Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 52. №3. С. 111 - 130. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-111-130

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.956.4

# Двухкомпонентная модель конкуренции с двумя разными свободными границами

***Р. Т. Зуннунов[1,2], М. С. Расулов*[1,3], Р. И. Паровик[4]***

[1] Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, д. 9, Узбекистан

[2] Филиал Российского Государственного Университета нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина в Ташкенте, Республика Узбекистан, 100125, г. Ташкент Мирзо-Улугбекский район, ул. Дурмон йули, д. 34., Узбекистан

[3] Ташкентский государственный экономический университет, 100066, Ташкент, ул. И. Каримова, д. 49, Узбекистан

[4] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Паратунка, Камчатский край, Россия

**Аннотация.** В настоящей работе исследуется динамика конкурентной системы Лотки-Вольтерра, содержащей две свободные границы, при этом каждая из границ моделирует фронт распространения одного из двух конкурирующих видов. Рассматривается задача со свободной границей для системы квазилинейных параболических уравнений с нелинейными конвективными членами. В статье сначала для решения задачи устанавливаются априорные оценки норм Гёльдера. На основе априорных оценок доказываются существование и единственность решения. Далее с помощью неявной конечно-разностной схемы находится численное решение задачи, которое характеризует плотности двух противоборствующих популяций. Средствами языка программирования Python проводится визуализация, полученных решений, также строятся графики динамики свободных границ. С точки зрения приложений задача со свободной границей для диффузионной системы Лотки-Вольтерры — это математическая модель, описывающая распространение хищник-жертва в популяции с динамической границей области существования. Эта задача возникает, когда одна из популяций (например, хищник) влияет на границы ареала своей жертвы, либо когда границы ареала формируются под воздействием внешних факторов, а сама диффузия происходит в этой системе.

*Ключевые слова: модель; свободные границы; система квазилинейных параболических уравнений; априорные оценки; существование и единственность решений; численный алгоритм; Python*

Получение: 13.11.2025; Исправление: 20.11.2025; Принятие: 22.11.2025; Публикация онлайн: 23.11.2025

**Для цитирования.** Зуннунов Р. Т., Расулов М. С., Паровик Р. И. Двухкомпонентная модель конкуренции с двумя разными свободными границами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 52. № 3. С. 111-130. EDN: CDFHIP. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-111-130.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках соглашения между ИКИР ДВО РАН и Институтом математики имени В. И. Романовского (г. Ташкент, Узбекистан) №1117 от 28.04.2022 (0469/01/22 НТМИ) по математическим исследованиям.

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: rasulovms@bk.ru

*Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License*

© Зуннунов Р. Т., Расулов М. С., Паровик Р. И., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 52. no. 3. P. 111 - 130. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-111-130

Research Article

Full text in Russian

MSC 35B45, 35K20, 35K57, 35K59

# A Two-Component Competition Model With Two Different Free Boundaries

***R. T. Zunnunov*[1,2], *M. S. Rasulov*[*1,3], *R. I. Parovik*[4]**

[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, 9 University str., 100174, Uzbekistan

[2] Branch of the Russian State University of Oil and Gas (National Research University) named after I. M. Gubkin in Tashkent, Mirzo-Ulugbek district, Durmon Yuli str., 34, Tashkent, 100125, Uzbekistan

[3] Tashkent State University of Economics, Tashkent, 49 Islom Karimov str., 100066, Uzbekistan

[4] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 7 Mirnaya srt., 684034, Paratunka, Russia

**Abstract.** This paper investigates the dynamics of a competitive Lotka-Volterra system containing two free boundaries, where each boundary models the propagation front of one of the two competing species. A free boundary problem is considered for a system of quasilinear parabolic equations with nonlinear convective terms. The paper first establishes a priori estimates of the Hölder norms to solve the problem. Based on these a priori estimates, the existence and uniqueness of the solution are proven. Next, an implicit finite-difference scheme is used to find a numerical solution to the problem, which characterizes the densities of the two competing populations. Using the Python programming language, the obtained solutions are visualized, and graphs of the free boundary dynamics are constructed. From an application perspective, the free boundary problem for the Lotka-Volterra diffusion system is a mathematical model describing predator-prey propagation in a population with a dynamic boundary of the domain of existence. This problem arises when one of the populations (for example, a predator) influences the boundaries of the range of its prey, or when the boundaries of the range are formed under the influence of external factors, and the diffusion itself occurs in this system.

*Key words: model; free boundaries; system of quasilinear parabolic equations; a priori estimates; existence and uniqueness of solutions; numerical algorithm; Python*

Received: 13.11.2025; Revised: 20.11.2025; Accepted: 22.11.2025; First online: 23.11.2025

**For citation.** Zunnunov R. T., Rasulov M. S., Parovik R. I. A two-component competition model with two different free boundaries. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **52**: 3, 111-130. EDN: CDFHIP. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-111-130.

**Funding.** The work was carried out within the framework of the agreement between IKIR FEB RAS and the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (Tashkent, Uzbekistan) No. 1117 dated 04.28.2022 (0469/01/22 NTMI) on mathematical research.

**Competing interests.** There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

[*]**Correspondence:** E-mail: rasulovms@bk.ru

*The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License*

© Zunnunov R. T., Rasulov M. S., Parovik R. I., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)

## Введение

Распространение новых или инвазивных видов является центральной темой экологии, и значительные исследования были посвящены лучшему пониманию природы такого распространения. Экологические проблемы требуют использования целой иерархии моделей, способных описывать не только разные уровни организации систем, но и взаимодействие между этими уровнями. Тем не менее, значительные успехи были достигнуты в исследованиях инвазии видов посредством исследований фронтального распространения (см., напр, [4, 9, 13, 16]).

Подход, предложенный в работе [8], моделирует явление распространения для одного вида, принимая фронт распространения как свободную границу, где ключевым предположением является то, что плотность популяции исчезает на фронте, а механизм распространения - определяется пространственным градиентом популяции на фронте.

Следуя такому подходу, существуют различные биологические соображения в отношении двухвидовых моделей конкуренции. В работе [9] авторы считают, что инвазивный вид изначально существует в некотором промежутке и вторгается в окружающую среду, тогда как резидентный вид распространяется по всему пространству. В работах [11, 20] предполагается, что два вида со слабой конкуренцией распространяются вдоль одной и той же свободной границы. Аналогичные работы, но для двухвидовых моделей хищник-жертва, можно найти в [21]. Мы также ссылаемся на гораздо более ранние работы [6, 14], в которых среда считается ограниченной областью.

Во многих исследованиях термин конвекция является линейным и зависит только от градиента плотности компонентов [10, 15]. Однако в целом на конвекцию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной конвекции. В [19] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом конвекции. Они получили результат дихотомии и представили постоянную асимптотическую скорость распространения расширяющегося фронта.

На основании этих работ мы можем уточнить: если два вида $u(t,x)$ и $v(t,x)$ распространяются только в одном направлении, но с разными свободными границами, то какова может быть динамика. Точнее, мы предполагаем, что два вида изначально занимают интервалы $[0, s_1(t)]$ и $[0, s_2(t)]$ соответственно. Кроме того, они перемещаются только вправо, и их территория расширяется до $[0, s_1(t)]$ и $[0, s_2(t)]$, соответственно, в момент времени $t$.

В настоящей работе исследуется динамика конкурентной системы Лотки-Вольтерра, содержащей две свободные границы, предложенные в [12, 22], при этом каждая из границ моделирует фронт распространения одного из двух конкурирующих видов.

