



Метод ранговой кустовой оптимизации больших разветвленных потоковых сетей с вогнутой целевой функцией

М. Б. Абазоков *

Институт прикладной математики и автоматизации КВНЦ РАН, 360000, Нальчик,
ул. Шортанова, 89 А, Россия

Аннотация. Задача проектирования и оптимизации больших разветвленных потоковых сетей регионального и межрегионального водоснабжения является актуальной из-за недостатка водных ресурсов. Задача оптимизации таких сетей является NP-полной существенно-многоэкстремальной задачей. Для решения данной задачи был разработан метод полной ранговой оптимизации (Р-оптимизация), основанный на системном принципе оптимальности "Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условий с остальной сетью)". Однако данный метод оптимизации при больших значениях ранга P требует значительного машинного времени. Для снижения размерности задачи был разработан метод построения больших потоковых распределительных сетей высокого ранга оптимальности на основе кустовой оптимизации. Кустовая оптимизация ограничивает область поиска решения и за счет этого позволяет повысить достижимый ранг оптимальности. Кустовая оптимизация связывает с каждой вершиной сети соответствующий ей подграф базового графа (куст), выделяемый на текущем остоном дереве и имеющий определенную размерность. На каждом кусте проводится полная ранговая оптимизация и достигается более высокий ранг оптимальности чем при полной ранговой оптимизации всей сети. При этом общее время кустовой оптимизации не превышает времени полной ранговой оптимизации всей сети. В статье разработан метод выделения куста, позволяющий единственным образом построить куст с заранее заданным предельным количеством вершин. В разработанном методе не требуется указывать диапазон количества вершин, а только заранее задаются предельное количество вершин куста и ранг оптимизации. Методы полной ранговой и кустовой оптимизации предлагается использовать при проектировании и оптимизации больших потоковых распределительных трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения.

Ключевые слова: большие потоковые распределительные сети, оптимизация структуры, ранги экстремумов, метод ранговой оптимизации, метод кустовой оптимизации, компьютерное проектирование, сеть регионального и межрегионального водоснабжения, снижение размерности задачи.


Получение: 11.09.2025; Исправление: 04.10.2025; Принятие: 28.10.2025; Публикация онлайн: 10.11.2025

Для цитирования. Абазоков М. Б. Метод ранговой кустовой оптимизации больших разветвленных потоковых сетей с вогнутой целевой функцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 52. № 3. С. 75-95. EDN: QN1KKU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-75-95>.

Финансирование. Научное исследование проведено без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: Abazokov.Mukhammed@yandex.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License



© Абазоков М. Б., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)



The Method of Rank Bush Optimization for the Large Branched Stream Networks with Concave Objective Function

*M. B. Abazokov**

Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

Abstract. The design and optimization of large-scale branched stream networks for regional and inter-regional water supply is an urgent task due to the scarcity of water resources. Optimizing such networks is NP-complete "essentially-multi-extremality" problem. To solve this problem, the directly optimizing rank-based measures (P-optimization) was developed. The method is based on the principle of system optimality: "Every part of the optimal system is optimal (if the boundary conditions with the rest of the network are fixed)". However, for large values of the rank P , this approach requires considerable computational time, since the computational time for solving the problem is exponential in rank P . In order to reduce the dimensionality of the problem, a method grounded on the bush optimization in the construction of the large-scale water distribution network with a high optimality rank has been developed and proposed. This technique restricts the solution search space and thus allows achieving the higher rankings. Thus, the designed approach associates each network vertex with a corresponding subgraph of the base graph (a bush). The subgraph is marked in the current spanning tree and has a certain dimensionality. The direct optimization applied to each bush provides a higher order of optimality than when it is applied to the entire network. At the same time, the total bush optimization time does not exceed the entire network optimization time. This paper proposes the method that provides to uniquely constructing a bush with a predetermined marginal number of vertexes. In addition, the developed method does not require specifying a range of the number of vertexes; it only needs to specify a predetermined marginal number of bush vertexes and the rank of optimization. The direct rank and bush optimization methods presented here are intended for use in the design and optimization of large-scale regional and interregional water distribution networks.

Key words: large water distribution networks, structure optimization, ranks of extrema, rank optimization method, bush optimization method, computer-aided design, regional and interregional water distribution network, dimensionality reduction.


Received: 11.09.2025; Revised: 04.10.2025; Accepted: 28.10.2025; First online: 10.11.2025

For citation. Abazokov M. B. The method of rank bush optimization for the large branched stream networks with concave objective function. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, 52: 3, 75-95. EDN: QNIKKU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-75-95>.

Funding. The scientific research was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

*Correspondence:  E-mail: Abazokov.Mukhammed@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Abazokov M. B., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)



1 Задача синтеза разветвленной потоковой сети

Задача синтеза разветвленной потоковой сети (РПС) состоит в следующем

$$z(v) = \sum_{ij \in D} c(v_{ij}) l_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^+} v_{ij} - \sum_{k \in \Gamma_j^-} v_{jk} = g_j, \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_1^-} v_{1j} = Q, \quad (3)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in D, \quad (4)$$

где $\Gamma(B, D)$ – заданный оргграф возможных соединений вершин сети; B и D – множества его вершин и дуг; v_{ij} – искомое значение величины потока (i, j) -й дуги, c_{ij} , l_{ij} – заданные удельная стоимость и длина (i, j) -й дуги; Q – заданный поток в сеть; g_j – заданный расход потока в j -м узле сети. Γ_j^+ и Γ_j^- – соответственно множества дуг, входящих и исходящих. Целевая функция (1) отражает стоимость потоков сети, ограничение (2) есть уравнение неразрывности потока, соотношение (3) говорит о том, что узел 1 является источником потока. Функция $c(v_{ij})$ непрерывна, строго вогнута (выпукла вверх) и возрастает, $c(0) = 0$. В связи с этим экстремумы могут достигаться лишь в угловых точках транспортного многогранника (2)-(4) (см. [1, стр. 17-18]). Задача, как известно, является NP-полной существенно-многоэкстремальной задачей.

В работах [2-4] было показано, что задача компьютерного проектирования больших трубопроводных сетей с учетом капитальных и энергетических затрат сводится к задаче с целевой функцией

$$F(v) = \eta \sum_{ij}^n v_{ij}^\delta l_{ij}.$$

т.е. к целевой функции вида (1). Здесь

$$\eta = \left(\left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}, \quad \delta = \frac{\alpha\beta + \alpha}{\alpha + \gamma},$$

α , β , γ – гидравлические параметры, зависящие от материала труб сети; a , b , k , p – заданные коэффициенты. Коэффициенты α , β , γ , k представлены в таблице 1, сформированной на основе информации из [5].

Таблица 1

Значения гидравлических параметров труб из различных материалов
 Values of hydraulic parameters of pipes made of different materials

Материал труб	Коэффициенты			
	α	β	γ	k
Сталь	1.4	2	5.3	0.001735
Чугун	1.6	2	5.3	0.001735
Асбестоцемент	1.95	1.85	4.89	0.001180
Пластмасса	1.95	1.774	4.774	0.001052

Например для пластмассы $\delta \approx 0.8045$. В дальнейшем, для простоты, в вычислительном эксперименте будем брать $\delta = 0.5$ (т.е. $c(v_{ij}) = \sqrt{v_{ij}}$).

