Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 52. №3. C. 63 - 74. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.96

Интегральное уравнение дробного порядка с инволюцией

Л. М. Энеева*

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

Аннотация. В работе рассматривается линейное интегральное уравнение, содержащее оператор дробного интегрирования в смысле Римана–Лиувилля и оператор инволюции. Рассматриваемое уравнение относится к классу функционально-интегральных уравнений, которые возникают при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних производных дробного порядка. Такие уравнения, в свою очередь, выступают основой эффективного аналитического аппарата при описании диссипативных колебательных систем, и, в частности, имеет важное значение при решении задач математического моделирования различных физических и геофизических процессов. В данной работе вопрос о разрешимости исследуемого функционально-интегрального уравнения редуцируется к вопросу о разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода с операторами дробного интегрирования. Для достижения этого проводится анализ одного функционального уравнения специального вида, находится формула его обращения. Основные результаты работы сформулированы в форме теоремы, указывающей достаточные условия на входные параметры задачи, обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение дробного порядка, интеграл Римана–Лиувилля, инволюция.

Получение: 06.11.2025; Исправление: 07.11.2025; Принятие: 09.11.2025; Публикация онлайн: 11.11.2025

Для цитирования. Энеева Л. М. Интегральное уравнение дробного порядка с инволюцией // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 52. № 3. C. 63-74. EDN: EOPADJ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМА КБНЦ РАН (№ 125031904215-5).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: eneeva72@list.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Энеева Л. М., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 52. no. 3. P. 63 - 74. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74

Research Article

Full text in Russian

MSC 45A05, 26A33

Fractional Integral Equation with Involution

L. M. Eneeva *

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. This paper considers a linear integral equation containing a fractional integration operator in the Riemann–Liouville sense and an involution operator. This equation belongs to the class of functional integral equations that arise in the study of boundary value problems for fractional differential equations containing a composition of left- and right-hand fractional derivatives. Such equations, in turn, form the basis of an effective analytical framework for describing dissipative oscillatory systems and, in particular, are of great importance in solving problems of mathematical modeling of various physical and geophysical processes. In this paper, the solvability of the functional integral equation under study is reduced to the solvability of a Fredholm integral equation of the second kind with fractional integration operators. To achieve this, we analyze a special functional equation and find its inversion formula. The main results of the paper are formulated as a theorem, specifying sufficient conditions on the input parameters of the problem that ensure the unique solvability of the equation under consideration.

Key words: fractional integral equation, Riemann-Liouville integral, involution.

Received: 06.11.2025; Revised: 07.11.2025; Accepted: 09.11.2025; First online: 11.11.2025

For citation. Eneeva L. M. Fractional integral equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **52**: 3, 63-74. EDN: EOPADJ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-52-3-63-74.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the IPMA KBSC RAS (reg. No. 125031904215-5).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

*Correspondence: E-mail: eneeva72@list.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Eneeva L. M., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)

Введение

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \lambda\, u(1-x) + \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — заданная функция; $x \in]0,1[$; $D_{0x}^{-\alpha}$ — дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α ($\alpha > 0$) с началом в точке $x = 0$ [1], λ, $\mu \in \mathbb{C}$.

Как известно [1], дробное исчисление, дифференциальные и интегральные уравнения с операторами дробного порядка играют важную роль в современном математическом моделировании, в частности, при решении задач адекватного описания различных физических и геофизических процессов.

Уравнение (1) относится к классу функционально-интегральных уравнений. Как показано в [2], такие уравнения возникают при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних производных дробного порядка, которые, в свою очередь, служат основой эффективного аналитического аппарата для моделирования диссипативных колебательных систем [3], [4].

Различные вопросы, связанные с изучением дифференциальных уравнений, содержащих композицию лево- и правосторонних производных дробного порядка, рассматривались в работах [5–14] (см. также библиографию работы [15]). Отметим также работы [15], [16], в которых исследовались дифференциальные уравнения дробного порядка с инволюцией.

