Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 52. №3. С. 95 - 110. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-95-110

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 004.65:519.6:550.3

База данных параметров базисных мод и коэффициентов спектральных моделей геодинамо

Г. М. Водинчар[*1], Е. А. Казаков[1], С. С. Лисюткин[1,2]

[1] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, ул. Мирная, 7, с. Паратунка, Камчатский край, 684034

[2] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, ул. Пограничная, 4, г. Петропавловск-Камчаский, 683032

Аннотация. Спектральные модели геодинамо строятся на основании конечного набора базисных стационарных полей (мод). Поля скорости, температуры и магнитной индукции представляются в моделях в виде линейных комбинаций базисных мод с коэффициентами (амплитудами), зависящими от времени. Для амплитуд составляется динамическая система, коэффициенты которой (коэффициенты Галеркина) вычисляются на основании мод. Поэтому для составления модели необходимы моды и коэффициенты. Самый естественный набор базисных мод – это собственные моды свободных затуханий скорости, температуры и магнитной индукции в ядре Земли. Каждая такая мода определяется стандартным математическим выражением, но это выражение содержит несколько числовых параметров. Одним из параметров является собственное значение. Хранить параметры мод и вычисленные на их основе коэффициенты Галеркина удобно в структурированной форме в реляционной базе данных (БД). В работе описывается структура разработанной для этих целей БД. На основе анализа строения собственных мод и выделения характеризующих моды атрибутов определяются структуры реляционных таблиц БД и связи между ними. Анализируются структура коэффициентов Галеркина с точки зрения представления их в БД. На основе этого анализа разрабатывается структура реляционных таблиц для коэффициентов и связи между ними и с таблицами мод. Разработанная БД интегрирована в вычислительную систему моделирования геодинамо. С одной стороны, в этой системе БД служит источником данных для модулей численного моделирования. С другой стороны, входящие в систему модули расчета параметров собственных мод и коэффициентов Галеркина позволяют добавлять к БД новые записи. Схема взаимодействия вычислительных модулей и БД также описывается в статье.

Ключевые слова: геодинамо, спектральные модели, моды свободного затухания, метод Галеркина, реляционные базы данных

Получение: 13.11.2025; Исправление: 18.11.2025; Принятие: 20.11.2025; Публикация онлайн: 21.11.2025

Для цитирования. Водинчар Г. М., Казаков Е. А., Лисюткин С. С. База данных параметров базисных мод и коэффициентов спектральных моделей геодинамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 52. № 3. С. 95-110. EDN: HQPQOS. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-95-110.

Финансирование. Исследование выполнено по Государственному заданию ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: gvodinchar@ikir.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 52. no. 3. P. 95 - 110. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-95-110

Research Article

Full text in Russian

MSC 68P05, 86A25, 65M60

Basic Modes Parameters and Geodynamo Spectral Models Coefficients Database

G. M. Vodinchar[*1], *E. A. Kazakov*[2], *S. S. Lisyutkin*[1,2]

[1] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Mirnaya str., 7, Paratunka, Kamchatka, Russia, 684034

[2] Vitus Bering Kamchatka State University, Pogranichnaya str., 4, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, 683032

Abstract. The geodynamo spectral models are constructed based on a finite set of basic stationary fields (modes). The velocity, temperature, and magnetic induction fields are represented in this models as linear combinations of the basic modes with time-dependent coefficients (amplitudes). A dynamic system is constructed for the amplitudes, whose coefficients (Galerkin coefficients) are calculated based on the modes. Therefore, modes and coefficients are necessary to construct the model. The most natural set of basic modes are the eigenmodes of free decay of velocity, temperature, and magnetic induction in the Earth's core. Each such mode is defined by a standard mathematical expression, but this expression contains several numerical parameters. One of these parameters is the eigenvalue. It is convenient to store the mode parameters and the Galerkin coefficients calculated from them in a structured form in a relational database (DB). This paper describes the structure of a DB developed for these purposes. Based on an analysis of the structure of the eigenmodes and the identification of attributes characterizing the modes, the structures of the relational tables of the DB and the relationships between them are determined. The structure of Galerkin's coefficients is analyzed for their representation in a database. Based on this analysis, a structure for relational tables for the coefficients and the relationships between them and the mode tables is developed. The developed DB is integrated into a computational system for geodynamo modeling. In this system, the DB serves as a data source for numerical modeling modules. Furthermore, the modules included in the system for calculating eigenmode parameters and Galerkin coefficients allow new records to be added to the DB. The interaction between the computational modules and the database is also described in the article.

Key words: geodynamo, spectral models, free decay modes, Galerkin's method, relational databases.

Received: 13.11.2025; Revised: 18.11.2025; Accepted: 20.11.2025; First online: 21.11.2025

For citation. Vodinchar G. M., Kazakov E. A., Lisyutkin S.,S. Basic Modes Parameters and Geodynamo Spectral Models Coefficients Database. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **52**: 3, 95-110. EDN: HQPQOS. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-95-110.

Funding. The study was carried out under the State Subject of IKIR FEB RAS (reg. № 124012300245-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence: E-mail: gvodinchar@ikir.ru

Введение

Задача геодинамо заключается в решении системы уравнений магнитогидродинамической (МГД) конвекции несжимаемой жидкости во вращающейся системе координат в сферической оболочке [1–3]. Эта система включает в себя уравнения Навье-Стокса для несжимаемой среды, уравнения температуропроводности, уравнение индукции в приближении МГД, а также условие неразрывности магнитных силовых линий. Такая система уравнений нелинейна в членах описывающих взаимодействие всех трех основных полей — скорости, температуры, магнитной индукции. Кроме того известен ряд так называемых теорем запрета (теорем антидинамо) утверждающих, что механизм гидромагнитного динамо существенно трехмерный [4]. Получается, что система геодинамо принципиально нелинейная и трехмерная. Решать такие системы можно только численными методами. Используются для этих задач как разностные, так и проекционные методы, или их комбинации. Среди проекционных методов наиболее распространен метод Галеркина, который часто используется в комбинации с разностным, когда зависимость полей от широты и долготы описывается разложением по сферическим гармоникам, а зависимость от радиуса и времени рассчитывается подходящим разностным методом [2, 5–7].