Для нелокального решения задачи (1)-(4) предложено несколько методов.

2 Существующие методы решения задачи

Рассмотрим наиболее известные методы решения задачи: метод погружения и метод ветвей и границ.

2.1 Метод погружения

Метод погружения для решения задачи минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике изложен в работе [6]. В работах [7], [8, с. 65-83] метод модифицирован для решения задачи на транспортном многограннике. Суть метода состоит в следующем. Из текущей угловой точки выпуклого многогранника ограничений переходим в такую смежную к ней, в которой значение целевой функции меньше, чем в исходной. При достижении угловой точки транспортного многогранника, в которой значение целевой функции меньше, чем в смежных к ней, проводим из этой угловой точки прямые, проходящие по ребрам многогранника ограничений через смежные к ней точки вне многогранника, и определяем на них точки, в которых целевая функция достигает того же значения, что и в исходной угловой точке локального экстремума. По этим точкам проводим гиперплоскость и отделяем от многогранника ограничений полученный симплекс, вершиной которого является точка локального экстремума, запоминаем значение целевой функции в этой точке. Далее определяется на полученном многограннике следующая точка экстремума и т.д. до тех пор, пока на очередной итерации текущий многогранник не будет целиком погружен в отсекаемую часть. После этого определяется та из отсеченных угловых точек, в которой значение локального экстремума целевой функции минимально.

В [9, с. 131-132] отмечен следующий недостаток метода: «При $n = 51$ возникали трудности из-за медленной сходимости вычислительного процесса отсечений. Было предложено осуществлять сдвиг отсекающей гиперплоскости на

некоторую величину h , что привело к трудно решаемой проблеме выбора данной величины: при повышенном значении h пропускаются локальные экстремумы целевой функции, а при малых h процесс оптимизации требует чрезмерного машинного времени».

2.2 Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ, представленный в работах [10], [11, с. 206-216] основан на последовательном делении множества допустимых решений с отбрасыванием подмножеств, которые имеют высокую нижнюю оценку минимизируемой функции. Теоретически это обеспечивает получение глобального минимума, но с заданной допустимой погрешностью. В [9] отмечено, что если эта величина мала, то процесс сходится медленно. Добавим, что целевая функция аппроксимируется вогнутой кусочно-линейной функцией с несколькими звеньями, что уже дает значительную погрешность в решении задачи минимизации вогнутой функции на транспортном многограннике. Увеличение количества звеньев приводит к резкому увеличению времени решения задачи.

3 Ранги экстремумов

Для существенно многоэкстремальных задач большой размерности локальный экстремум не информативен. Поэтому в работах [12–14] введена градация экстремумов и представлены методы нелокальной оптимизации задачи (1)-(4), ориентированные на получение экстремума достижимого ранга за экономически оправданное время решение задачи на ЭВМ.

Определение 1. Точкой экстремума P -го ранга задачи (1)-(4) назовем такую угловую точку $\{v_{ij}^*\}_{ij \in D}$ транспортного многогранника (2)-(4), которая является точкой глобального минимума на выпуклой линейной комбинации вершин многогранника, имеющих смежность в промежутке $[1, P]$ к этой точке.

Любой вершине транспортного многогранника, как известно, соответствует базисное решение задачи, т.е. некоторое остовное дерево заданного орграфа сети $\Gamma(B, D)$. $[1, P]$ – это множество угловых точек многогранника достижимых из заданной угловой точки. Целью является построение остовного дерева графа $\Gamma(B, D)$, имеющего наибольший ранг.

Для того, чтобы перевести это определение на язык теории сетей было введено понятие фрагментов P -го ранга сети.

Определение 2. P -фрагментом сети назовем замыкаемые любыми P хордами графа $\Gamma(B, D)$ P контуров на текущем остовном дереве T графа $\Gamma(B, D)$.

Теорема. (*Условие ранговой оптимальности для сетевой задачи*)

Для того, чтобы решение $\{v_{ij}^*\}_{ij \in D}$, где $v_{ij} = 0 \forall (i, j) \notin T$, задачи (1)-(4) было экстремумом P -го ранга, необходимо и достаточно, чтобы оно было

оптимально по всем фрагментам P -го ранга $\Phi_{T,P}$ на T , т.е.

$$\sum_{(i,j) \in \Phi_{T,P}} c(v_{ij}^*) l_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in D} c(v_{ij}) l_{ij},$$

где $\{v_{ij}\}_{(i,j) \in D}$ – любое допустимое решение задачи, но такое, что $v_{ij} = v_{ij}^*$ $\forall (i,j) \notin \Phi_{T,P}$.

Доказательство теоремы приведено в работе [12].

4 Суть метода ранговой оптимизации разветвленной потоковой сети

Метод ранговой оптимизации представлен в работах [12, 14] Его суть состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов все более высокого ранга.

При оптимизации 1-го ранга на очередной итерации выделяется очередная хорда (i, j) и соответствующий ей фрагмент 1-го ранга (контур сети) на T . Проведя оптимизацию полученного фрагмента, определяем очередную независимую переменную относительно полученного решения и переходим к оптимизации соответствующего фрагмента. Процесс оптимизации 1-го ранга системы завершается при получении решения, которое не может быть улучшено внесением в оптимизируемое текущее остовное дерево любой из его хорд и соответствующим изменением потоков по образованному при этом контуру.

Далее переходим к оптимизации 2-го ранга. Для этого выделяем на каждой очередной итерации очередную пару хорд и соответствующие им фрагменты 1-го ранга. В том случае, когда эти фрагменты пересекаются, формируем фрагмент 2-го ранга – объединение двух фрагментов 1-го ранга. Решаем задачу оптимизации фрагмента 2-го ранга и переходим к следующей итерации. В том случае, если фрагменты 1-го ранга не пересекаются, также переходим к следующей итерации, т.к. оптимизация фрагментов 1-го ранга по отдельности была проведена при оптимизации 1-го ранга системы.

Аналогичным образом, после проведения оптимизации $(P - 1)$ ранга системы, проводим оптимизацию P -го ранга. Для этого формируем наборы из P хорд, объединение соответствующих контуров 1-го ранга которых образует связный подграф графа системы, и проводим оптимизацию таких фрагментов. Оптимизация системы прекращается при достижении оптимума P -го ранга либо заданного времени решения задачи на компьютере. Таким образом, метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации её связных контуров P -го ранга, что позволяет снизить размерность задачи.

4.1 Вычислительный эксперимент полной ранговой оптимизации

Была проведена полная оптимизация 3-го ранга на плотном базовом графе (ПБГ) при $n = 101$ (рис. 1).