В данной работе уравнение (1) в случае $\lambda^2 \neq 1$ эквивалентно сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Для этого проводится анализ функционального уравнения. Показано, что случай $\lambda^2 = 1$ является критическим. Для некритического случая доказана теорема о решении уравнения (1), в которой указаны достаточные условия на параметры λ, μ и α, гарантирующие существование и единственность искомого решения, а также найдено его представление. Отмечено также, что в случае $\lambda^2 = 1$ вопрос о разрешимости уравнения (1) приводит к системам, содержащим интегральные уравнения первого и второго рода.

Дробное интегрирование и оператор инволюции

Дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ с началом в точке $x = 0$ для функции $u(x) \in L(0,1)$ определяется равенством [1]

$$D_{0x}^{-\alpha} u(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u(t)(x-t)^{\alpha-1} dt. \tag{2}$$

Далее, через I_x будем обозначать оператор инволюции, который действует на функцию $u(x)$, заданную на отрезке $[0,1]$, по правилу

$$I_x u(x) := u(1-x). \tag{3}$$

Очевидно, что

$$I_x^2 u(x) = I_x\,(I_x u(x)) = u(x). \tag{4}$$

Функциональное уравнение

Здесь мы приведем ряд вспомогательных утверждений, касающихся разрешимости функционального уравнения

$$u(x) + \lambda\, u(1-x) = F(x), \tag{5}$$

где $u(x)$ — искомая, а $F(x)$ — заданная функции (вообще говоря, комплекснозначные), определенные в интервале $]0,1[$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. *Пусть $\lambda^2 \neq 1$. Тогда уравнение (5) имеет в точности одно решение, и оно определяется равенством*

$$u(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[F(x) - \lambda I_x F(x)\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, принимая во внимание обозначение (3), перепишем уравнение (5) в виде

$$u(x) + \lambda\, I_x u(x) = F(x), \tag{7}$$

и применим к обеим частям этого равенства оператор инволюции I. В силу (4) имеем

$$I_x u(x) + \lambda\, u(x) = I_x F(x). \tag{8}$$

Выражая из (8) величину $I_x u(x)$ и затем подставляя ее в (8), получаем

$$u(x) + \lambda\left[I_x F(x) - \lambda\, u(x)\right] = F(x).$$

Отсюда после простых преобразований приходим к (6). □

Далее обозначим через $\mathcal{I}^+$ множество определенных в интервале $]0,1[$ функций, инвариантных относительно операции инволюции. Другими словами, удовлетворяющих соотношению $g(x) = I_x g(x)$, т.е.

$$\mathcal{I}^+ = \{g(x) :\ g(x) = I_x g(x),\ x \in]0,1[\}. \tag{9}$$

И, аналогично, $\mathcal{I}^-$ будет обозначать множество функций, для которых операция инволюции меняет знак, и следовательно, имеет место равенство $g(x) = -I_x g(x)$, т.е.

$$\mathcal{I}^- = \{g(x) :\ g(x) = -I_x g(x),\ x \in]0,1[\}. \tag{10}$$

Замечание 1. Заметим, что любая линейная комбинация функций из $\mathcal{I}^+$ ($\mathcal{I}^-$) будет принадлежать $\mathcal{I}^+$ ($\mathcal{I}^-$). Другими словами, каждое из множеств $\mathcal{I}^+$ и $\mathcal{I}^+$ образует линейное пространство над полем $\mathbb{C}$. Их пересечение содержит лишь одну функцию — тождественный ноль.