Решения нестационарных задач математической физики в различных вариантах метода Галеркина ищутся в виде линейных комбинаций конечного числа стационарных базисных полей (мод). Коэффициенты (амплитуды) в этих комбинациях зависят от времени. Сами моды обычно ортогональны в области вычисления решения и, предпочтительно, выбираются из полной системы. Для такой системы выбираются собственные моды подходящей спектральной задачи. Динамическая система для амплитуд получается проектированием уравнений задачи на базисные моды. Эта система вместе с выбранным конечным набором базисных мод и образует спектральную модель геодинамо. Желательно, чтобы моды образовали пространственные структуры, наиболее естественные для изучаемой физической системы. Самыми подходящими с этой точки зрения являются собственные моды свободных колебаний или свободной диссипации полей линеаризованных задач.

Для применения спектральных моделей необходимо решить две задачи. Во-первых, необходимо составить динамическую систему для амплитуд. Во-вторых, эту систему необходимо решить. Сама динамическая система является квадратично-нелинейной с постоянными коэффициентами, которые определяются управляющими параметрами модели и набором выбранных мод. Её численное решение не вызывает особых затруднений. Гораздо сложнее составить саму динамическую систему для амплитуд мод, то есть вычислить все коэффициенты Галеркина. Вычисление коэффициентов заключается в вычислении объёмных интегралов по сферической области от различных мультипликативных комбинаций основных мод и их пространственных производных. Эти комбинации образуют весьма сложные выражения и даже безошибочная запись подынтегральных выражений в расчетной программе проблематична. Скорее всего, именно это и представляет собой основную трудность при использовании спектральных методов. К тому же зачастую приходится экспериментировать с набором базисных мод, что требует нового пересчета коэффициентов.

Для решения проблемы вычисления коэффициентов была разработана ранее вычислительная технология, основанная на использовании символьно-численных вычислений с привлечением методов компьютерной алгебры [8, 9]. Эта технология прежде всего позволяет вычислять параметры базисных мод, т.е. строить базис разложения. Затем она формирует программно в символьной форме подынтегральные выражения и вычисляет интегралы, частично — аналитически, частично — численно.

Чтобы избежать многократного пересчета параметров базисных мод и коэффициентов целесообразно сохранять уже вычисленные коэффициенты и параметры, причем постепенно, по мере варьирования мод разложения, наращивать этот массив данных. Тогда возникает необходимость в разработке реляционной базы данных, которая бы структурировала этот массив и позволяла быстро производить поиск, извлечение и добавление новой информации [10]. Настоящая статья посвящена описанию структуры такой базы данных (БД) и ее интеграции в систему моделирования геодинамо. Ранее была разработана база данных для хранения параметров базисных мод [11], однако ее логическая структура такова, что использовать эту базу для объединенного хранения параметров мод и коэффициентов затруднительно.

Отметим, что говоря о поле температуры в настоящей работе, мы имеем в виду не полную температуру, а ее отклонение от стационарного распределения, соответствующего переносу тепла только за счет теплопроводности.

Структура базы данных

Структура разработанной БД, т.е. множество реляционных таблиц, их столбцов (атрибутов) и связей между таблицами определяется структурированным описанием базисных мод и коэффициентов Галеркина.

Базисные моды

Опишем строение базисных мод, которое определит далее соответствующую структуру реляционных таблиц БД. Необходимо хранить информацию о пяти типах мод: тороидальных и полоидальных модах скорости, тороидальных и полоидальных модах магнитного поля, модах температуры.

Каждая мода скорости и магнитного поля идентифицируется мультииндексами вида $(type, k, n, m)$, где целочисленные индексы k, n и m соответствуют дискретизации по сферическим координатам (r, θ, φ) спектра задач на собственные моды свободного затухания , а $type$ – бинарный индекс типа моды: тороидальная или полоидальная. Температурные моды идентифицируются мультииндексами (k, n, m). Моды с индексами n и m определяются в (θ, φ)-направлении (на поверхности сферы) сферической гармоникой $Y_n^m(\theta, \varphi)$. Радиальный индекс $k \geq 0$, индекс кошироты $n \geq 1$ для мод скорости и магнитной индукции и $n \geq 0$ для температурных мод, индекс долготы $m = -n, \dots, n$.

Рассмотрим эти пять типов мод более детально [9]:

- тороидальные моды скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{knm}^T &= \mathrm{rot}\left(R_{kn}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}\right), \\ R_{kn}^T(r) &= A_{kn}^T j_n\left(\sqrt{\mu_{kn}^T} r\right) + B_{kn}^T y_n\left(\sqrt{\mu_{kn}^T} r\right), \end{aligned} \tag{1}$$

  где $j_n(\cdot)$ и $y_n(\cdot)$ – сферические функции Бесселя 1-го и 2-го рода, A_{kn}^T, B_{kn}^T – числовые коэффициенты, μ_{kn}^T – собственные значения;

- полоидальные моды скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{knm}^P &= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(R_{kn}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}\right), \\ R_{kn}^P(r) &= C_{kn}^1 j_n\left(\sqrt{\mu_{kn}^P} r\right) + C_{kn}^2 y_n\left(\sqrt{\mu_{kn}^P} r\right) + C_{kn}^3 r^n + C_{kn}^4 r^{-n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