Взаимодействие между двумя конкурирующими видами формулируется как следующая задача со свободной границей:

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_1 u u_x = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - m_2 v v_x = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad (t,x) \in Q, \tag{2}$$

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{3}$$

$$v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le h_0, \tag{4}$$

$$u_x\left(t,0\right) = 0, \quad v_x\left(t,0\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u\left(t,s\left(t\right)\right) = 0, \quad v\left(t,h\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$s'\left(t\right) = -\mu_1 u_x\left(t,s\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$h'\left(t\right) = -\mu_2 v_x\left(t,h\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$s\left(0\right) = s_0, \quad h\left(0\right) = h_0, \quad s_0 < h_0; \quad u(t,x) \equiv 0, \quad s(t) \le x \le h(t), \tag{9}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < h(t)\}$; $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$ – плотности популяции в момент времени $t$ в точке $x$; $s\left(t\right)$, $h\left(t\right)$– свободные границы, которые представляют фронты распространения, определяются вместе с функциями $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$; $d_i$ – коэффициент диффузии, $a_i$ – коэффициенты удельной скорости роста популяций, $i = 1,2$; $c_1$ и $b_2$ – коэффициенты межвидовой конкуренции, $c_2$ и $b_1$ – коэффициенты внутривидовой конкуренции, $u_0\left(x\right)$, $v_0\left(x\right)$ – начальные плотности популяции соответственно находятся в областях $[0,s_0]$ и $[0,h_0]$. А параметры $\mu_i$ соответственно представляют скорость распространения в новые области для $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(i) $d_i$, $m_i$, $a_i$, $b_i$, $c_i$, $\mu_i$– положительные постоянные, $i = 1,2$;

(ii) $u_0\left(x\right), v_0\left(x\right) \in C^2[0,s_0]$, $0 < u_0\left(x\right) \le \frac{a_1}{b_1}$ в $(0,s_0)$ $\quad 0 < v_0\left(x\right) \le \frac{a_2}{c_2}$ в $(0,h_0)$,
$u_0\left(0\right) = v_0\left(0\right) = 0$, $u_0\left(s_0\right) = v_0\left(h_0\right) = 0$, $u_0'\left(s_0\right) < 0$, $v_0'\left(h_0\right) < 0$,

(iii) $\frac{c_1}{c_2} < \frac{a_1}{2_2} < \frac{b_1}{b_2}$,

(iv) $\lim\limits_{x \to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0 - x} = 0$, $\lim\limits_{x \to h_0} \frac{v_0(x)}{h_0 - x} = 0$.

Задача (1)-(9) исследована в работе [12, 22] при $m_i = 0$, $i = 1,2$.

Задача (1)-(9) исследована в работах [39, 73] в случае с линейными адвективными членами, т.е. $m_1 u u_x$, $m_2 v v_x$.

## Априорные оценки

В этом разделе докажем некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи. При этом широко применяются принцип максимума и теоремы сравнений.

Прежде всего установим ограниченность функции $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$, $s'\left(t\right)$, $h'\left(t\right)$. Далее устанавливаются априорные оценки для старших производных.

**Теорема 1.** *Если функции* $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$, $h(t)$ *являются решением задачи* (1)-(9), *то справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \le M_1 \equiv \frac{a_1}{b_1}, \qquad (t,x) \in \overline{D}, \tag{10}$$

$$0 < v(t,x) \le M_2 \equiv \frac{a_2}{c_2}, \qquad (t,x) \in \overline{Q}, \tag{11}$$

$$0 < s'(t) \le M_3 \equiv \mu_1 N_1, \quad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

$$0 < h'(t) \le M_4 \equiv \mu_2 N_2, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

*где* $N_1 \ge \max\left\{\frac{a_1 M_1}{m_1}, \max\limits_x \left|\frac{u_0}{s_0 - x}\right|\right\}$, $N_2 \ge \max\left\{\frac{a_2 M_2}{m_2}, \max\limits_x \left|\frac{v_0}{h_0 - x}\right|\right\}$.

**Доказательство.** Сначала докажем положительность функции $u(t,x)$. Возьмем некоторую произвольную точку $P \in D$ такую, что $u(P) = 0$. В этой точке правая часть (1) должна быть равна нулю. А также в этой точке функция $u(t,x)$ достигает своего минимального значения. Отсюда по сильному принципу максимума $u(P) = u(P_0)$ для всех $P_0 \in D_0 = \{(t_0,x) : 0 < t_0 < T, 0 < x < s(t_0)\}$, тогда получаем противоречие относительно условия (ii). Полученное противоречие доказывает, что $u(t,x) > 0$ в $D$.

Доказательство положительности $v(t,x)$ аналогично.

Чтобы получить верхние оценки поступаем следующим образом. Исследуем вспомогательную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \overline{u}_t(t) = \overline{u}(a_1 - b_1\overline{u}), \quad t > 0, \\ \overline{u}(0) = \|u_0\|_\infty. \end{cases}$$

Её решение может быть записано в явном виде:

$$\overline{u}(t) = \frac{a_1}{b_1} e^{a_1 t}\left(e^{a_1 t} - 1 + \frac{a_1}{b_1\|u_0\|_\infty}\right)^{-1}.$$

Применяя правило Лопиталя, находим, что $\overline{u}(t) \le \frac{a_1}{b_1}$ при $t \to +\infty$. Сравнивая функцию $u(t,x)$ с решением $\overline{u}(t)$, приходим к следующей оценке сравнивая $u(t,x)$ с $\overline{u}(t)$

$$u(t,x) \le \sup_{t \geqslant 0} \overline{u}(t) \le \max\left\{\|u_0(x)\|, \frac{a_1}{b_1}\right\} \equiv M_1.$$

Далее, с учетом условия (6) и тот факт, что функция $u(t,x)$ положительна в области $D$, получаем, что $u_x(t,s(t)) < 0$. Как следствие, из соотношения (7) вытекает, что $s'(t) > 0$.

Для получения верхней оценки производной $s'(t)$ в задаче (1), (3), (5), (6) выполним замену

$$U(t,x) = u(t,x) + N_1(x - s(t)). \tag{14}$$

В результате задача преобразуется относительно функции $U(t,x)$:

$$\begin{cases} U_t - d_1 U_{xx} - m_1 u U_x \le u(a_1 - m_1 N_1) \le 0, & (t,x) \in D, \\ U(0,x) = u_0(x) + N_1(x - s_0) \le 0, & 0 \le x \le s_0, \\ U_x(t,0) = N_1, \quad U(t,s_1(t)) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases}$$

При выборе $N_1 \geq \max\left\{\frac{a_1}{m_1}, \max\limits_{x}\left|\frac{u_0}{s_0 - x}\right|\right\}$ для всех $(t,x) \in D$ выполняется неравенство $U(t,x) \leq 0$. Отсюда, учитывая (14), заключаем, что $u_x(t,s(t)) \geq -N_1$, что эквивалентно оценке $s'(t) \leq \mu_1 N_1$.

Рассуждая аналогично доказываются оценки (11) и (13). □

Первоначальные оценки получены. Теперь, используя результаты работы [1], установим априорные оценки производных $u_x$ и $v_x$.