Лемма 2. *Всякая функция $g(x)$, определенная в интервале $]0,1[$, может быть представлена, и притом единственным образом, в виде*

$$g(x) = g^+(x) + g^-(x), \tag{11}$$

где

$$g^+(x) \in \mathcal{I}^+ \qquad \text{и} \qquad g^-(x) \in \mathcal{I}^-. \tag{12}$$

Доказательство. Определим функции $g^+(x)$ и $g^-(x)$ равенствами

$$g^+(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + I_x g(x)\right] \qquad \text{и} \qquad g^-(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) - I_x g(x)\right].$$

Легко проверить, что $I_x g^+(x) = g^+(x)$ и $I_x g^-(x) = -g^-(x)$, а сумма функций $g^+(x)$ и $g^-(x)$ дает $g(x)$, т.е. имеет место равенство (11) и справедливы включения (12).

Остается показать, что представление (11) единственно. Предположим, что существует еще одно представление

$$g(x) = g_*^+(x) + g_*^-(x) \qquad \left(g_*^+(x) \in \mathcal{I}^+, \quad g_*^-(x) \in \mathcal{I}^-\right). \tag{13}$$

Сравнивая (11) и (13) получаем

$$g^+(x) - g_*^+(x) = g_*^-(x) - g^-(x).$$

Причем левая часть последнего равенства принадлежит $\mathcal{I}^+$, в то время как, правая часть принадлежит $\mathcal{I}^-$. С учетом сделанного выше замечания (см. Замечание 1) это означает, что

$$g^+(x) - g_*^+(x) = g_*^-(x) - g^-(x) \equiv 0.$$

То есть, $g^+(x) \equiv g_*^+(x)$ и $g^-(x) \equiv g_*^-(x)$. Это доказывает единственность представления (11). □

Лемма 3. *Пусть* $\lambda = 1$. *Тогда уравнение* (5) *имеет решение тогда и только тогда, когда*

$$F(x) \in \mathcal{I}^+. \tag{14}$$

При этом, решение определяется с точностью до произвольной функции $g(x) \in \mathcal{I}^-$, *и имеет вид*

$$u(x) = \frac{1}{2}F(x) + g(x) \qquad \left(g(x) \in \mathcal{I}^-\right). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (5) при $\lambda = 1$, т.е. пусть

$$u(x) + I_x u(x) = F(x). \tag{16}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор (3), в силу (4), получим

$$F(x) = I_x F(x).$$

Это означает, что в этом случае функция $F(x)$ необходимо принадлежит $\mathcal{I}^+$.

Далее, представим искомую функцию $u(x)$ в виде

$$u(x) = u^+(x) + u^-(x),$$

где $u^+(x) \in \mathcal{I}^+$ и $u^-(x) \in \mathcal{I}^-$. Подставляя это представление в (16), принимая во внимание равенство (4), а также определения (9) и (10), получаем

$$u^+(x) + u^-(x) + I_x\left(u^+(x) + u^-(x)\right) = 2u^+(x) = F(x).$$

Отсюда следует, что

$$u^+(x) = \frac{1}{2}F(x),$$

и, учитывая, что $u^-x(x) \in \mathcal{I}^-$, имеет место представление (15).

Обратно, непосредственно проверяется, что всякая функция вида (15) является решением уравнения (16), если выполнено включение (14). Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 4. *Если $\lambda = -1$, то уравнение* (5) *разрешимо тогда и только тогда, когда*

$$F(x) \in \mathcal{I}^-. \tag{17}$$

Решение определяется с точностью до произвольной функции $g(x) \in \mathcal{I}^+$, и имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2}F(x) + g(x) \qquad (g(x) \in \mathcal{I}^+)\,. \tag{18}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводится тем же путем, что и доказательство леммы 3. Записывая уравнение (5) при $\lambda = -1$ в виде

$$u(x) - I_x u(x) = F(x), \tag{19}$$

и применяя к обеим частям оператор (3) получаем включение (17).

Далее, представив искомое решение в виде $u(x) = u^+(x) + u^-(x)$, где $u^+(x) \in \mathcal{I}^+$ и $u^-(x) \in \mathcal{I}^-$, и подставляя его в (19) получаем, что $u^-(x) = \frac{1}{2}F(x)$. Отсюда следует (18).