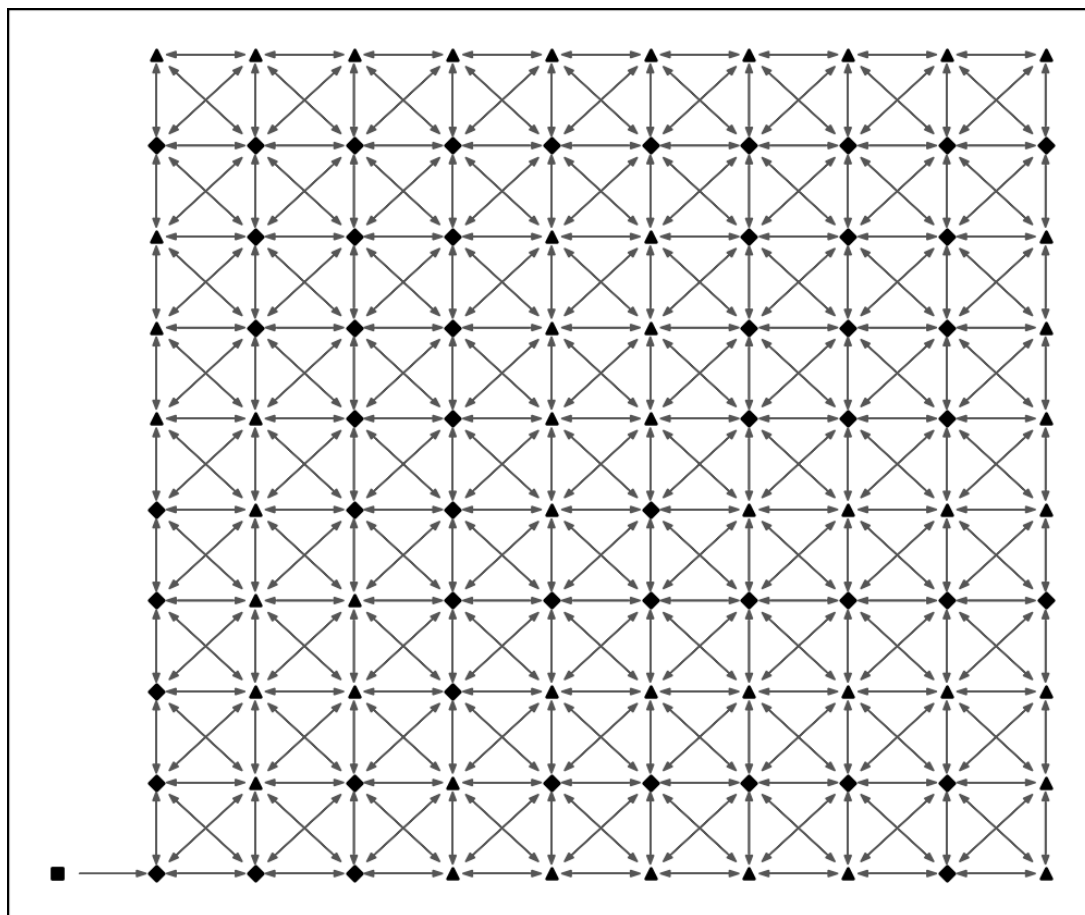


Рис. 1. Плотный базовый граф

Figure 1. Dense basic graph

Результаты полной ранговой 3-оптимизации представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты полной ранговой 3-оптимизации
Full 3rd rank optimization results

Оптимизация	1-оптимизация	Доведение до 2-оптимальности	Доведение до 3-оптимальности
Стоимость сети «до»	248.928 у.е.	230.889 у.е.	229.195 у.е.
Суммарное количество улучшений сети	59	23	1
Снижение стоимости	18.039 у.е.	1.694 у.е.	0.005 у.е.
Время (час:мин)	<00:01	00:12 (00:12 с начала)	08:12 (08:24 с начала)
Стоимость сети «после»	230.889 у.е.	229.195 у.е.	229.190 у.е.

Как видно из таблицы 2, общее время построения 3-оптимальной потоковой сети на ПБГ составляет около 8.5 часов.

На рисунке 2 приведены: начальное остовное дерево (а), деревья 1-го, 2-го, 3-го рангов оптимальности (б, в, г соответственно).

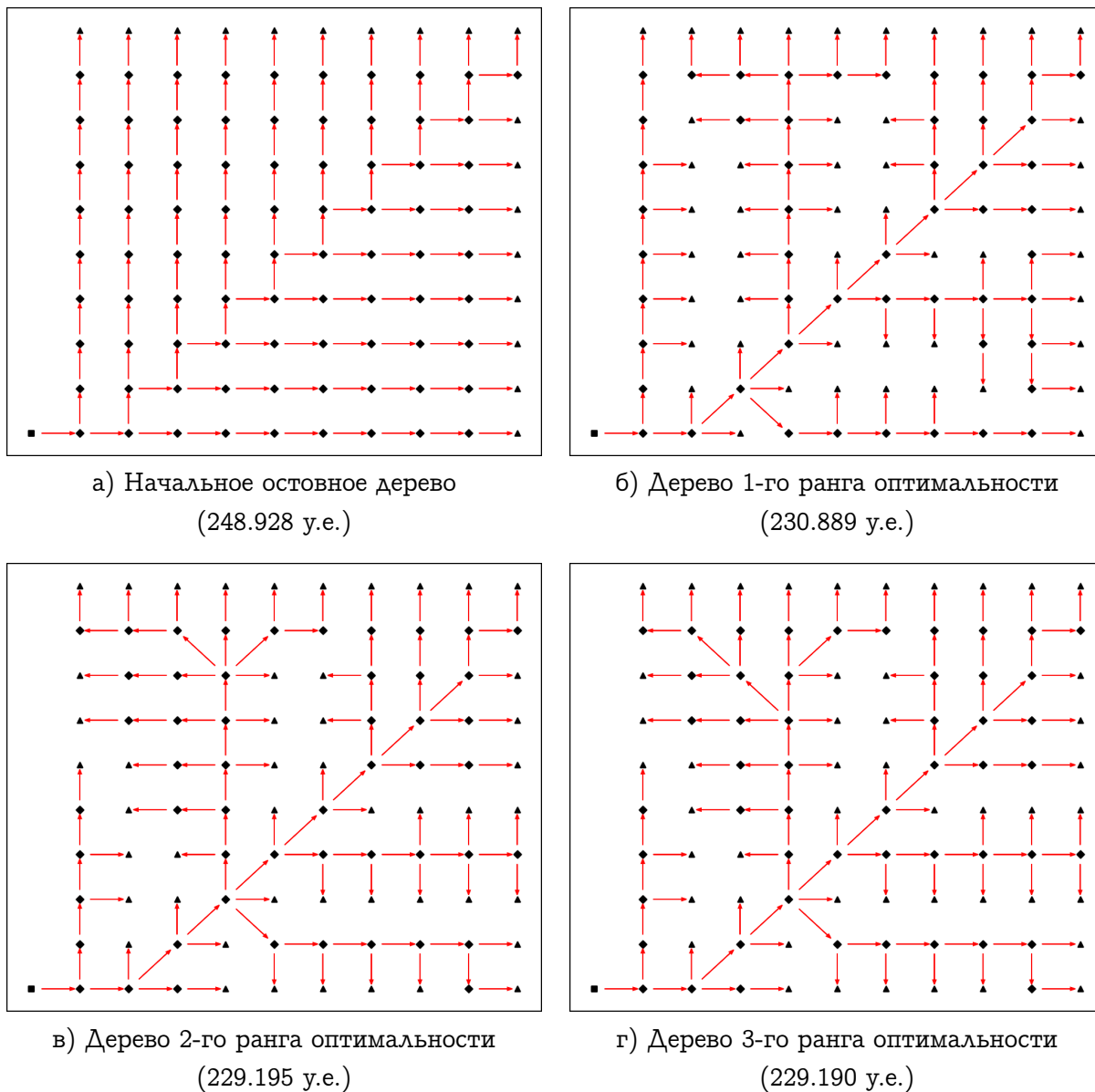


Рис. 2. Результаты полной ранговой 3-оптимизации
Figure 2. Full 3rd rank optimization results

5 Кустовая оптимизация

5.1 Суть метода кустовой оптимизации

Полная Р-оптимизация сети позволяет просматривать все комбинации вставок Р хорд на всей сети и уменьшать стоимость при нахождении более оптимальной комбинации хорд. Она позволяет найти Р-оптимальную сеть, т.е. сеть которую

невозможно улучшить (уменьшить стоимость) вставкой любой комбинации P хорд и удалением соответствующих им дуг сети.