Для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_1 u u_x = f(u,v), \quad (t,x) \in D_1, \tag{15}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{16}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{17}$$

$$s'(t) = -\mu_1 u_x(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{18}$$

и

$$v_t - d_2 v v_{xx} - m_2 u_x = g(u,v), \quad (t,x) \in D_2, \tag{19}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq h_0, \tag{20}$$

$$v_x(t,0) = 0, \quad v(t,h(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{21}$$

$$h'(t) = -\mu_2 v_x(t,h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{22}$$

где $f(u,v) = u(a_1 - b_1 u - c_1 v)$, $g(u,v) = v(a_2 - b_2 u - c_2 v)$

Сначала определим априорные оценки для функции $u(t,x)$. В силу граничных условий (15)-(18) мы не можем использовать результаты работы [1]. Поэтому введем следующее преобразование

$$t = t, \quad y = \frac{x}{s(t)}$$

чтобы выпрямить свободную границу. Тогда область $D$ преобразовывается область $D_1 = \{(t,y) : 0 < t \leq T, 0 < y < 1\}$, а ограниченная функция $U(t,y) = u(t,x)$ является решением задачи

$$U_t - A_1 U_{yy} = B_1(U,V,U_y), \quad (t,y) \in D_1, \tag{23}$$

$$U(0,y) = U_0(y) \equiv u_0(s_0 y), \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{24}$$

$$U_y(t,0) = 0, \quad U(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{25}$$

где $D_1 = \{(t,y) : 0 < t \leq T, \ 0 < y < 1\}$, $A_1 = \frac{d_1}{s^2(t)}$, $B_1(U,V,U_y) = f(U,V) + \frac{y s'(t) + m_1 U}{s(t)} U_y$, $s'(t) = -\frac{\mu_1}{s(t)} U_y(t,s(t))$.

**Теорема 2.** *Пусть непрерывная в* $\overline{D_1}$ *функция* $U(t,y)$ *удовлетворяет условиям задачи* (23)-(25). *Предположим, что непрерывные функции* $A_1$, $B_2$ *для* $(t,y) \in \overline{D_1}$, $|U| \leq M_1$, $|V| \leq M_2$ *и произвольных* $U_y$ *удовлетворяют условиям*

$$\frac{|B_1|}{A_1} \leq K_1(U_y^2 + 1), \quad K_1 > 0. \tag{26}$$

*В условиях* (26) *справедливо оценка*

$$|U_y(t,y)| \le M_5(M_1, M_2, A_1, K_2, \delta), \quad (t,y) \in D_1^\delta. \tag{27}$$

*Кроме того, в области* $\{(t,y) \in \overline{D}_1, |U| \le M_1, |V| \le M_2, |U_y| \le M_5\}$ *имеет место оценка*

$$|U|_{\frac{2}{3}}^{D_1^{2\delta}} \le M_6(M_1, M_2, d_1, K_2, \delta).$$

*И если, что* $U(t,y)$ *обладает в* $\overline{D}_1$ *суммируемыми с квадратом обобщенными производными* $U_{ty}$, $U_{yy}$, *то*

$$|U|_{1+\alpha_1}^{D_1^{2\delta}} \le M_7(M_1, M_2, M_5, K_2, \delta), \quad 0 < \alpha_1 < 1, \tag{28}$$

*Если* $U|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$, *то оценки* (21)-(23) *справедливы и в* $\overline{D}_1$; *где* $\Gamma(t=0, y=0, y=1)$ – *параболическая граница,* $D_1^\delta = \{(t,y) : 0 < \delta \le t \le T,\ \delta \le y \le 1-\delta\}$.

**Доказательство.** Поскольку заданы оценки $|u(t,x)| \le M_1$, $|v(t,x)| \le M_2$, $|s'(t)| \le M_3$, $|h'(t)| \le M_4$, то следуют ограничения для функций $U(t,y)$ и $V(t,y)$. Вследствие этого, опираясь на теорему 3 из [1], выполняются внутренние оценки (27), (28).

Если $U(t,1) \equiv 0$, то доопределяем функцию $U(t,y)$ в прямоугольнике $R_+ = \{(t,y) : 0 \le t \le T, 1-4\delta < y < 1+4\delta\}$, $0 < \delta < \frac{1}{5}$ по формуле $U(t,y) = -W(t, 1-4\delta(2y-1))$, $V(t,y) = V(t,y)$. Построенная в прямоугольнике $D_1^\delta \cup R_+$ функция (за которой сохраним обозначение $U(t,y)$) непрерывна вместе с производной их и всюду, кроме точек прямой $y = 1$, удовлетворяет уравнению вида (23), для которого выполнены условия (24) и (25):

$$\begin{cases} W_t = 64\delta A_1 W_{yy} + B_1(t, y, -W, W_y, V), & (t,y) \in R_+, \\ W(\delta, y) = W_0(y), & 1-4\delta \le y \le 1+4\delta, \\ W(t, 1-4\delta) = 0, \quad W(t, 1+4\delta) = 0, & \delta \le t \le T. \end{cases} \tag{29}$$

Теперь применяя теорему 2 [1] к задаче (29) получим оценку $|W_y| \le M_5(M_1, M_2, A_1, K_2, \delta)$ в области $R_+$. Следовательно,

$$|U_y| \le M_5(M_1, M_2, A_1, K_2, \delta) \quad (t,y) \in R_+.$$

Аналогично доопределяем функцию $U(t,y)$ в прямоугольнике $R_- = \{(t,y) : 0 \le t \le T, -4\delta < y < 4\delta\}$ по формуле $U(t,y) = W(t, 4\delta(1-2y))$, $V(t,y) = V(t,y)$.

Оценки в области $R_+$, $R_-$, $D_1^\delta$ дают общую оценку $|U_y| \le M_4(M_1, M_2)$ в замкнутой области $\overline{D}_1$.

Далее, используя теоремы 3 [1] получим оценку $|U|_{1+\alpha_1} \le M_7(M_1, M_2, M_5, K_2)$ в $\overline{D}_1$. □

Оценки для старших производных в области $\overline{D_1}$ получаются на основе результатов, касающихся линейных уравнений, из [7].

**Теорема 3.** *Пусть коэффициенты уравнения*

$$a(t,x)\, u_{xx} + b(t,x)\, u_x + c(t,x)\, u - u_t = f(t,x), \quad (t,x) \in \overline{D}_1 \tag{30}$$

*удовлетворяет условиям Гёльдера*

$$a(t,x) \geq a_0 > 0, \quad |a|_{\beta_1}^{\overline{D}_1} + |b|_{\beta_1}^{\overline{D}_1} + |c|_{\beta_1}^{\overline{D}_1} = K < \infty,$$

*и* $u(t,x)$ *– решение уравнения* (30), $|u|_{2+\gamma}^{\overline{D}_1} < \infty$, $M_1 = \max|u(t,x)|$. *Тогда*

$$|u|_{2+\beta_1}^{D_1^{4\delta}} \leq C(|f|_{\beta_1}^{\overline{D}_1} + M)$$

*где* $C$ *зависят от* $\beta_1, K, \delta$.

*Если* $u|_\Gamma = 0$, *то существует такое* $C = C(\beta_1, a_0, K)$, *что* $|u|_{2+\beta_1}^{D_1^{4\delta}} \leq C\,|f|_{\beta_1}^{\overline{D}_1}$.

**Доказательство.** В случае задачи (19)-(22) априорные оценки строятся следующим образом. Произведя замену $y = \frac{x}{h(t)}$, распрямляем границу. Тогда область $Q$ переходит область $Q_1 = \{(t,y) : 0 < t \leq T, 0 < y < 1\}$, а для функции $V(t,y) = v(t,x)$ получается задача для уравнении с ограниченными коэффициентами и правой частью:

$$V_t - A_2 V_{yy} = B_2(U, V, U_y), \quad (t,y) \in Q_1, \tag{31}$$

$$V(0,y) = V_0(y) \equiv v_0(h_0 y), \quad 0 \leq y \leq 1, \tag{32}$$

$$V_y(t,0) = 0, \quad V(t,1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{33}$$

где $Q_1 = \{(t,y) : 0 < t \leq T, \ 0 < y < 1\}$, $A_2 = \frac{d_2}{h(t)}$, $B_2(U,V,U_y) = g(U,V) + \frac{yh'(t)+m_2}{h(t)} V_y$, $h'(t) = -\frac{\mu_2}{h(t)} V_y(t, h(t))$.

