26030055

[23] Gottwald G. A., Melbourne I. On the Implementation of the 0–1 Test for Chaos. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2009. 8 (1): 129–145. DOI: 10.1137/080718851

[24] Armand Eyebe Fouda J. S., Bodo B., Sabat S. L., Effa J. Y. A Modified 0-1 Test for Chaos Detection in Oversampled Time Series Observations. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. 24 (05): 1450063. DOI: 10.1142/S0218127414500631

Information about the author

Parovik Roman Ivanovich – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor FEB RAS, Leading Researcher at the Laboratory of Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, v. Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.