Однако данный метод оптимизации при больших значениях P требует значительного машинного времени.

Для дальнейшей оптимизации следует уменьшить область поиска. Если раньше оптимизировалась вся сеть, то теперь в базовом графе на текущем остоном дереве топологически выделится подграф, размерность которого меньше размерности всей сети, и уже на этом подграфе проводится оптимизацию большего ранга.

В нашей работе [15] был выбран подграф типа "куст". Кустом из вершины i назывался подграф базового графа, содержащий все 1-достижимые, 2-достижимые, ..., t -достижимые вершины из вершины i на текущем остоном дереве. Куст также содержал дуги (ветви и хорды), соединяющие вершины данного подграфа.

Куст выделялся на базового графе топологически и содержал меньшее количество хорд в сравнении со всей сетью. Это позволяло проводить на кусте оптимизацию более высокого ранга в сравнении с оптимизацией, которую можно провести на всей сети за доступное машинное время (напомним, что время выполнения оптимизации напрямую зависит от ранга оптимизации и количества хорд в графе).

5.2 Увеличение ранга оптимальности подсетей P -оптимальной разветвленной потоковой сети

Обозначим T_n^P время компьютерного проектирования n -вершинной РПС P -го ранга оптимальности на заданном избыточном базовом графе (БГ) возможных соединений её вершина друг с другом.

Поскольку при оптимизации осуществляется направленный перебор связанных P -фрагментов сети, т.е. фрагментов, образуемых внесением в текущую оптимизируемую сеть любых P хорд БГ и удалением из сети встречных им дуг, то

$$T_n^P = \eta C_n^P, \quad (5)$$

где η – постоянный коэффициент – доля связанных P -фрагментов сети умноженная на среднее время вычисления стоимости одного P -фрагмента. Получим

$$\frac{T_n^{P+1}}{T_n^P} = \frac{C_n^{P+1}}{C_n^P} = \frac{n-P}{P+1}, \quad (6)$$

$$\frac{T_n^{P+2}}{T_n^P} = \frac{(n-P-1)(n-P-2)}{(P+1)(P+2)}.$$

В общем случае, получим

$$\frac{T_n^{P+k}}{T_n^P} = \left(\frac{n-P-k+1}{P+1} \right) \left(\frac{n-P-k+2}{P+2} \right) \cdots \left(\frac{n-P-1}{P+k-1} \right) \left(\frac{n-P}{P+k} \right). \quad (7)$$

Как видно из (7) оптимизация более высоких рангов кратно увеличивает время работы программы. Поэтому для дальнейшего продвижения в оптимизации

сети применим подход нелокальной оптимизации, аналогичный подходу в методе "бегущей волны оптимизации" для снижения размерности задачи оптимального управления (см. [16]).

Для дальнейшего продвижения в оптимизации сети будем проводить оптимизацию $(P+1)$ -го ранга не на всей n -вершинной сети, а на ее связных подграфах (фрагментах Φ_i^{P+1}), каждый из которых сопоставляется одной из вершин сети.

Каждый подграф Φ_i^{P+1} пересекается при этом с m_i подграфами, связанными с входящими в Φ_i^{P+1} вершинами и, таким образом, выполняется необходимое условие оптимальности сети $(P+1)$ -го ранга: *любой подграф сети, т.е. Φ_i^{P+1} , $i = 1, 2, \dots, n$, $(P+1)$ -оптимален.*

Для реализации этого подхода с каждой вершиной i следует связать подграф Φ_i^{P+1} сети, количество вершин которого не превышает некоторой искомой величины m . Следует определить предельное (наибольшее) значение m .

5.3 Нахождение предельного количества вершин Φ_i^{P+1} -подграфов сети

Пусть T – заданное время решение задачи синтеза РПС. Обозначим за T_n^P время проведения полной оптимизации P -го ранга n -вершинной сети.

Допустим, что на ЭВМ была проведена полная оптимизация максимально возможного ранга P за время T . Обозначим это время за \bar{T}_n^P (т.е. \bar{T}_n^P это известная величина). Так как P – это максимально возможный ранг полной оптимизации за время T , то P удовлетворяет условию $\bar{T}_n^P < T < \bar{T}_n^{P+1}$, т.е. за оставшееся время $T - \bar{T}_n^P$ не может быть проведена оптимизация $(P+1)$ -го ранга.

Тогда проводим кустовую оптимизация и отводим на нее все оставшееся время, т.е.

$$T_{\text{куст.опт.}}^{P+1} = T - \bar{T}_n^P. \quad (8)$$

Пользуясь (5) получим

$$\frac{T_{\text{куст.опт.}}^{P+1}}{\bar{T}_n^P} = \frac{nT_m^{P+1}}{\bar{T}_n^P} = \frac{n\eta C_m^{P+1}}{\eta C_n^P} = \frac{n \cdot \frac{m!}{(P+1)! \cdot (m-P-1)!}}{\frac{n!}{P! \cdot (n-P)!}} = \frac{n \cdot m! \cdot P! \cdot (n-P)!}{(P+1)! \cdot (m-P-1)! \cdot n!}. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и сделав соответствующие преобразования получим соотношение

$$\frac{(T - \bar{T}_n^P) \cdot (n-1)! \cdot (P+1)}{\bar{T}_n^P \cdot (n-P)!} = \frac{m!}{(m-P-1)!}. \quad (10)$$

Из последнего соотношения (10) находим предельное количество вершин куста m при известных значениях T , \bar{T}_n^P , n и P .