Рассуждая так же, как и выше используя методы работы [1], установим оценки для $|V_y|$, $|V|_{1+\alpha_2}$, $|V|_{2+\beta_2}$ в $Q_1$. □

## Единственность и существование решения

Для доказательства единственности решения выводим интегральное представление, эквивалентное к (8) и (9)

$$\frac{d_1}{\mu_1} s(t) = \frac{d_1}{\mu_1} s_0 + \int_0^{s_0} u_0(\xi)\, d\xi - \int_0^{s(t)} u(t,\xi)\, d\xi + \frac{m_1}{2} \int_0^t u^2(t,0)\, d\xi + \int_0^t d\eta \int_0^{s(\eta)} f(u,v)\, d\xi. \tag{34}$$

и

$$\frac{d_2}{\mu_2} h(t) = \frac{d_2}{\mu_2} h_0 + \int_0^{h_0} v_0(\xi)\, d\xi - \int_0^{h(t)} v(t,\xi)\, d\xi + \frac{m_2}{2} \int_0^t v^2(t,0)\, d\xi + \int_0^t d\eta \int_0^{h(\eta)} g(u,v)\, d\xi. \tag{35}$$

**Теорема 4.** *При выполнении условий теоремы 1 решение задачи* (1)-(9) *единственно.*

**Доказательство.** Теорема 4 доказывается сначала для малого $t \in [0, t_0]$, а затем устанавливается, что она справедлива для любого $0 < t < \infty$. Пусть функции $(s_1(t), s_2(t), u_1(t,x), v_1(t,x))$ и $(h_1(t), h_2(t), u_2(t,x), v_2(t,x))$ являются решениями

задачи (1)-(9) и пусть $y_i(t) = \min(s_i(t), h_i(t))$, $z_i(t) = \max(s_i(t), h_i(t))$. Для каждой группы решений справедливо (34), (35). Рассматривая разность, находим

$$\frac{d_1}{\mu_1}|s_1(t) - s_2(t)| \le \int\limits_0^{y_1(t)} |u_1(t,\xi) - u_2(t,\xi)|\,d\xi + \frac{m_1}{2}\int\limits_0^t \left|u_1^2(\eta,0) - u_2^2(\eta,0)\right| d\eta +$$

$$+ \int\limits_{y_1(t)}^{z_1(t)} |u_i(t,\xi)|\,d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y_1(\eta)} |f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)|\,d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{y_1(\eta)}^{z_1(\eta)} |f(u_i,v_i)|\,d\xi \qquad (36)$$

и

$$\frac{d_2}{\mu_2}|h_1(t) - h_2(t)| \le \int\limits_0^{y_2(t)} |v_1(t,\xi) - v_2(t,\xi)|\,d\xi + \frac{m_2}{2}\int\limits_0^t \left|v_1^2(\eta,0) - v_2^2(\eta,0)\right| d\eta +$$

$$+ \int\limits_{y_2(t)}^{z_2(t)} |v_i(t,\xi)|\,d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{y_1(\eta)} |g(u_1,v_1) - g(u_2,v_2)|\,d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{y_2(\eta)}^{z_2(\eta)} |g(u_i,v_i)|\,d\xi \qquad (37)$$

где $u_i, v_i$ $(i = 1, 2)$ – решения между $y_i(t)$ и $z_i(t)$, т.е

$$u_i(t,x) = \begin{cases} u_1(t,x), & \text{если} \quad s_2(t) < s_1(t), \\ u_2(t,x), & \text{если} \quad s_2(t) > s_1(t). \end{cases}$$

$$v_i(t,x) = \begin{cases} v_1(t,x), & \text{если} \quad h_2(t) < h_1(t), \\ v_2(t,x), & \text{если} \quad h_2(t) > h_1(t). \end{cases}$$

В силу теоремы 1 имеем

$$|u_i(t,x)| \le N_1(y_1(t) - x), \ |v_i(t,x)| \le N_2(y_2(t) - x),$$

$$|u_1(t,y_1(t)) - u_2(t,y_1(t))| \le N_1|s_1(t) - s_2(t)|,$$

$$|v_1(t,y_2(t)) - v_2(t,y_2(t))| \le N_2|h_1(t) - h_2(t)|.$$

Для разности $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$, $V(t,x) = v_1(t,x) - v_2(t,x)$ получаются задачи

$$\begin{cases} U_t - d_1U_{xx} - m_1UU_x - k_3U = k_4V, & 0 \le t < t_0,\ 0 < x < y_1(t) \\ V_t - d_2V_{xx} - m_2VV_x - k_5V = k_6U, & 0 \le t < t_0,\ 0 < x < y_2(t), \\ U(0,x) = 0, & 0 \le x \le y_1(0), \\ V(0,x) = 0, & 0 \le x \le y_2(0), \\ U_x(t,0) = 0,\ V_x(t,0) = 0, & 0 \le t \le t_0, \\ U(t,y_1(t)) \le N_1 \max\limits_{0\le\eta\le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, & 0 \le t \le t_0, \\ V(t,y_2(t)) \le N_2 \max\limits_{0\le\eta\le t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|, & 0 \le t \le t_0, \end{cases} \qquad (38)$$

где $k_3 = (1 - (u_1 + u_2) - \nu_2 + u_{1x})$, $k_4 = u_1$, $k_5 = (1 - (\nu_1 + \nu_2) - u_1 + \nu_{1x})$, $k_6 = \nu_2$.

Из задачи (38) по принципу максимума находим

$$|U(t,x)| \le N_1|s_1(t) - s_2(t)| + k_4|V(t,x)|t, \quad 0 \le t \le t_0, \quad 0 < x < y_1(t),$$

$$|V(t,x)| \le N_2|h_1(t) - h_2(t)| + k_6|U(t,x)|t, \quad 0 \le t \le t_0, \quad 0 < x < y_2(t).$$

Далее используя полученные результаты оцениваются интегральные члены из (36) и (37). Затем применяя методы работы [18] завершается доказательство теоремы. □

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует решение* $u(t,x) \in C^{2+\beta_1}(\overline{D}$, $\nu(t,x) \in C^{2+\beta_2}(\overline{Q}$, $s(t) \in C^{1+\alpha_1}(0 \le t \le T)$, $h(t) \in C^{1+\alpha_2}(0 \le t \le T)$ *задачи* (1)-(9).

**Доказательство.** Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно использовать различные теоремы из теории нелинейных уравнений, учитывая, что для нее имеет место теорема единственности классического решения. Мы применим принцип Лерэ-Шаудера [2], установленные априорные оценки $|\cdot|_{1+\alpha_i}$ для всех возможных решений нелинейных задач и теоремы разрешимости в классах Гельдера для линейных задач. При этом теоремы существования для систем такие же, как и теорема для случая одного уравнения, так как каждое из уравнений можно рассматривать как линейное уравнение относительно $u(t,x)$ и $\nu(t,x)$ с непрерывными по Гельдеру коэффициентами.

Задача (1)-(9) рассматривается одновременно с однопараметрическим семейством задач того же типа. Линейная задача определяет преобразование $w = F(\omega, \tau), 0 \le \tau \le 1$, к которому и применяется принцип Лерэ-Шаудера. Этот оператор нелинеен и зависит от $\tau$. Его неподвижные точки при $\tau = 1$ являются решениями задачи.