  где C_{kn}^i, $i = 1, \dots, 4$ – числовые коэффициенты, μ_{kn}^P – собственные значения;

- тороидальные моды магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{knm}^T &= \mathrm{rot}\left(X_{kn}^T(r) Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}\right), \\ X_{kn}^T(r) &= a_{kn}^T j_n\left(\sqrt{\eta_{kn}^T} r\right), \end{aligned} \tag{3}$$

  где a_{kn}^T – числовые коэффициенты, η_{kn}^T – собственные значения;

- полоидальные моды магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{knm}^P &= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\left(X_{kn}^P(r) Y_n^m(\theta, \varphi)\mathbf{r}\right), \\ X_{kn}^P(r) &= a_{kn}^P j_n\left(\sqrt{\eta_{kn}^P} r\right), \end{aligned} \tag{4}$$

  где a_{kn}^P – числовые коэффициенты, η_{kn}^P – собственные значения;

- температурные моды:

$$\begin{aligned} T_{knm} &= Z_{kn}(r) Y_n^m(\theta, \varphi), \\ Z_{kn}(r) &= a_{kn} j_n\left(\sqrt{\lambda_{kn}} r\right) + b_{kn} y_n\left(\sqrt{\lambda_{kn}} r\right), \end{aligned} \tag{5}$$

  где a_{kn}, b_{kn} – числовые коэффициенты, λ_{kn} – собственные значения.

Из этих выражений видно, что каждая мода определяется параметрами — собственным значением и набором числовых коэффициентов. Числовые значения этих параметров находятся из уравнений на собственные значения, краевых и нормировочных условий соответствующих спектральных задач [9]. Тороидальные моды скорости $\mathbf{v}^{T}_{knm}$ и температуры T_{knm} определяются двумя коэффициентами и собственным значением, и тороидальные $\mathbf{B}^{T}_{knm}$ и полоидальные $\mathbf{B}^{P}_{knm}$ магнитные моды — одним коэффициентом и собственным значением, а полоидальные моды скорости $\mathbf{v}^{P}_{knm}$ — тремя коэффициентами и собственным значением.

Можно сделать вывод, что каждая мода представляется кортежем:

$$\langle \mathrm{name}, \mathrm{type}, k, n, m, \mathrm{eigenvalue}, coeff_1, \dots \rangle, \tag{6}$$

где name – символ имени поля моды («V» –скорость, «M» – магнитная индукция, «T» – температура), type – двоичный индекс типа моды («0» – тороидальная, «1» – полоидальная, «None» – для температурной моды), k, n, m – индексы дискретизации по координатам, eigenvalue – собственное значение, coeff_1, coeff_2, coeff_3, coeff_4 – коэффициенты, число которых у разных мод, отличается, от одного до четырёх. Строение этого кортежа определяет структуру таблиц мод в БД и связей между ними.

Структура таблиц для представления мод

Моды одного типа с одинаковыми значениями k и n и отличающиеся только значением m обладают одинаковыми собственными значениями и коэффициентами. Поэтому в разработанной ранее для хранения параметров мод БД [11] для каждого из пяти типов мод использовалась своя реляционная таблица, причем индекс m в этой базе вообще не был представлен. Такое структурирование данных было связано с тем, что эта БД была предназначена только для хранения параметров мод. Описываемая в настоящей работе новая БД, помимо хранения данных о параметрах мод, должна связывать моды с коэффициентами Галеркина, поэтому в ней необходимо учитывать и индекс m, т.е. моды с разными m должны иметь разные уникальные ключи. В то же время многократно дублировать в таблицах записи, отличающиеся только m, нецелесообразно.

Количество коэффициентов у моды как видно из (1)-(5) может быть один для магнитных мод, два для тороидальной скорости и температуры, четыре для полоидальной скорости. Самый простой способ тогда — делать в таблице четыре столбца для этих коэффициентов, и для мод с меньшим числом коэффициентов писать нули в избыточных столбцах. Однако при таком подходе большая часть значений этих столбцов не будет нести полезной информации, а это должны быть атрибуты типа double, т.е. достаточно большие по объему. Поэтому лучше использовать различные таблицы для трех этих случаев.

Опишем разработанную структуру таблиц для представления мод и связей между ними, схематически изображенные на рис. 1. Наименования поля моды: «V» или «B» или «T» помещаются в атрибут name таблицы fields. Эта таблица через первичный ключ id_field связана отношением «один ко многим» с таблицей kn_index, в которой хранятся значения атрибутов $type$, k, n кортежа (6) в одноименных столбцах.

По комбинации значений полей id_field и type (по наименованию поля моды и ее типу) таблица kn_index через первичный ключ id_kn_index связана с одной из таблиц 1coeff, 2coeff, 4coeff отношением «один к одному». В соответствующих столбцах этих таблицах хранятся коэффициенты моды (один, три или четыре), а в столбце eigenvalue хранится ее собственное значение.