Пример. Пусть задано $T = 7\text{сут.} = 168\text{ч.}$ На ЭВМ была проведена полная оптимизация 3-го ранга за время $\bar{T}_{100}^3 = 8\text{ч.}24\text{мин.} = 8.4\text{ч.}$ По формуле (6) оценим время полной оптимизации 4-го ранга.

$$\frac{T_{100}^4}{T_{100}^3} = \frac{T_{100}^4}{8.4} = \frac{100-3}{3+1} = \frac{97}{4}.$$

Отсюда

$$T_{100}^4 = \frac{8.4 \cdot 97}{4} = 203.7\text{ч.}$$

Так как $T_{100}^4 = 203.7\text{ч.} > 168\text{ч.} = T$, то $P = 3$ – это максимально достижимый ранг для полной оптимизации. Поэтому далее проводим кустовую оптимизация 4-го ранга. Найдем предельное количество вершин m . В соотношение (10) подставим значения $T = 168\text{ч.}$, $\bar{T}_n^P = 8.4\text{ч.}$, $n = 100$ и $P = 3$.

$$\frac{(168 - 8.4) \cdot (100 - 1)! \cdot (3 + 1)}{8.4 \cdot (100 - 3)!} = \frac{m!}{(m - 3 - 1)!}.$$

Получаем уравнение

$$(m - 3) \cdot (m - 2) \cdot (m - 1) \cdot m - 737352 = 0. \quad (11)$$

Решая уравнение (11) получим значение $30.8247\dots$, но т.к. m – натуральное число, то возьмем целую часть $m = [30.8247\dots] = 30$.

Таким образом найдено значение $m = 30$, при котором общее время оптимизации не превысит заранее заданного значения $T = 168\text{ч.}$ На самом деле значение времени будет еще меньше, т.к. не из всех вершин возможно построить куст с предельным количеством вершин m на текущем остоном дереве.

6 Метод выделения куста

Недостатком метода выделения куста в работе [15] было отсутствие возможности точно задавать количество вершин, а соответственно и количество хорд в кусте. Задавалось лишь минимальное и максимальное количество вершин, а в процессе выделения куста постепенно добавлялись группы вершин (свои вершины) к текущему кусту до тех пор, пока количество вершин в кусте не укладывалось в заранее заданный диапазон. Причем диапазон между минимальным и максимальным количеством вершин мог быть настолько мал, что добавление очередного слоя делало общее количество вершин куста больше максимального, а не добавление меньше минимального, что вело к тому, что куст из данной вершины вообще невозможно построить и данная вершина пропусклась.

В данной работе предложен метод, позволяющий единственным способом построить куст с заранее заданным (или меньшим) количеством вершин. В данном методе задаются только предельное количество вершин куста и ранг оптимизации.

6.1 Суть метода выделения куста

Суть метода выделения куста состоит в следующем:

Сначала в куст добавляется вершина, из которой куст строится ("корень куста"). Далее в куст добавляются группы вершин (слои), соответствующие уровню их достижимости из корня куста, т.е. сначала 1-достижимые вершины, потом 2-достижимые и т.д. до тех пор пока:

- либо полностью не наберется изначально заданное количество вершин куста,
- либо добавление очередного слоя не превысит изначально заданное количество вершин куста. В этом случае из вершин данного слоя добавляются не все вершины, а только часть из них в таком количестве, чтобы общее количество вершин в кусте равнялось изначально заданному. Чтобы это можно было сделать единственным образом предлагается брать вершины с наименьшими номерами.

Далее в куст добавляются дуги (т.е. хорды и ребра), соединяющие только вершины данного куста. На этом формирование куста завершается.

Стоит отметить, что реальное количество вершин куста может быть меньше изначально заданного предельного количества вершин. Но это только в тех случаях, когда на каком-то шаге достижимые вершины отсутствуют (например, 4-достижимые вершины есть, а 5-достижимые вершины из корня куста отсутствуют).

Также стоит отметить, что изначально заданное предельное количество вершин куста не должно быть слишком малым, т.к. в этом случае количества хорд в выделенном кусте может не хватить для требуемого ранга оптимизации.

6.2 Алгоритм кустовой оптимизации

Пусть задано P -оптимальное островное дерево сети, а также задано точное количество вершин в кусте (m).

1. Выбираем очередную вершину i .
2. Если вершина i является концевой вершиной (висячей вершиной) то переходим к пункту 1.
3. Из вершины i строим куст с количеством вершин m .
4. На кусте проводится оптимизация $(P + 1)$ -го порядка. Если оптимизация улучшила куст (снизила его стоимость), то вносим соответствующие изменения в текущее островное дерево.
5. Если просмотрены не все вершины, то осуществляется переход к пункту 1, если просмотрены все вершины, то алгоритм завершен.

Пункт 3 более подробно представлен ниже.

6.3 Алгоритм выделения куста

Пусть заданы: текущее островное дерево, предельное количество вершин в кусте m и корень куста i .

Условные обозначения:

- i – корень куста, т.е. вершина, из которой куст строится.
- m – предельное количество вершин в кусте.
- s_k – текущий список вершин куста.
- m_k – текущее количество вершин в кусте, т.е. текущее количество элементов в s_k .
- t – текущая достижимость вершин из корня куста i в текущем островном дереве.
- s_t – текущий список вершин, t -достижимых из вершины i на текущем островном дереве.
- m_t – текущее количество t -достижимых вершин из вершины i на текущем островном дереве, т.е. текущее количество элементов в s_t .

Алгоритм выделения куста:

1. Создается s_k . В s_k добавляется вершина i .
2. Создается m_k . m_k присваивается 1.
3. Создается t . t присваивается 1.
4. Создается s_t .
5. Создается m_t . m_t присваивается количество элементов в s_t .
6. Проверяется условие:
 - 6.1. Если $m_k + m_t < m$, то:
 - 6.1.1. В список s_k добавляются все вершины s_t ;
 - 6.1.2. К m_k добавляется m_t ;
 - 6.1.3. К t добавляется 1.
 - 6.1.4. Осуществляется переход к пункту 4.
 - 6.2. Если $m_k + m_t = m$, то в s_k добавляются все текущие вершины s_t .
 - 6.3. Если $m_k + m_t > m$, то:
 - 6.3.1. В s_t все вершины упорядочиваются в порядке возрастания их номеров;
 - 6.3.2. В s_k добавляются только первые $(m - m_k)$ вершин из списка s_t .
7. Создается подграф (куст). В него добавляются все вершины из списка s_k , а также все дуги (ветви + хорды) соединяющие только вершины из списка s_k .

6.4 Пример работы алгоритма выделения куста

Пусть дан базовый граф (рис. 3). Жирными стрелками на нем выделено дерево с источником в вершине под номером 0. Тонкие серые линии это хорды (в обе стороны).

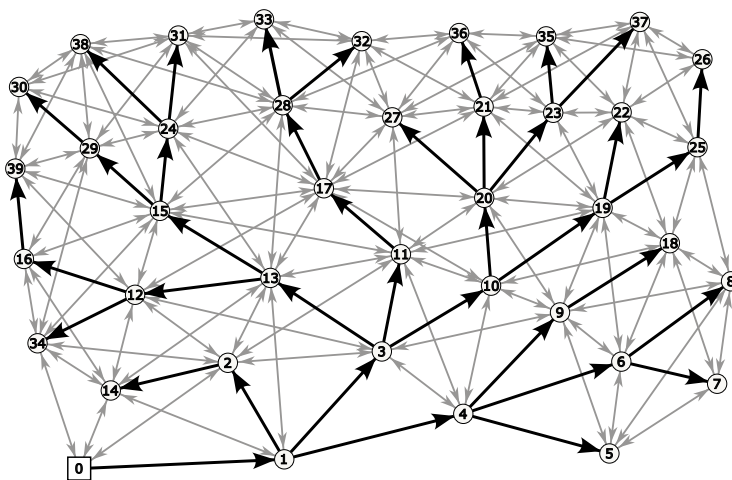


Рис. 3. Базовый граф и начальное остовное дерево
 Figure 3. Basic graph and initial spinning tree

Допустим ставится задача построить куст из вершины $i = 3$ с предельным количеством вершин $m = 14$. Ход алгоритма построения куста представлен на рисунке 4 и в таблице 3.