И, наконец, тот факт, что любая функция вида (18) есть решение уравнения (19), при выполнении (17) проверяется непосредственно. □

Редукция к интегральному уравнению

Далее будем считать, что $\lambda^2 \neq 1$. Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1). Перепишем уравнение (1) в виде

$$u(x) + \lambda\, I_x u(x) = F(x, u),$$

где

$$F(x, u) = f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x). \tag{20}$$

Считая $F(x, u)$ известным, принимая во внимание (6), получим

$$u(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[F(x, u) - \lambda I_x F(x, u)\right], \tag{21}$$

или, с учетом (20),

$$u(x) = f_*(x) - \frac{\mu}{1-\lambda^2} K_x u(x), \tag{22}$$

где

$$K_x := D_{0x}^{-\alpha} - \lambda\, I_x D_{0x}^{-\alpha} \tag{23}$$

и

$$f_*(x) := \frac{f(x) - \lambda I_x f(x)}{1 - \lambda^2}. \tag{24}$$

Таким образом, при выполнении неравенства $\lambda^2 \neq 1$, любое решение уравнения (1) является решением уравнения (22).

Далее, пусть теперь $u(x)$ — решение уравнения (22), или, что то же самое, удовлетворяет соотношению (21). Применим к обеим частям (21) оператор I_x. Учитывая (4) имеем

$$I_x u(x) = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left[I_x F(x, u) - \lambda F(x, u) \right].$$

Умножая обе части последнего равенства на λ и складывая полученное равенство с (21), получаем

$$u(x) + \lambda I_x u(x) = \frac{1}{1 - \lambda^2} \left[F(x, u) - \lambda I_x F(x, u) \right] + \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \left[I_x F(x, u) - \lambda F(x, u) \right].$$

Отсюда следует, что

$$u(x) + \lambda I_x u(x) = F(x, u).$$

Учитывая (20) это означает, что всякое решение уравнения (22) является решением уравнения (1).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\lambda^2 \neq 1$. Функция $u(x) \in L(0, 1)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u(x)$ является решением уравнения*

$$u(x) + \lambda_* K_x u(x) = f_*(x), \tag{25}$$

где K_x и $f_*(x)$ определяются равенствами (23) и (24), а

$$\lambda_* := \frac{\mu}{1 - \lambda^2}. \tag{26}$$

Замечание 2. Заметим, что принимая во внимание определения (2) и (3), оператор K_x можно записать в виде

$$K_x u(x) = \int_0^1 u(t) k_\lambda(x, t)\, dt,$$

где

$$k_\lambda(x, t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(x - t)_+^{\alpha - 1} - \lambda (1 - x - t)_+^{\alpha - 1} \right] \tag{27}$$

и

$$(z)_+ := \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

Оценка оператора K_x

Далее через $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве $L(0,1)$, т.е.

$$\|g(x)\| := \int_0^1 |g(x)|\,dx.$$

Как известно (см., напр., [17, с. 243]), если $g(x) \in L(0,1)$ и $h(x) \in L(0,1)$, то $(g * h)(x) \in L(0,1)$, причем

$$\|(g * h)(x)\| \le \|g(x)\| \cdot \|h(x)\|. \tag{28}$$

Здесь и далее, $(g * h)(x)$ обозначает свертку функций $g(x)$ и $h(x)$, т.е.