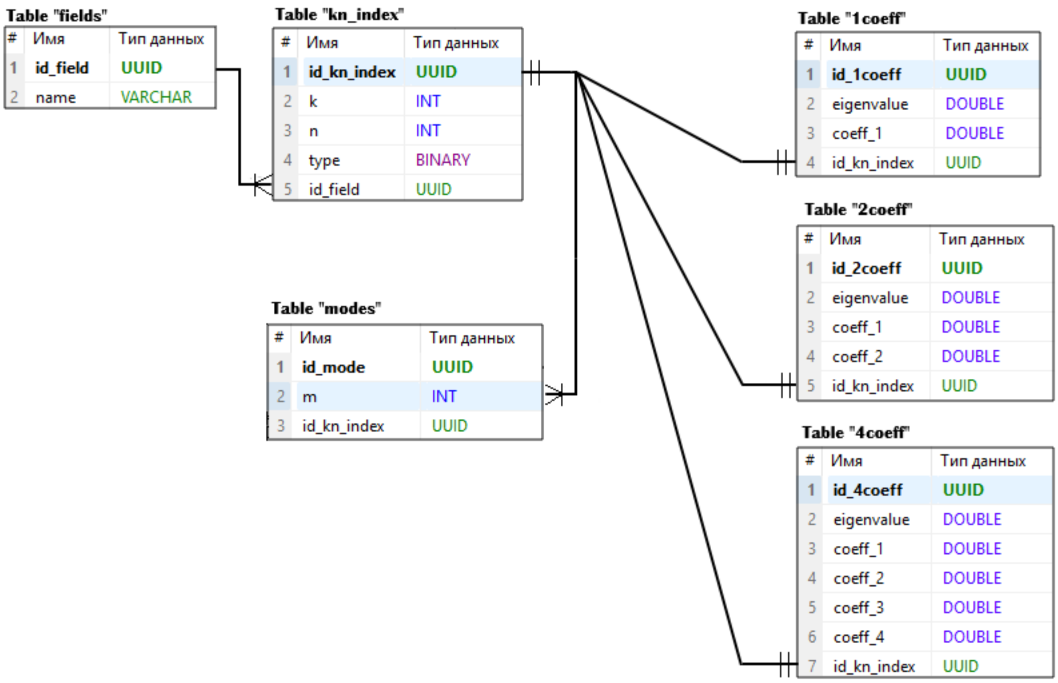

Рис. 1. Логическая схема таблиц для представления базисных мод и связи между ними. В каждой таблице первичный ключ выделен полужирным шрифтом
[Figure 1. A logical table diagram for representing basic modes and the relationships between them. In each table, the primary key is highlighted in bold]

Первичный ключ таблицы kn_index идентифицирует группу мод, отличающихся в кортеже (6) только значением индекса m. Разбивка этих групп на отдельные моды через значение атрибута столбца m реализована в таблице modes. Отношением «один ко многим» через первичный ключ таблица kn_index связана со столбцом id_kn_index таблицы modes.

Окончательно, первичный ключ id_mode таблицы modes является уникальным идентификатором конкретной базисной моды, и по системе связей, представленной на рис. 1, по значению этого идентификатору можно получить значения всех атрибутов кортежа (6) для данной моды.

Уравнения спектральной модели и коэффициенты Галеркина

Поля скорости $\mathbf{v}$, магнитной индукции $\mathbf{B}$ и температуры T в спектральных моделях приближенно представлены линейными комбинациями конечного числа мод:

$$\mathbf{v}\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{l\in L}\beta_l(t)\mathbf{v}_l\left(\mathbf{r}\right),\ \mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{p\in P}\gamma_p(t)\mathbf{B}_p\left(\mathbf{r}\right),\ T\left(\mathbf{r},t\right)=\sum_{s\in S}\alpha_s(t)T_s\left(\mathbf{r}\right),\qquad(7)$$

где каждая из мод скорости $\mathbf{v}_l$, магнитной индукции $\mathbf{B}_s$ и температуры T_s является одной из мод вида (1)-(5), т.е. каждый из индексов l, s и p в (7) вместе с наименованием поля моды является мультииндексом $(\mathrm{name},\mathrm{type},k,n,m)$ из элементов кортежа (6).

Построение каждой спектральной модели начинается с выбора конкретных мод для представления полей, т.е. с составления множеств мультииндексов L, P, S. Уравнения этой модели являются системой обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд $\beta_l(t)$, $\gamma_p(t)$ и $\alpha_s(t)$ базисных мод следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\beta_l}{dt}=\sum_{i,j\in L}B_{lij}\beta_i\beta_j-\mu_l\beta_l+E^{-1}\sum_{i\in L}E_{li}\beta_i+RaPr^{-1}\sum_{i\in S}C_{li}\alpha_i+\sum_{i,j\in P}Q_{lij}\gamma_i\gamma_j,\\
&\frac{d\alpha_s}{dt}=\sum_{i\in L,j\in S}F_{sij}\beta_i\alpha_j+\sum_{i\in L}H_{si}\beta_i-Pr^{-1}\lambda_s\alpha_s,\\
&\frac{d\gamma_p}{dt}=\sum_{i\in L,j\in P}W_{pij}\beta_i\gamma_j+R_\alpha\sum_{i\in P}W^{\alpha}_{pi}\gamma_i-Pm^{-1}\eta_p\gamma_p,\\
&l\in L,\quad s\in S,\quad p\in P,
\end{aligned}\qquad(8)$$

где управляющие параметры модели: число Экмана E, число Рэлея Ra, число Прандтля Pr, магнитное число Прандтля Pm, число Рейнольдса α-эффекта R_α, параметры $\mu_l>0$, $\lambda_s>0$ и $\eta_p>0$ являются собственными значениями соответствующих мод, а остальные коэффициенты, обозначенные прописными буквами с двумя или тремя индексами — это коэффициенты Галеркина. Для численного решения система (9), разумеется, должна дополняться начальными условиями для амплитуд:

$$\beta_l(0)=\beta_l^0\ \text{для}\ l\in L,\quad \alpha_s(0)=\alpha_s^0\ \text{для}\ s\in S,\quad \gamma_p(0)=\gamma_p^0\ \text{для}\ p\in P.\qquad(9)$$