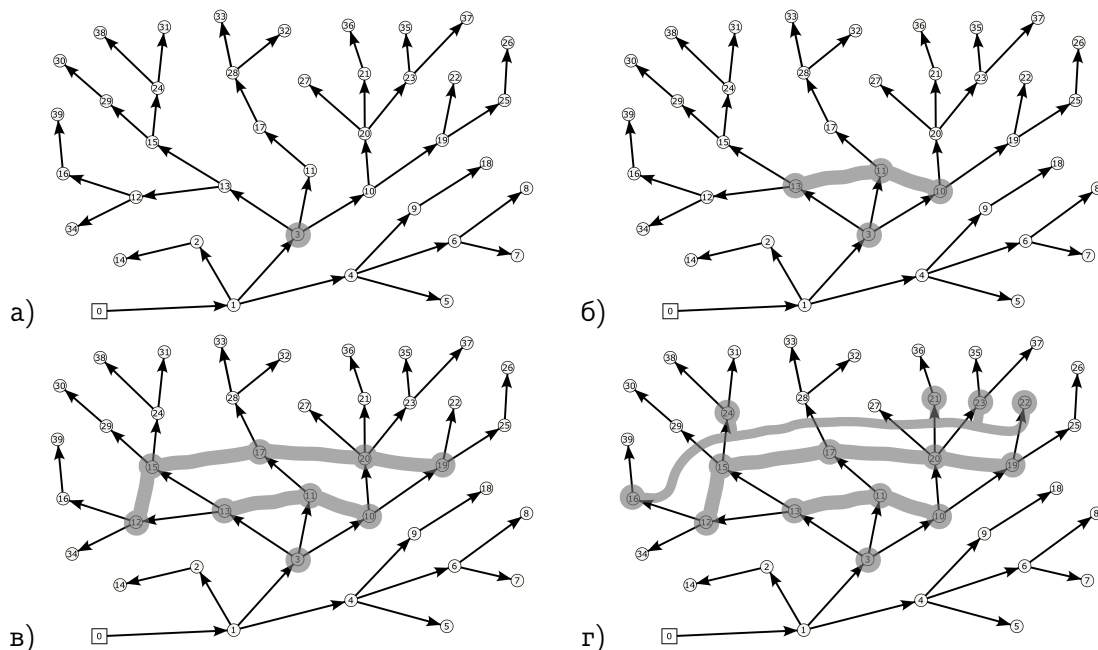


Рис. 4. Ход алгоритма построения куста
 Figure 4. Steps of bush formation algorithm

Таблица 3

Ход алгоритма построения куста. Нахождение вершин куста
 Steps of bush formation algorithm. Finding of the vertex numbers

слой	вершины слоя	кол-во вершин слоя	кол-во вершин для добавления в куст	вершины для добавления в куст	вершины куста (текущее состояние)	кол-во вершин куста
–	–	–	–	–	[]	0
0	[3]	1	1	[3]	[3]	1
1	[10,13,11]	3	3	[10,13,11]	[3,10,13,11]	4
2	[12,15,17,19,20]	5	5	[12,15,17,19,20]	[3,10,13,11,12,15,17,19,20]	9
3	[34,16,29,24,28,27,21,23,22,25]	10	5	[16,21,22,23,24]	[3,10,13,11,12,15,17,19,20,16,21,22,23,24]	14

На рисунке 4 и в таблице 3 видно, что сначала в куст добавляется вершина под номером 3, далее 1-достижимые вершины из вершины 3 (корня куста), далее 2-достижимые вершины; при добавлении 3-достижимых вершин общее количество вершин куста превышает предельное значение $m = 14$. Тогда весь список 3-достижимых вершин отсортировывается по возрастанию номеров вершин, и в куст добавляется такое количество 3-достижимых вершин, которое не приведет к переполнению куста, т.е. 5 вершин.

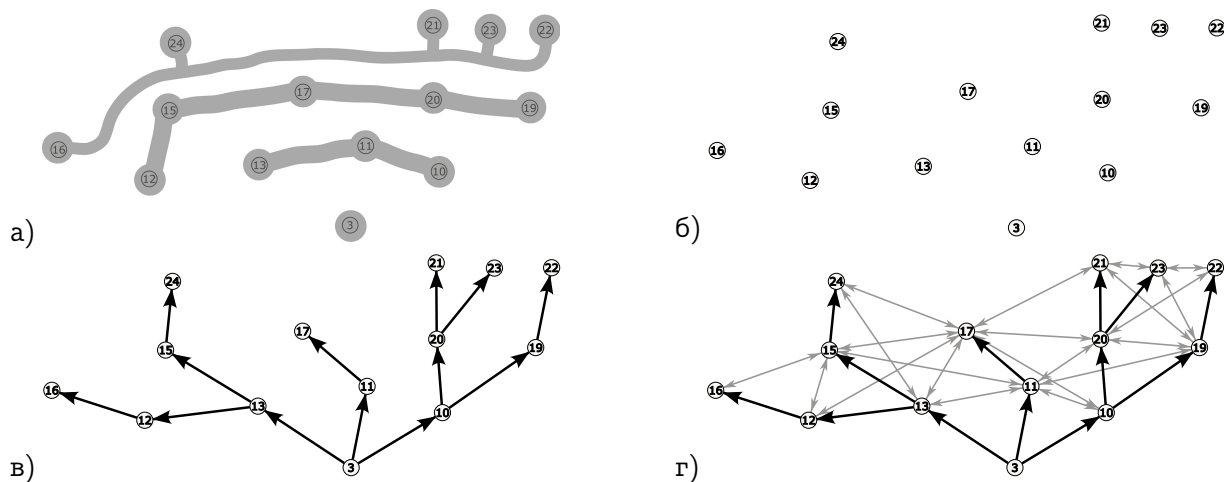


Рис. 5. Формирование куста
 Figure 5. Bush formation process

Далее, после того как найдены все вершины куста, в куст также добавляются все дуги (ветви и хорды) между этими вершинами (см. рис. 5). В результате

получается куст, представленный на рисунке 5 г. Источником полученного куста является корень куста, т.е. вершина 3.

7 Вычислительный эксперимент

7.1 Кустовая оптимизация

С дерева 3-го ранга оптимальности (см. рис. 2 г.) проводилась кустовая оптимизация 4-го ранга оптимальности с предельным количеством вершин $m = 30$. Результаты представлены в таблице 4 и на рисунке 6.

Таблица 4

Результаты кустовой 4-оптимизации ($m = 30$)
Bush 4th rank optimization results ($m = 30$)

Оптимизация	Кустовая 4-оптимизация ($m = 30$)
Стоимость сети «до»	229.190 у.е.
Улучшение стоимости	2.717 у.е.
Время \approx (час:мин)	10:37
Стоимость сети «после»	226.473 у.е.