Обозначим через $H^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i \in (0,1)$ банахово пространство функций $u(t,x)$, $\nu(t,x)$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|_{1+\alpha_i}$, которые удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиям задачи (15)-(18) и (19)-(22).

Для каждой функции $\bar{u}, \bar{\nu} \in H^{1+\alpha_i}$ и любого числа $\tau \in [0,1]$ обозначим через $u^\tau$, $\nu^\tau$ решения линейных задач (15)-(18) и (19)-(22), решения которых существуют и единственны, причем $u^\tau, \nu^\tau \in C^{2+\beta_i}$, $s(t) \in C^{1+\alpha_1}$, $h(t) \in C^{1+\alpha_2}$. При этом в областях D и Q, осуществляется переход к параболическому уравнению с непрерывными по Гельдеру коэффициентами в фиксированной области.

Равномерная непрерывность и вполне непрерывность оператора преобразования F относительно $\tau$, равномерные по $\tau$ оценки для решений и разрешимость линейных задач следуют из установленных априорных оценок норм Гельдера. Техника доказательства подробно продемонстрирована, например, в работах (гл.VI, [2]; гл.VII, [3]).

Этим и завершается доказательство теоремы. □

## Численный анализ

Сначала мы преобразуем задачу с подвижными границами (1)-(9) в задачу с фиксированными границами. Это позволит использовать стандартные численные методы на равномерной сетке, обеспечит численную устойчивость и точность, упростит учет условий Стефана, сохранит физическую интерпретацию задачи.

Для фиксации подвижных границ $s(t)$ и $h(t)$ в задаче (1)-(9) мы вводим новые координаты [1]:

$$y = \frac{x}{s(t)} \in [0,1], \qquad z = \frac{x}{h(t)} \in [0,1] \tag{39}$$

$$U(t,y) = u(t, ys(t)), \qquad V(t,z) = v(t, zh(t)) \tag{40}$$

Отметим, что в уравнении для $u$ (в преобразованной координате $y$) появляется $v$, и наоборот. Поскольку $u$ определена на $[0, s(t)]$, а $v$ на $[0, h(t)]$, и эти интервалы могут пересекаться, нам нужно вычислить значение $v$ в точках, где определена $u$, и наоборот. Например, в уравнении для $u$ (в координате $y$) есть член $c_1 v$. Но $v$ задана в своей координате $z$. Мы знаем, что $x = ys(t)$. Тогда в физической координате $x$, соответствующей $y$, мы можем вычислить $z = x/h(t) = (ys(t))/h(t)$. Затем по значению $z$ мы интерполируем $v$, чтобы получить $V_{\text{interp}}$. Таким образом, $V_{\text{interp}}$ — это интерполяция $V$ (которая задана на равномерной сетке $z$) в точке $z_U = (ys(t))/h(t)$. Аналогично для $v$ мы получаем $U_{\text{interp}}$ — интерполяцию $U$ (которая задана на равномерной сетке $y$) в точке $y_V = (zh(t))/s(t)$.

Преобразованные уравнения (1) и (2) с учетом (40) и интерполяций принимают вид:

$$U_t = \frac{d_1}{s^2} U_{yy} + \left( \frac{ys'}{s} + \frac{m_1}{s} U \right) U_y + U(a_1 - b_1 U - c_1 V_{\text{interp}}), \tag{41}$$

$$V_t = \frac{d_2}{h^2} V_{zz} + \left( \frac{zh'}{h} + \frac{m_2}{h} V \right) V_z + V(a_2 - b_2 U_{\text{interp}} - c_2 V). \tag{42}$$

Начальные условия (3), (4) запишутся так:

$$U(0,y) = u_0(y \cdot s_0), \quad y \in [0,1] \tag{43}$$

$$V(0,z) = v_0(z \cdot h_0), \quad z \in [0,1] \tag{44}$$

Граничные условия (5) и (6) в новых координатах запишутся так:

$$U_y(t,0) = 0, \quad V_z(t,0) = 0, \quad U(t,1) = 0, \quad V(t,1) = 0 \tag{45}$$

Условия Стефана (7) и (8) преобразуются к виду:

$$s' = -\mu_1 \frac{U_y(t,1)}{s}, \qquad h' = -\mu_2 \frac{V_z(t,1)}{h}. \tag{46}$$

Далее мы вводим равномерные сетки [23]:

$$y_i = i\Delta y, \qquad i = 0, 1, \ldots, N_y, \qquad \Delta y = \frac{1}{N_y},$$
$$z_j = j\Delta z, \qquad j = 0, 1, \ldots, N_z, \qquad \Delta z = \frac{1}{N_z},$$
$$t_n = n\Delta t, \qquad n = 0, 1, \ldots, N_t, \qquad \Delta t = \frac{T}{N_t}.$$

и следующие обозначения:

$$U_i^n \approx U(t_n, y_i), \qquad V_j^n \approx V(t_n, z_j), \qquad s^n \approx s(t_n), \qquad h^n \approx h(t_n).$$

Проведем дискретизацию уравнений (41) и (42). Для внутренних узловых точек ($i = 1, \ldots, N_y - 1$, $j = 1, \ldots, N_z - 1$):

$$\begin{aligned}\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} =& \frac{d_1}{(s^{n+1})^2}\frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \\ &+ \left(\frac{y_i(s^{n+1} - s^n)}{\Delta t \cdot s^{n+1}} + \frac{m_1}{s^{n+1}}U_i^{n+1}\right)\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2\Delta y} \\ &+ U_i^{n+1}(a_1 - b_1 U_i^{n+1} - c_1 V_{\text{interp},i}^{n+1}).\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} =& \frac{d_2}{(h^{n+1})^2}\frac{V_{j-1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \\ &+ \left(\frac{z_j(h^{n+1} - h^n)}{\Delta t \cdot h^{n+1}} + \frac{m_2}{h^{n+1}}V_j^{n+1}\right)\frac{V_{j+1}^{n+1} - V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \\ &+ V_j^{n+1}(a_2 - b_2 U_{\text{interp},j}^{n+1} - c_2 V_j^{n+1}).\end{aligned} \tag{48}$$

Отметим, что в (47) и (48) для вычисления $V_{\text{interp},i}$ и $U_{\text{interp},j}$ мы будем использовать линейную интерполяцию.

Граничные условия (45) аппроксимируются в виде:

$$\text{Левая граница:} \quad \frac{U_1^{n+1} - U_0^{n+1}}{\Delta y} = 0, \qquad \frac{V_1^{n+1} - V_0^{n+1}}{\Delta z} = 0. \tag{49}$$

$$\text{Правая граница:} \quad U_{N_y}^{n+1} = 0, \qquad V_{N_z}^{n+1} = 0. \tag{50}$$

Условия Стефана (46) запишутся в дискретной постановке:

$$s^{n+1} - s^n = -\Delta t \cdot \mu_1 \frac{U_{N_y}^{n+1} - U_{N_y-1}^{n+1}}{\Delta y \cdot s^{n+1}}, \tag{51}$$

$$h^{n+1} - h^n = -\Delta t \cdot \mu_2 \frac{V_{N_z}^{n+1} - V_{N_z-1}^{n+1}}{\Delta z \cdot h^{n+1}}. \tag{52}$$

Уравнения (47), (48), (51), (52) образуют нелинейную систему алгебраических уравнений, которую мы будем решать численно с помощью итерационного метода Ньютона. Для этой цели объединим все переменные в один вектор:

$$X = [U_0, U_1, \ldots, U_{N_y}, V_0, V_1, \ldots, V_{N_z}, s, h]^T. \tag{53}$$

Размерность вектора (53): $N = (N_y + 1) + (N_z + 1) + 2$.