Коэффициенты Галеркина определяются функциональными скалярными произведениями:

$$\begin{aligned}
&B_{lij}=-\langle(\mathbf{v}_i\nabla)\,\mathbf{v}_j,\mathbf{v}_l\rangle_1,\quad E_{li}=-2\langle\mathbf{e}_z\times\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_l\rangle_1,\quad C_{li}=\langle T_i\mathbf{r},\mathbf{v}_l\rangle_1,\\
&Q_{lij}=\langle\mathrm{rot}\mathbf{B}_i\times\mathbf{B}_j,\mathbf{v}_l\rangle_1,\quad F_{sij}=-\langle\mathbf{v}_i\left(\nabla T_j\right),T_s\rangle_2,\quad H_{si}=\frac{r_i}{1-r_i}\langle r^{-2}\mathbf{v}_i\mathbf{e}_r,T_s\rangle_2,\\
&W_{pij}=\langle\mathrm{rot}\left(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B}_j\right),\mathbf{B}_s\rangle_1,W^{\alpha}_{pi}=\langle\mathrm{rot}\left(r\cos\theta\mathbf{B}_i\right),\mathbf{B}_p\rangle_1,
\end{aligned}\qquad(10)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ понимаются в следующем смысле:

$$\begin{aligned}
&\langle\mathbf{p},\mathbf{q}\rangle_1=\iiint\limits_{r_i\le r\le 1}\mathbf{p}\,\mathbf{q}\,dV=\int_{r_i}^1 r^2\,dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{p}\,\mathbf{q}\,d\varphi,\\
&\langle f,g\rangle_2=\iiint\limits_{r_i\le r\le 1}fg\,dV=\int_{r_i}^1 r^2\,dr\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_{-\pi}^{\pi}fg\,d\varphi.
\end{aligned}\qquad(11)$$

Технология вычисления всех таких коэффициентов подробно описана в работах [8, 9]. Они вычисляются с помощью комбинированных символьно-численных вычислений [12], причем интегрирование по φ и θ выполняются аналитически, а по r интегрирование ведется численно. Часто уже первые два интегрирования дают нулевой результат. Тогда интегрирование по r уже не ведется, и можно утверждать, что коэффициент в точности нулевой. В этом содержится существенная физическая информация — каждый коэффициент Галеркина по абсолютной величине является мерой взаимодействия определяющих его мод в физическом процессе, описываемом соответствующим членом уравнения. Например, коэффициент Q_{lij} является мерой влияния на моду скорости $\mathbf{v}_l$ компоненты $\mathrm{rot}\mathbf{B}_i \times \mathbf{B}_j$ силы Лоренца. Поэтому в БД прежде всего нужны для каждого коэффициента бинарные значения – равен он точно нулю или нет. Если нет, то нужно хранить его численное значение.

Структура таблиц для представления коэффициентов Галеркина

Каждый коэффициент Галеркина (10) с точки зрения хранения его в БД можно идентифицировать по его буквенному символу и по двум или трем мультииндексам, которые идентифицируют определяющие его моды. Это определяет структуру реляционных таблиц и связей, представленную на рис. 2.

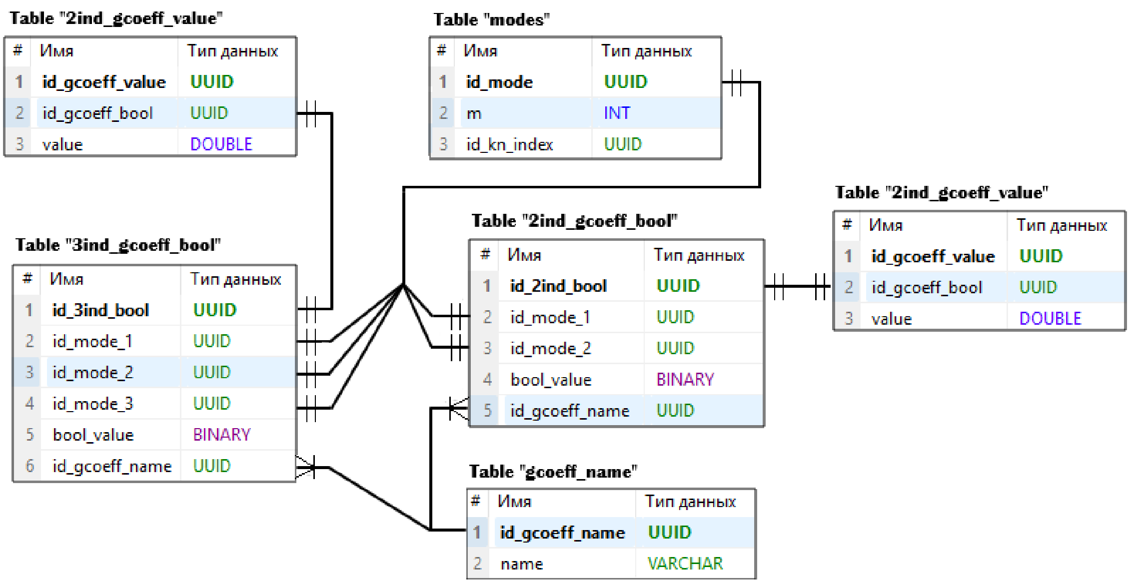

Рис. 2. Логическая схема таблиц для представления коэффициентов Галеркина, связи между ними и связь с основной таблицей мод. В каждой таблице первичный ключ выделен полужирным шрифтом

[Figure 2. Logical table diagram for representing Galerkin coefficients, the relationships between them, and the connection to the main mode table. In each table, the primary key is highlighted in bold]

Имена коэффициентов Галеркина «B», «E», «C», «Q», «F», «H», «W», «W_a» хранятся в символьном столбце name таблицы gcoeff_name хранятся имена коэффициентов системы (9). По значению этого поля (оно определяет количество индексов у коэффициента) устанавливается связь «один ко многим» с одной из таблиц 2ind_gcoeff_bool (для двухиндексных коэффициентов) или 3ind_gcoeff_bool (для трехиндексных коэффициентов). Ключевые поля id_2ind_bool и id_2ind_bool являются уникальными идентификаторами коэффициентов Галеркина в БД.