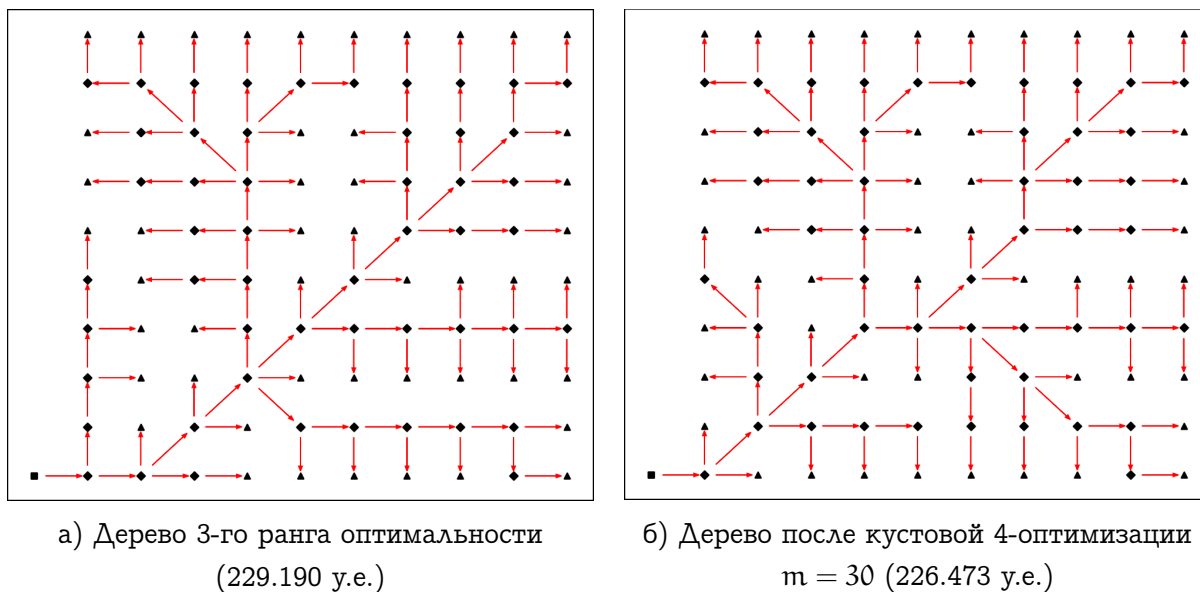


Рис. 6. Результаты кустовой 4-оптимизации
Figure 6. Bush 4th rank optimization results

7.2 Коррекция сети полной оптимизацией 3-го ранга

Кустовая оптимизация имеет нормированное дальноедействие (количество слоев вершин), в то время как полная оптимизация не ограничена по дальноедействию.

Изначально заданное время $T = 7\text{сут.} = 168\text{ч.}$ Полная оптимизация 3-го ранга прошла за время $\bar{T}_{100}^3 = 8\text{ч.}24\text{мин.}$ Кустовая оптимизация прошла за время $\bar{T}_{\text{куст.опт.}}^4 = 10\text{ч.}37\text{мин.}$ Получается у нас осталось в запасе времени

$$T_{\text{ост.}} = T - \bar{T}_{100}^3 - \bar{T}_{\text{куст.опт.}}^4 = 168 - 8\frac{24}{60} - 10\frac{37}{60} = 148\frac{59}{60} = 148\text{ч.}59\text{мин.},$$

Так как оставшееся время больше времени уже проведенной полной оптимизации 3-го ранга, т.е.

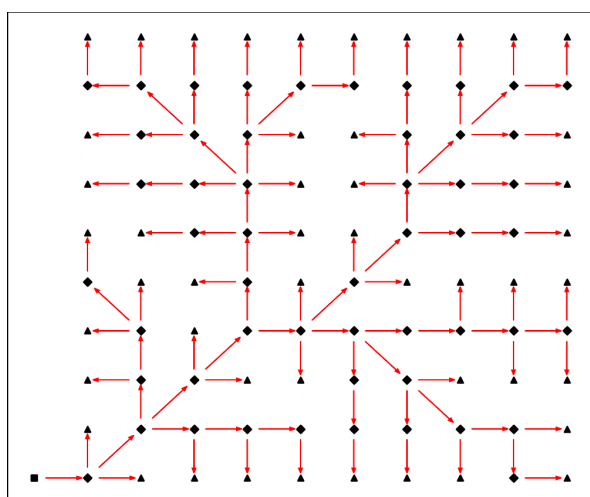
$$T_{\text{ост.}} = 148\text{ч.}59\text{мин.} > \bar{T}_{100}^3 = 8\text{ч.}24\text{мин.}$$

имеет смысл повторно провести полную оптимизация 3-го ранга (так сказать провести коррекцию получившейся на рисунке 6 б сети), что и было проделано. Соответствующая информация представлена в таблице 5 и на рисунке 7.

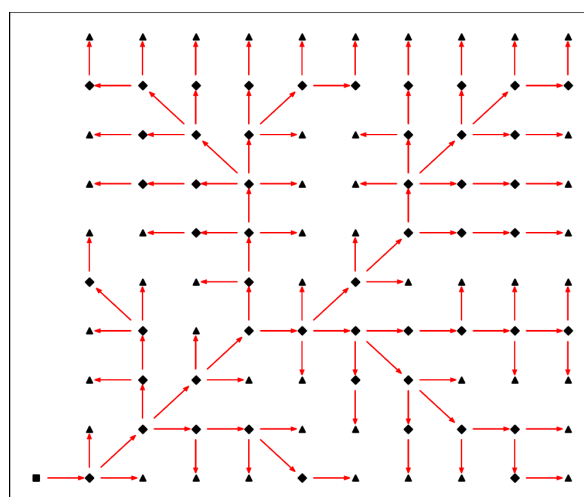
Таблица 5

Результаты полной ранговой 3-оптимизации
Full 3rd rank optimization results

Оптимизация	Полная 3-оптимизация
Стоимость сети «до»	226.473 у.е.
Улучшение стоимости	0.047 у.е.
Время \approx (час:мин)	02:41
Стоимость сети «после»	226.426 у.е.



а) Дерево после кустовой 4-оптимизации
 $m = 30$ (226.473 у.е.)



б) Дерево 3-го ранга оптимальности
 (226.426 у.е.)

Рис. 7. Результаты полной ранговой 3-оптимизации
 Figure 7. Full 3rd rank optimization results

Для проведения вычислительного эксперимента была модифицирована программа для ЭВМ *"Программа для компьютерного проектирования потоковой сети заданного ранга оптимальности на основе прямой и кустовой оптимизации на динамически изменяющемся базовом графе"* (Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2023687305, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 13 декабря 2023 г.).

Программа для ЭВМ написана на языке программирования Python 3-й версии с использованием внешних библиотек, таких как matplotlib и openpyxl. В качестве среды разработки использовалась программа Microsoft Visual Studio Code. Вычислительный эксперимент проводился на виртуальной машине со следующими характеристиками

- Процессор: Intel(R) Xeon(R) W-2195 CPU @ 2.30GHz 2.30 GHz
- Оперативная память: 97,7 ГБ
- Тип системы: 64-разрядная операционная система, процессор x64

на операционной системе Windows со следующими характеристиками

- Тип системы: 64-разрядная операционная система, процессор x64
- Выпуск: Windows Server 2022 Datacenter
- Версия: 21H2
- Сборка ОС: 20348.1129

Заключение

Разработан метод оптимального согласования полной оптимизации P -го ранга и кустовой оптимизации $(P + 1)$ -го ранга, существенно снижающий размерность задачи построения сети высокого ранга оптимальности и время ее решения на ЭВМ.