Далее мы определяем вектор невязки $F(X^{n+1}) = 0$, где:

$$
\begin{aligned}
F_U^i &= \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} - \mathcal{L}_U[U^{n+1}, V^{n+1}, s^{n+1}, h^{n+1}],\\
F_V^j &= \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} - \mathcal{L}_V[U^{n+1}, V^{n+1}, s^{n+1}, h^{n+1}],\\
F_s &= s^{n+1} - s^n + \Delta t \cdot \mu_1 \frac{U_{N_y}^{n+1} - U_{N_y-1}^{n+1}}{\Delta y \cdot s^{n+1}},\\
F_h &= h^{n+1} - h^n + \Delta t \cdot \mu_2 \frac{V_{N_z}^{n+1} - V_{N_z-1}^{n+1}}{\Delta z \cdot h^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{L}_U$ и $\mathcal{L}_V$ – дискретные операторы правых частей.

Тогда матрица Якоби $J = \frac{\partial F}{\partial X}$ имеет блочную структуру:

$$
J = \begin{bmatrix} J_{UU} & J_{UV} & J_{Us} & J_{Uh} \\ J_{VU} & J_{VV} & J_{Vs} & J_{Vh} \\ J_{sU} & J_{sV} & J_{ss} & J_{sh} \\ J_{hU} & J_{hV} & J_{hs} & J_{hh} \end{bmatrix} \tag{54}
$$

Для примера приведем структуру блоков в (54) для $U$.

**Блок** $J_{UU}$: Производные $F_U^i$ по $U_k$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_U^i}{\partial U_{i-1}} &= -\frac{d_1}{s^2 \Delta y^2} + \frac{1}{2\Delta y}\left(\frac{y_i s'}{s} + \frac{m_1 U_i}{s}\right)\\
\frac{\partial F_U^i}{\partial U_i} &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{2d_1}{s^2 \Delta y^2} - \frac{m_1}{2s\Delta y}(U_{i+1} - U_{i-1}) - (a_1 - 2b_1 U_i - c_1 V_{\text{interp},i})\\
\frac{\partial F_U^i}{\partial U_{i+1}} &= -\frac{d_1}{s^2 \Delta y^2} - \frac{1}{2\Delta y}\left(\frac{y_i s'}{s} + \frac{m_1 U_i}{s}\right)
\end{aligned}
$$

**Блок** $J_{UV}$: Производные $F_U^i$ по $V_k$ (через интерполяцию)

$$
\frac{\partial F_U^i}{\partial V_k} = c_1 U_i \frac{\partial V_{\text{interp},i}}{\partial V_k}
$$

**Блок** $J_{Us}$: Производные $F_U^i$ по $s$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_U^i}{\partial s} =& \frac{2d_1}{s^3 \Delta y^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}) - \frac{y_i s'}{s^2 \Delta t}(U_{i+1} - U_{i-1})\\
&- \frac{m_1 U_i}{s^2 \Delta y}(U_{i+1} - U_{i-1}) + \frac{y_i}{s\Delta t \Delta y}(U_{i+1} - U_{i-1})
\end{aligned}
$$

**Блок** $J_{Uh}$: Производные $F_U^i$ по $h$ (через интерполяцию)

$$
\frac{\partial F_U^i}{\partial h} = c_1 U_i \frac{\partial V_{\text{interp},i}}{\partial h}
$$

Аналогично вычисляются блоки для $V$.

Отметим, что граничные условия (49), (50) включаются в матрицу Якоби:

$$\begin{aligned} &\text{условие Неймана:} \quad J_{uu}[0,0] = -1, \quad J_{uu}[0,1] = 1, \\ &\text{условие Дирихле:} \quad J_{uu}[N_y, N_y] = 1. \end{aligned}$$

**Условия Стефана дают:**

$$\frac{\partial F_s}{\partial U_{N_y-1}} = \frac{\Delta t \cdot \mu_1}{s\Delta y}, \qquad \frac{\partial F_s}{\partial U_{N_y}} = -\frac{\Delta t \cdot \mu_1}{s\Delta y}, \qquad \frac{\partial F_s}{\partial s} = 1 + \frac{\Delta t \cdot \mu_1}{s^2 \Delta y}(U_{N_y} - U_{N_y-1}).$$

Метод Ньютона можно представить в виде следующего алгоритма:

**Algorithm 1** Метод Ньютона

```
procedure NewtonSolver(U^n, V^n, s^n, h^n, Δt)
    Инициализировать: U^(0) ← U^n, V^(0) ← V^n, s^(0) ← s^n, h^(0) ← h^n
    for k = 0, 1, 2, ... до сходимости do
        Вычислить невязку F^(k) = F(U^(k), V^(k), s^(k), h^(k))
        Вычислить матрицу Якоби J^(k) = ∂F^(k)/∂X
        Решить линейную систему: J^(k) Δ^(k) = −F^(k)
        Обновить решение: X^(k+1) = X^(k) + ωΔ^(k)        ▷ ω – параметр релаксации
        Применить ограничения: U^(k+1) ≥ 0, V^(k+1) ≥ 0, s^(k+1) > 0, h^(k+1) > 0
        if ‖F^(k+1)‖ < ϵ then break
        end if
    end for
    return U^(k), V^(k), s^(k), h^(k)
end procedure
```

Отметим, некоторые особенности Алгоритма 1.

Для вычисления $V_{\text{interp},i}$ и $U_{\text{interp},j}$ используется линейная интерполяция:

$$V_{\text{interp},i} = \text{interp}(V, z = y_i s/h), U_{\text{interp},j} = \text{interp}(U, y = z_j h/s).$$

Производные интерполяции вычисляются аналитически.

Для обеспечения устойчивости введен параметр релаксации (регуляризации) $\omega \in (0, 1]$ для предотвращения расходимости, введено ограничение переменных для обеспечения физической корректности, введен адаптивный выбор шага по времени при расходимости метода Ньютона

Отметим, что метод Ньютона обладает следующими свойствами:

1. **Локальная сходимость**: При хорошем начальном приближении метод сходится квадратично
2. **Безусловная устойчивость**: Не требует ограничений на шаг по времени
3. **Второй порядок точности**: При использовании центральных разностей

Алгоритм 1 и визуализация результатов, полученных с помощью него, были реализованы на языке программирования Python [24] в среде PyCharm [25].

## Результаты моделирования

**Пример 1.** Значения параметров задачи (1)-(9) выберем следующим образом: $d_1 = 1.0, d_2 = 1.2,\ m_1 = 0.2, m_2 = 0.1,\ a_1 = 1.0, a_2 = 1.1,\ b_1 = 1.0, b_2 = 0.8,\ c_1 = 0.5,$ $c_2 = 1.0,\ \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.2,\ s_0 = 1.0, h_0 = 1.5,\ T = 1,\ N_y = 1000, N_z = 1000, N_t = 100.$

Начальные условия (43) и (44) выберем следующими:

$$U(0,y) = \frac{a_1}{b_1}(y(1-y))^2, y = x/s_0, V(0,z) = \frac{a_2}{c_2}(z(1-z))^2, z = x/h_0.$$

Отметим, можно показать, что значения параметров и начальные условия удовлетворяют требованиям (i)-(iv).

Результаты моделирования взаимодействия двух популяций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ со свободными границами ареалов их обитания приведены на рис.1.