Через значения атрибутов в столбцах id_mode1 и id_mode1 устанавливается отношением «один к одному» связь таблицы 2ind_gcoeff_bool с таблицей modes, т.е. каждый двухиндексный коэффициент Галеркина связывается с уникальными идентификаторами определяющих его мод. Аналогично каждый трехиндексный коэффициент из таблицы 3ind_gcoeff_bool связывается с тройкой мод из modes.

В двоичных столбцах bool таблиц 2ind_gcoeff_bool и 3ind_gcoeff_bool записывается нуль, если в процессе вычисления коэффициент оказался нулевым по аналитическому интегрированию, и единица в противном случае. Эти таблицы булевых значений коэффициентов через свои первичные ключи связываются с таблицами 2ind_gcoeff_value и 3ind_gcoeff_value, где в столбцах value хранятся числовые значения коэффициентов. При этом запись для коэффициента в 2ind_gcoeff_value и 3ind_gcoeff_value есть только в том случае, если он ненулевой.

Здесь необходимо пояснить, что под категорию «ненулевой» попадают и те коэффициенты, чье истинное значение может и равно нулю, но в результате численного интегрирования по r их значение будет близко к нулю, но не точно нулевое.

База данных в вычислительной системе моделирования геодинамо

Общая структура разработанной БД со всеми таблицами и связями представлена на рис. 3.

Ее физическое проектирование было выполнено в открытой реляционной СУБД MariaDB распространяемой под лицензией GNU GPL и являющейся ответвлением MySQL [13].

База данных интегрирована в вычислительную систему, содержащую также скрипты символьно-численных вычислений параметров мод и коэффициентов Галеркина в пакете Maple [14, 15], и откомпилированные модули численного решения спектральных моделей геодинамо.

Взаимодействие между элементами системы осуществляет управляющая программа, написанная на Python. Связь управляющей программы с БД реализована с помощью MariaDB Connector/Python. Общая структура вычислительной системы и место БД в ней изображены на рис. 4.

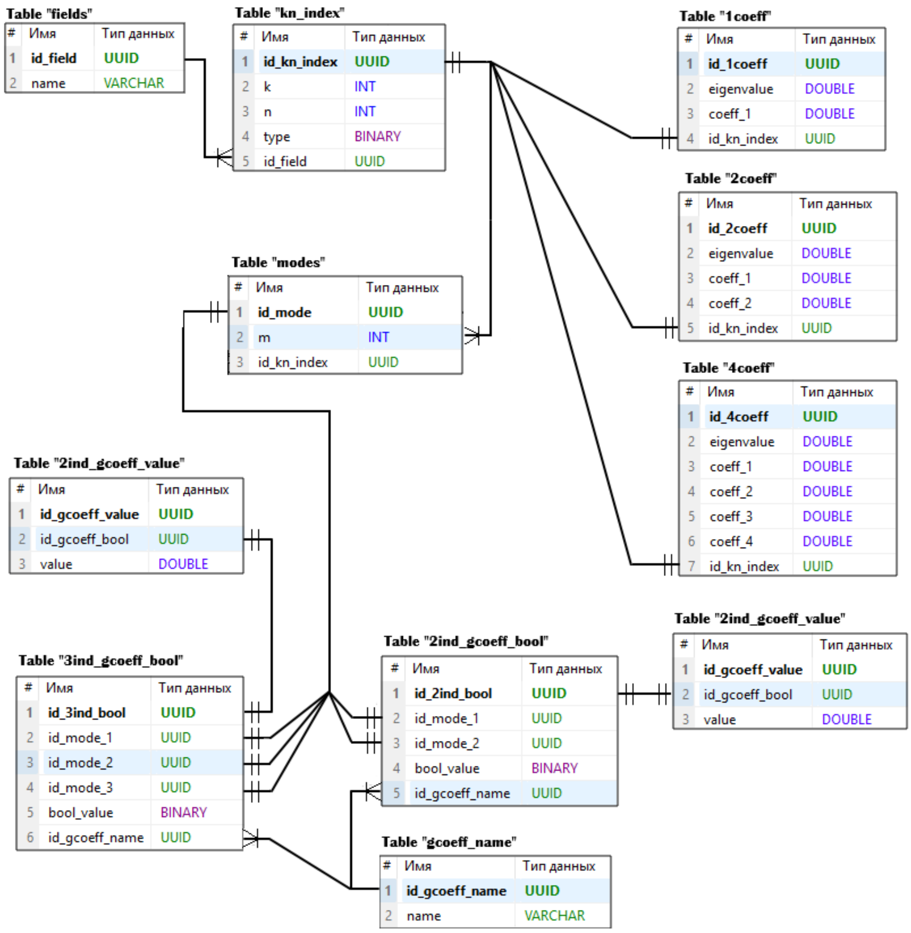

Рис. 3. Логическая схема разработанной базы данных. В каждой таблице первичный ключ выделен полужирным шрифтом
[Figure 3. The logical diagram of the developed database. In each table, the primary key is highlighted in bold]