Разработан метод и алгоритм выделения куста сети, позволяющий единственным образом построить куст с заранее заданным предельным количеством вершин и исходящий из любой вершины сети.

Проведен вычислительный эксперимент для разветвленной потоковой сети на симметричной базовом графе, имеющем большую размерность. В дальнейшем планируется провести тестирование на множестве графов разного размера и топологии с различных начальных остовных деревьев.


Список литературы

1. Карманов В.Г. *Математическое программирование*. Москва: Наука, 1986. 288 с.

2. Абазоков М.Б., Багов М.А., Кудаев В.Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2022. Т. 22, № 4, С. 39–56 DOI: 10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56.
3. Абазоков М.Б., Кудаев В.Ч. Трассировка больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе // Известия Кабардино Балкарского научного центра РАН, 2023. Т. 114, № 4, С. 39–54 DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54.
4. Абазоков М.Б., Кудаев В.Ч. Компьютерное проектирование больших разветвленных трубопроводных систем водоснабжения высокого ранга оптимальности // Известия Кабардино Балкарского научного центра РАН, 2024. Т. 26, № 6, С. 82–97 DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-82-97.
5. Абрамов Н.Н. и др. *Расчет водопроводных сетей*. Москва: Стройиздат, 1983, 278 с.
6. Туй Х. Вогнутое программирование при линейных ограничениях // Докл. АН СССР, 1964. Т. 159, № 1, С. 32–35.
7. Булатов В.П., Кассинская Л.И. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике // Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987, С. 151–172.
8. Анциферов Е.Г., Ащепков Л.Т., Булатов В.П. *Методы оптимизации и их приложения*, Математическое программирование, Т. 1. Новосибирск: Наука, 1990. 158 с.
9. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. *Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения*. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
10. Трубин В.А. *Свойства и методы решения задач оптимального синтеза сетей*. Киев: Об-во «Знание» УССР, 1982. 23 с.
11. Трубин В.А., Михалевич В.С., Шор Н.З. *Оптимизационные задачи производственно – транспортного планирования*. М.: Наука, 1986. 260 с.
12. Кудаев В.Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия КВНЦ РАН, 2016. № 4(72), С. 15–24.
13. Кудаев В.Ч. Ранговая оптимизация больших систем / *Труды ИВМиМГ СО РАН. Серия Информатика*, Материалы Четвёртой азиатской международной школы семинара "Проблемы оптимизации сложных систем", Т. 8. Новосибирск, ИВМиМГ СО РАН, 2008, С. 54–60.
14. Кудаев В.Ч., Абазоков М.Б. Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки., 2018. № 4(24), С. 178–185.
15. Кудаев В.Ч., Абазоков М.Б. Кустовая оптимизация высокого ранга оптимальности потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2021. Т. 37, № 4, С. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118.
16. Ватель И.А., Кононенко А.Ф. Об одной численной схеме решения задачи оптимального управления // ЖВМиМФ, 1970. Т. 10, № 1, С. 67–73.

Информация об авторе




Абазоков Мухаммед Борисович ✉ – без ученой степени, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации КВНЦ РАН, Нальчик, Россия,  ORCID 0000-0002-6847-403X.

References

- [1] Karmanov V. G. *Matematicheskoye programmirovaniye*, Moskva, Nauka, 1986, 288 p. (In Russian).
- [2] Abazokov M. B., Bagov M. A., Kudaev V. Ch. Higher-ranked optimal large pipeline networks design, *Adyghe Int. Si. J.*, 2022, vol. 22, no. 4. pp. 39-56. DOI: 10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56 (In Russian).
- [3] Abazokov M. B., Kudaev V. Ch. Tracing of large branched pipeline hydraulic networks of high optimality rank with graph presentation. *News of the Kabard.-Balkar. Sci. Center of RAS*. 2023, vol. 114, No. 4. 39–54. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54 (In Russian).
- [4] Abazokov M. B., Kudaev V. Ch. Computer modelling of large branched water pipeline systems with higher-order optimality. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2024, vol. 26. No. 6. pp. 82–97. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-82-97 (In Russian).
- [5] Abramov N. N. i dr. *Raschet vodoprovodnykh setey*, Moskva, Stroyizdat, 1983, 278 p. (In Russian).
- [6] Tuy Kh. *Vognutoe programmirovaniye pri lineynykh ogranicheniyakh*. *Doklady AN SSSR* 1964, vol. 159, no. 1, pp. 32–35. (In Russian).
- [7] Bulatov V. P., Kassinskaya L. I. *Nekotorye metody minimizatsii vognutoy funktsii na vypuklom mnogogrannike*, *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya*, Irkutsk: SEI SO AN SSSR, 1987, pp. 151–172. (In Russian).
- [8] Antsiferov E. G., Ashchepkov L. T., Bulatov V. P. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya*. Ch. 1. *Matemat. program.*, Novosibirsk, Nauka, 1990, 158 p. (In Russian).
- [9] Merenkov A. P., Sennova E. V., Sumarokov S. V. *Matematicheskoe modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnabzheniya*, Novosibirsk, Izdatel'stvo Nauka, 1992, 407 p. (In Russian).
- [10] Trubin V. A. *Svoystva i metody resheniya zadach optimal'nogo sinteza setey*, Kiev, Obshchestvo «Znanie» USSR, 1982, 23 p. (In Russian).
- [11] Trubin V. A., Mikhalevich V. S., Shor N. Z. *Optimizatsionnye zadachi proizvodstvenno – transportnogo planirovaniya*, Moskva, Izdatel'stvo Nauka, 1986, 260 p. (In Russian).
- [12] Kudaev V. Ch. Ranks of extrema and structural optimization of the big network systems, *News of the Kabard.-Balkar. Sci. Center of RAS*, 2016, vol. 72, no. 4, pp. 15–24. (In Russian).
- [13] Kudaev V. Ch. Rank optimization for large system, *Bulletin of Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics. Ser. Comp. Sci.*, Iss 8, Proc. Third Asian Intern. Workshop on Optimisation Problems of System, Novosibirsk, IGM&MG SB RAS Publ. 2008, pp. 54–60 (In Russian).
- [14] Kudaev V. Ch., Abazokov M. B. Rank optimization for flow networks, *Vest. KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2018, vol. 24, no. 4, 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185 (In Russian).
- [15] Kudaev V. Ch., Abazokov M. B. Bush optimization method for high ranked stream networks, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2021, vol. 37, no. 4, pp. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118 (In Russian).
- [16] Vatel' I. A., Kononenko A. F. *Ob odnoy chislennoy skheme resheniya zadachi optimal'nogo upravleniya*, *ZHVMIMF*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 67–73. (In Russian).

Information about the author



Abazokov Mukhammed Borisovich ✉ – no academic degree, junior Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia,  ORCID 0000-0002-6847-403X.