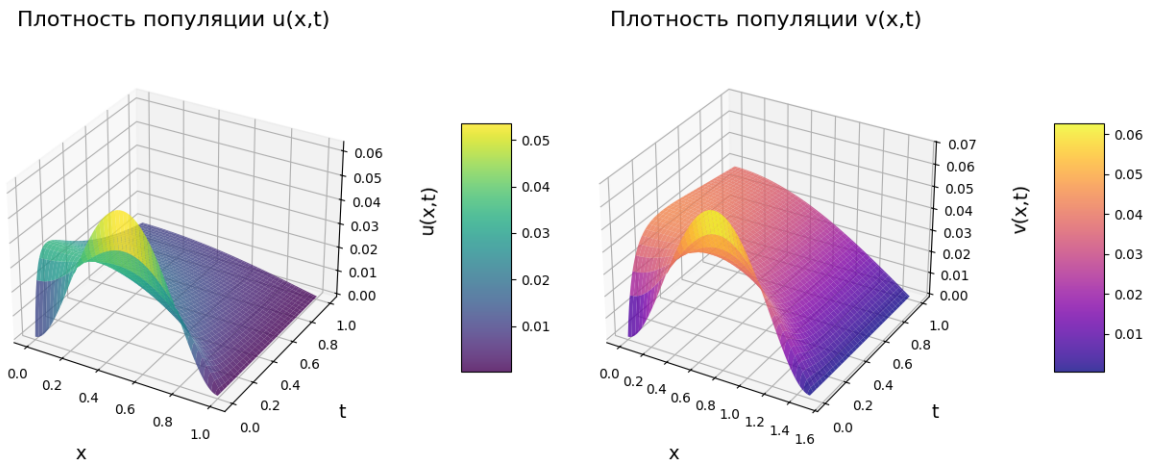


Рис. 1. Численное решение задачи (1)-(9) плотности популяций $u(x,t)$ и $v(x,t)$
Figure 1. Numerical solution of the problem (1)-(9) of population density $u(x,t)$ and $v(x,t)$

На рис.1 мы видим результат работы численного алгоритма, основанного на неявной конечно-разностной схеме (47)-(52) в виде 3D графиков функций плотностей популяций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Цветовая шкала на графике указывает на динамику значений этих функций: теплые тона означают большие значения, а холодные тона соответствуют меньшим значениям этих функций.

Мы видим здесь, как начальное распределение плотностей популяций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ с течением времени $t$ за счет механизма диффузии распространяется в соответствующих областях решения задачи. При таком диффузионном переносе значения плотностей популяции уменьшаются по мере освоения территории обитания. Например, для популяции $u(x,t)$ от 0.5 до 0, а для популяции $v(x,t)$ от 0.6 до 0.

Свободные границы $s(t)$ и $h(t)$ изменяются, наблюдается их небольшой рост (рис.2).

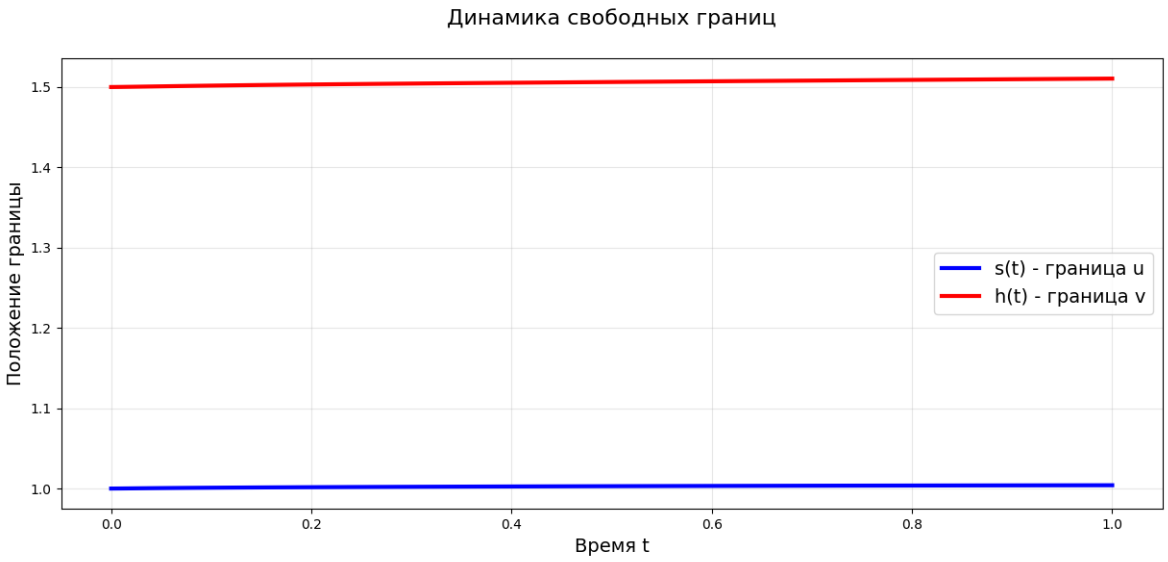


Рис. 2. Динамика свободных границ $s(t)$ и $h(t)$
Figure 2. Dynamics of free boundaries $s(t)$ and $h(t)$

Причем рост больше проявляется для популяции $v(x,t)$. Поэтому ареал обитания для этой популяции становится более шире, чем для популяции $u(x,t)$.

Это также обусловлено тем, что начальные значения плотности популяции $v(x,t)$ выше, чем значения у плотности популяции $u(x,t)$. Кроме того конечные значения плотностей популяций сохраняют такую же динамику (рис. 3).

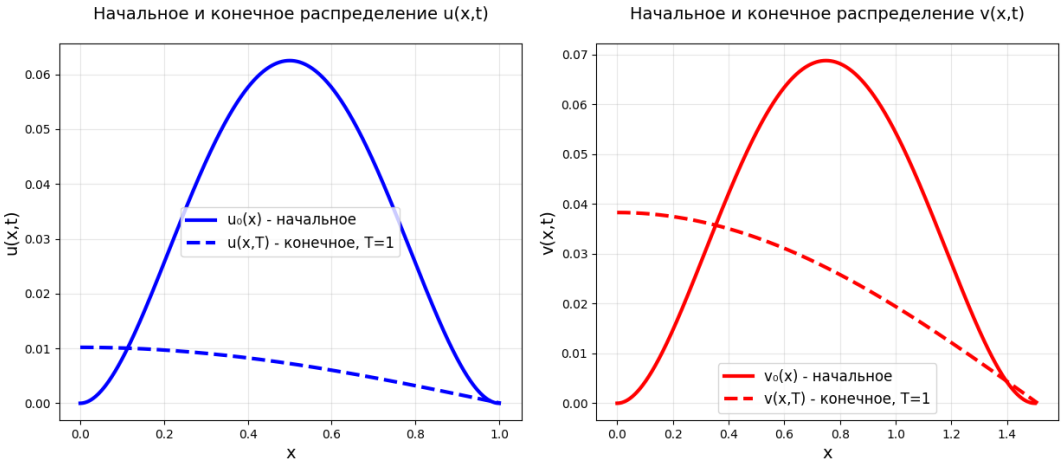


Рис. 3. Начальные и конечные распределения $u(x,t)$ и $v(x,t)$
Figure 3. Initial and final distributions $u(x,t)$ and $v(x,t)$

## Заключение

В работе исследовалась задача о конкурентном взаимодействии двух популяций со свободными границами ареала обитания. Динамика популяций определяется процессами диффузии, скорости роста и конкуренции. В статье проводится качественный анализ задачи: с помощью априорных оценок норм Гельдера доказывается однозначная разрешимость. В статье также проводится количественный анализ. Для этой цели с помощью численного метода, основанного на неявной конечно-разностной схеме строятся плотности распределения популяций. Показана динамика популяций с учетом изменения границ - области обитания.