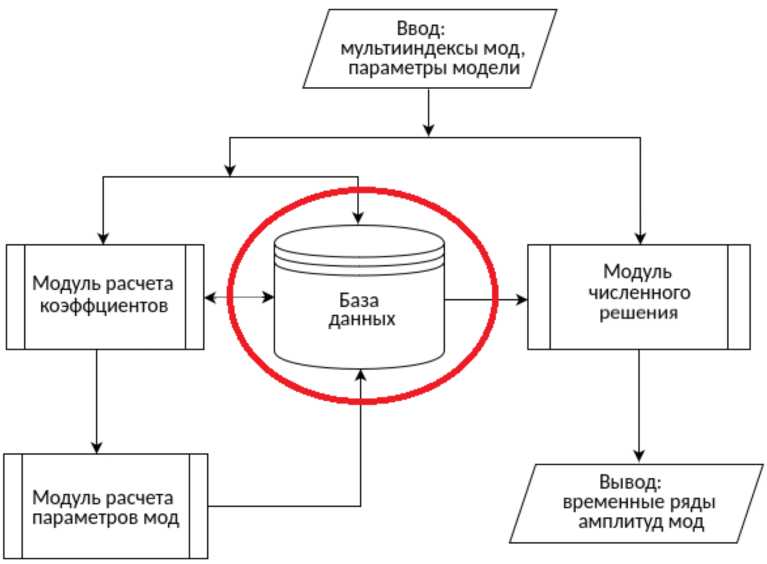

Рис. 4. Структура вычислительной системы моделирования геодинамо
[Figure 4. Geodynamo simulation computational system structure]

Опишем алгоритм работы системы до начала работы модуля численного решения:

1. На вход системы даются наборы мультииндексов мод, т.е. множества L, P и S.

2. Для каждого мультииндекса и имени физического поля («V» – для множества L, «M» – для множества P, «T» – для множества S) производится поиск соответствующей моды в таблице modes и по связям в таблицах kn_index и fileds.

3. Если каких-либо необходимых мод нет в БД, программа-оболочка запускает в фоновом режиме сеанс пакета Maple (без загрузки графического интерфейса) и ему передается на выполнение скрипт расчета параметров необходимых мод. Скрипт возвращает параметры мод, которыми пополняется БД. Когда в базе есть все необходимые моды, идет переход к следующему пункту.

4. Для каждого мультииндекса и имени физического поля и для имени каждого коэффициента Галеркина из таблицы gcoeff_name производится поиск соответствующего коэффициента в таблицах 2ind_gcoeff_bool и 3ind_gcoeff_bool. Если каких-либо нужных коэффициентов нет в БД, программа-оболочка запускает в фоновом режиме сеанс пакета Maple и ему передаются на выполнение скрипты расчета коэффициентов. Скрипты возвращают двоичные значения коэффициентов (нулевое или ненулевое) и числовые значения ненулевых коэффициентов. Таблицы 2ind_gcoeff_bool и/или 3ind_gcoeff_bool и 2ind_gcoeff_value и/или 3ind_gcoeff_value пополняются записями о новых коэффициентах. Когда в базе есть все необходимые коэффициенты, идет переход к следующему пункту.

5. Все необходимые коэффициенты Галеркина считываются из БД и передаются в модуль численного решения.

Все скрипты Maple для расчета параметров мод и коэффициентов Галеркина детально описаны в работе [9].

Отметим, что есть возможность запускать работу системы только для расчета параметров мод и/или коэффициентов. В этих случаях работа по вышеприведенной схеме останавливается на пунктах 3 или 4, соответственно.

В настоящее время БД развернута на одном из серверов ИКИР ДВО РАН. В нее были перенесены все данные из БД [11] с изменением структуры представления. После этого были проведены расчеты параметров всех новых мод и их запись в базу для индексов $n \leq 40$, $k \leq 50$ и всех соответствующих m. Всего в таблицах параметров 1_coeff и 1_coeff содержится 12801 запись. На данный момент это вероятно самая полная база параметров собственных мод свободного затухания магнитогидродинамических полей в жидком ядре Земли. Общее число мод, с которыми может оперировать вычислительная система с учетом различных m — более 650 тыс.

Вычисление коэффициентов Галеркина ведется по мере необходимости, в процессе работы с новыми наборами мод в моделях. Поскольку эти вычисления являются достаточно долгими, расчет «про запас» не ведется. На момент написания статьи в таблицах коэффициентов около 200 тыс. записей.

Заключение

Разработана база данных в которой хранятся два вида данных, необходимых для работы со спектральными моделями геодинамо. Во-первых это параметры собственных мод свободных затуханий полей скорости и отклонения температуры от стационарного распределения в жидком ядре Земли и свободных затуханий магнитного поля во всем ядре. Эти моды образуют физически естественный базис для аппроксимации соответствующих геофизических полей. Во-вторых это коэффициенты Галеркина, определяющие уравнения спектральных моделей. Расчет этих коэффициентов для заданного набора базисных мод в вычислительном отношении более трудоемкая задача, чем численное решение самих уравнений моделей. Поэтому постепенное накопление в базе коэффициентов, связанных с различными комбинациями мод, позволяет существенно сократить общее время моделирования. База интегрирована в систему моделирования геодинамо и пополняется новыми записями в процессе работы с этой системой.

Список литературы

1. Merril R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996. 532 pp.

2. Jones C. A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2000. vol. 358, pp. 873–897 DOI: 10.1098/rsta.2000.0565.

3. Aurnou J., King E. The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems // Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., 2017. vol. 473, 20160731 DOI:10.1098/rspa.2016.0731.

4. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике.*. М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006. 384 с.

5. Fletcher C. A .J. *Computational Galerkin Methods*. New York: Springer, 1984. 310 DOI:10.1007/978-3-642-85949-6 pp.

6. Hejda P., Reshetnyak M. The grid-spectra approach to 3-d geodynamo modelling // Computers and Geosciences, 2000. vol. 26, pp. 167–175 DOI:10.1016/S0098-3004(99)00077-1.

7. Schrinner M., Rädler K.-H., Schmitt D., Rheinhardt M., Christensen U. Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, 2007. vol. 26, pp. 167–175 DOI:10.1080/03091920701345707.

8. Водинчар Г. М., Фещенко Л. К. Применение компьютерной алгебры для составления спектральных моделей кинематического осесимметричного динамо // Вычислительные технологии, 2023. Т. 28, № 2, С. 4–18 DOI: 10.25743/ICT.2023.282.002.

9. Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System // Mathematics, 2023. vol. 11, no. 13, 3000 DOI: 10.3390/math11133000.

10. Харрингтон Д. Л. *Проектирование реляционных баз данных*. М.: Лори, 2006. 530 с.

11. Водинчар Г. М. База данных «Параметры собственных мод свободных колебаний МГД полей в ядре Земли». Св-во о госрегистрации № 2019620054 от 10.01.2019., Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем», Т. 1. Москва, ФИПС, 2019, https://www1.fips.ru/ofpstorage/BULLETIN/PrEVM/2019/01/20/INDEX.HTM.

12. Bauldry W. C. *Computational Calculus: A Numerical Companion to Elementary Calculus*. Sebastopol: Springer Cham, 2023. 106 DOI: 10.1007/978-3-031-29658-1 pp.

13. Dyer R. J. T. *Learning MySQL and MariaDB*. Sebastopol: O'Reilly, 2015. 443 pp.

14. McGuire R. H. G. *Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers*. Boston: Birkhauser, 1997. 213 pp.

15. Кирсанов М. Н. *Maple и Maplet. Решение задач механики*. С-Пб.: Лань, 2016. 512 с.

Информация об авторах

Водинчар Глеб Михайлович✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия, ORCID 0000-0002-5516-1931.

Казаков Евгений Анатольевич✉ – младший научный сотрудник, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия, ORCID 0000-0001-7235-4148.

Лисюткин Семен Сергеевич✉ – программист, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Камчатский край, Россия; магистрант, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский , Россия ORCID 0000-0001-7235-4148.

References

[1] Merril R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. London: Academic Press, 1996. 532 pp.

[2] Jones C. A. Convection-driven geodynamo models. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 2000. vol. 358, pp. 873–897. DOI: 10.1098/rsta.2000.0565

[3] Aurnou J., King E. The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems. Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., 2017. vol. 473, 20160731. DOI: 10.1098/rspa.2016.0731

[4] Zeldovich Ya. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnitny'e polya v astrofizike [Magnetic fields in astrophysics]. Moscow-Izhevsk, NIC RHD, 2006. 384 p. (In Russian)

[5] Fletcher C. A. J. Computational Galerkin Methods. New York: Springer, 1984. 310 pp. DOI:10.1007/978-3-642-85949-6

[6] Hejda P., Reshetnyak M. The grid-spectra approach to 3-d geodynamo modelling. Computers & Geosciences, 2000. vol. 26, pp. 167–175. DOI: 10.1016/S0098-3004(99)00077-1

[7] Schrinner M., Rädler K.-H., Schmitt D., Rheinhardt M., Christensen U. Mean-field concept and direct numerical simulations of rotating magnetoconvection and the geodynamo. Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, 2007. vol. 26, pp. 167–175. DOI:10.1080/03091920701345707

[8] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Computer algebra application for the developed of the spectral models of kinematic axisymmetric dynamo. Computational Technologies, 2023. vol. 28, no 2, pp. 4–18. DOI: 10.25743/ICT.2023.282.002. (In Russian)

[9] Vodinchar G., Feshchenko L. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System. Mathematics, 2023. vol. 11, no. 13, 3000. DOI: 10.3390/math11133000

[10] Harrington J. L. Relational Database Design and Implementation. Woltem.: Morgan Kaufmann, 2016. 714 p.

[11] Vodinchar G. M. Database «Parameters of the Eigenmodes of Free Oscillations of MHD Fields in the Earth's Core». State Registration Certificate №. 2019620054 at January 10, 2019. Official Bulletin «Computer Programs. Databases. Integrated Circuit Topologies». vol. 1. Moscow, FIPS, 2019, https://www1.fips.ru/ofpstorage/BULLETIN/PrEVM/2019/01/20/INDEX.HTM.

[12] Bauldry W. C. Computational Calculus: A Numerical Companion to Elementary Calculus. Berlin: Springer Cham, 2023. 106 pp. DOI: 10.1007/978-3-031-29658-1

[13] Dyer R. J. T. Learning MySQL and MariaDB. Sebastopol: O'Reilly, 2015. 443 pp.

[14] McGuire R. H. G. Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers. Boston: Birkhauser, 1997. 213 pp.

[15] Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Reshenie zadach mexaniki [Maple and Maplet. Solving mechanics problems]. S-Pb.: Lan', 2016. 512 p.

Information about the authors

Vodinchar Gleb Mikhailovich – PhD (Phys&Math), Docent, Leading Researcher, Institute of Cosmophysical Researh and Radio Wave Propagation, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0002-5516-1931.

Kazakov Evgeny Anatolyevich – Junior Research, Institute of Cosmophysical Researh and Radio Wave Propagation, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0001-7235-4148.

Lisyutkin Semyon Sergeevich – Programmer, Institute of Cosmophysical Researh and Radio Wave Propagation, Paratunka, Kamchatka, Russia; MS student, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0009-0000-9076-1521.