Дальнейшее развитие работы может заключаться в более подробном моделировании различных ситуаций конкурентного взаимодействия двух популяций в условиях свободных границ их обитания.

## Список литературы


1. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. ММО, 1967. Т. 16, С. 329–346.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
3. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1968. 428 с.
4. Aronson D. G., Weinberger H. F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propogation / *Partial Differential Equations and Related Topics*, Lecture Notes in Mathematics, 446, 1975, pp. 5–49.
5. Asrakulova D. S., Elmurodov A. N. A reaction-diffusion-advection competition model with a free boundary // Uzb. Math. J., 2021. no. 3.
6. Cantrell R. S, Cosner C. *Spatial ecology via reaction-diffusion equations.* England: Wiley, 2003.
7. Ciliberto C. Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili // Ricerche di Matem., 1954. vol. 82, pp. 40–75.
8. Du Y., Lin Z. G. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary // SIAM J. Math. Anal., 2010. vol. 4, pp. 377–405.
9. Du Y., Lin Z. G. The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2014. vol. 19, pp. 3105–3132.
10. Gu H, Lin Z. G., Lou B. D. Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries // J. Funct. Anal., 2015. vol. 269, pp. 1714–1768.
11. Guo J. S., Wu C. H. On a free boundary problem for a two-species weak competition system // J Dyn Diff Equat, 2012. vol. 24, pp. 873–895.
12. Guo J. S., Wu C. H. Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries // Nonlinearity, 2015. vol. 28, pp. 1–27.
13. Lockwood M. F, Hoopes M. F., Marchetti M. P. *Invasion Ecology.* Oxford: Blackwell Publishing, 2013.
14. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations.* New York: Plenum Press, 1992.
15. Ren X., Liu L. A weak competition system with advection and free boundaries // J. Math. Anal. Appl., 2018. vol. 463, pp. 1006–1039.
16. Shigesada N., Kawasaki K. *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford Series in Ecology and Evolution. Oxford: Oxford University Press, 1997.
17. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology // Indian J. Pure Appl. Math., 2019. vol. 50, pp. 95–112.

18. Takhirov J. O., Rasulov M. S. Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type // Ukr. Math. J., 2018. vol. 69, pp. 1968–1980.

19. Wang R., Wang L., Wang Zh. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math. Anal. Appl., 2018. vol. 467, pp. 1233–1257.

20. Wang M., Zhao J. Free Boundary Problems for a Lotka-Volterra Competition System // Jour. Dyn. Differ. Equ., 2014. vol. 26, pp. 1–21.

21. Wang M., Zhang Y. Two kinds of free boundary problems for the diffusive prey-predator model // Nonlinear Anal. Real World Appl., 2015. vol. 24, pp. 73–82.

22. Wu C. H. The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries // J. Differential Equation, 2015. vol. 259, pp. 873–897.

23. Tadmor E. A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations // Bulletin of the American Mathematical Society, 2012. vol. 49, no. 4, pp. 507-554.

24. Shaw Z. A. *Learn Python the Hard Way*: Addison-Wesley Professional, 2024.

25. Van Horn B.M., Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications Like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*: Packt Publishing Ltd, 2023.

## Информация об авторах

*Зуннунов Рахимжон Темирбекович* – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0001-9392-5464.

*Расулов Мирожиддин Собиржонович* – кандитат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0003-0704-6012.

*Паровик Роман Иванович* – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия ORCID 0000-0002-1576-1860.

## References


[1] Kruzhkov S.N. Nonlinear parabolic equations with two independent variables, Tr. MMO, 1967, vol. 16, pp. 329–346,(In Russian).

[2] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Linear and quasilinear equations of parabolic type, Moscow, Nauka, 1967, 736 p.,(In Russian).

[3] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type, Moscow, Mir, 1968, 428 p.,(In Russian).

[4] Aronson D.,G., Weinberger H.,F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve pulse propogation, In: Partial Differential Equations and Related Topics, Lecture Notes in Mathematics, 1975, vol. 446, pp. 5–49.

[5] Asrakulova D.,S., Elmurodov A.,N. A reaction-diffusion-advection competition model with a free boundary, Uzb. Math. J., 2021, vol. 2021, no. 3.

[6] Cantrell R.,S, Cosner C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations, England, Wiley, 2003, 428 p.

[7] Ciliberto C. Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili, Ricerche di Matem., 1954, vol. 82, pp. 40–75.

[8] Du Y., Lin Z.,G. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 2010, vol. 4, pp. 377–405.

[9] Du Y., Lin Z.,G. The diffusive competition model with a free boundary: invasion of a superior or inferior competitor, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 2014, vol. 19, pp. 3105–3132.

[10] Gu H, Lin Z.,G., Lou B.,D. Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries, J. Funct. Anal., 2015, vol. 269, pp. 1714–1768.

[11] Guo J.,S., Wu C.,H. On a free boundary problem for a two-species weak competition system, J Dyn Diff Equat, 2012, vol. 24, pp. 873–895.

[12] Guo J.,S., Wu C.,H. Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, Nonlinearity, 2015, vol. 28, pp. 1–27.

[13] Lockwood M.,F, Hoopes M.,F., Marchetti M.,P. Invasion Ecology, Oxford, Blackwell Publishing, 2013, 444 p.

[14] Pao C.,V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, New York, Plenum Press, 1992, 777 p.

[15] Ren X., Liu L. A weak competition system with advection and free boundaries, J. Math. Anal. Appl., 2018, vol. 463, pp. 1006–1039.

[16] Shigesada N., Kawasaki K. Biological Invasions: Theory and Practice, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford, Oxford University Press, 1997, 224 p.

[17] Takhirov J.,O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology, Indian J. Pure Appl. Math., 2019, vol. 50, pp. 95–112.

[18] Takhirov J.,O., Rasulov M.,S. Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type, Ukr. Math. J., 2018, vol. 69, pp. 1968–1980.

[19] Wang R., Wang L., Wang Zh. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term, J. Math. Anal. Appl., 2018, vol. 467, pp. 1233–1257.

[20] Wang M., Zhao J. Free Boundary Problems for a Lotka-Volterra Competition System, Jour. Dyn. Differ. Equ., 2014, vol. 26, pp. 1–21.

[21] Wang M., Zhang Y. Two kinds of free boundary problems for the diffusive prey-predator model, Nonlinear Anal. Real World Appl., 2015, vol. 24, pp. 73–82.

[22] Wu C.,H. The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries, J. Differential Equation, 2015, vol. 259, pp. 873–897.

[23] Tadmor E. A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations. Bulletin of the American Mathematical Society. 2012. vol. 49. no. 4. pp. 507-554.
[24] Shaw Z. A. Learn Python the Hard Way, Addison-Wesley Professional. 2024.
[25] Van Horn B.M., Nguyen Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications Like a Pro with the Ultimate Python Development Tool, Packt Publishing Ltd. 2023.

## Information about the authors

*Zunnunov Rakhimjon Temirbekovich* – D.Sci. (Phys. Math.), Leading Researcher, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-9392-5464.

*Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich* – PhD (Phys. Math.), Senior Researcher, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0003-0704-6012.

*Parovik Roman Ivanovich* – DSc (Phys. Math., docent, Leading Researcher at the Laboratory of Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.