$$(g * h)(x) := \int_0^x g(t)h(x-t)\,dt.$$

Лемма 6. *Пусть* $\lambda^2 \ne 1$ *и* $g(x) \in L(0,1)$. *Тогда*

$$K_x g(x) \in L(0,1) \tag{29}$$

и

$$\|K_x g(x)\| \le \frac{1+|\lambda|}{\Gamma(\alpha+1)}\|g(x)\|. \tag{30}$$

Доказательство. Заметим, что оператор дробного интегрирования $D_{0x}^{-\alpha}$, в силу определения (2), можно записать в виде свертки

$$D_{0x}^{-\alpha} g(x) = (g * h_\alpha)(x),$$

где

$$h_\alpha(x) := \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Поэтому, если $g(x) \in L(0,1)$, то

$$D_{0x}^{-\alpha} g(x) \in L(0,1). \tag{31}$$

Кроме того, в силу оценки (28) и равенства

$$\|h_\alpha(x)\| = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)},$$

имеет место неравенство

$$\|D_{0x}^{-\alpha} g(x)\| \le \frac{\|g(x)\|}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{32}$$

Теперь, принимая во внимание определение (23), можем написать

$$K_x g(x) = D_{0x}^{-\alpha} g(x) - \lambda\, I_x D_{0x}^{-\alpha} g(x).$$

В силу (31) это доказывает (29). Кроме того, имеем

$$\|K_x g(x)\| = \|D_{0x}^{-\alpha} g(x) - \lambda\, I_x D_{0x}^{-\alpha} g(x)\| \le \|D_{0x}^{-\alpha} g(x)\| + |\lambda|\,\|I_x D_{0x}^{-\alpha} g(x)\|.$$

Отсюда, в силу очевидного равенства

$$\|I_x D_{0x}^{-\alpha} g(x)\| = \|D_{0x}^{-\alpha} g(x)\|$$

и оценки (32) следует (30). □

Резольвента

Определим функцию $G_{\lambda,\mu}(x,t)$ как решение уравнения

$$G_{\lambda,\mu}(x,t) + \lambda_* K_x G_{\lambda,\mu}(x,t) = k_\lambda(x,t), \tag{33}$$

где K_x, λ_* и $k_\lambda(x,t)$ определяются, соответственно, равенствами (23), (26) и (27).

Как следует из (30), уравнение (33) однозначно разрешимо при

$$\lambda^2 \neq 1 \qquad \text{и} \qquad |\lambda_*| < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{1+|\lambda|}. \tag{34}$$

Кроме того, при выполнении этих неравенств, метод последовательных приближений позволяет найти представление функции $G_{\lambda,\mu}(x,t)$ в виде ряда

$$G_{\lambda,\mu}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_*)^n k_{\lambda,n}(x,t), \tag{35}$$

где

$$k_{\lambda,n}(x,t) := K_x k_{\lambda,n-1}(x,t) \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad k_{\lambda,0}(x,t) := k_\lambda(x,t).$$

Лемма 7. *Пусть выполнены неравенства* (34). *Тогда функция* $G_{\lambda,\mu}(x,t)$, *определенная рядом* (35), *удовлетворяет уравнению* (33).

Представление решения

Теперь мы можем указать достаточные условия на параметры λ, μ и α, гарантирующие однозначную разрешимость уравнения (1) в случае $\lambda^2 \neq 1$.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in L(0,1)$, $\lambda^2 \neq 1$ *и*

$$\frac{|\mu|}{|1-\lambda^2|} < \frac{\Gamma(\alpha+1)}{1+|\lambda|}. \tag{36}$$

Тогда уравнение (1) *имеет и притом единственное решение в* $L(0,1)$, *и оно может быть представлено в виде*

$$u(x) = f(x) - \lambda_* \int_0^1 f_*(t)\, G_{\lambda,\mu}(x,t)\, dt, \tag{37}$$

где функция $G_{\lambda,\mu}(x,t)$ *представима в виде* (35), $f_*(x)$ *задается соотношением* (24), *а величина* λ_* *определена равенством* (26).

Доказательство. Как следует из леммы 5, при $\lambda^2 \neq 1$, уравнение (1) эквивалентно уравнению (25), решение которого при выполнении (36) существует и единственно, и его, в силу леммы 7, можно записать в виде (37). □

Замечание о случае $\lambda^2 = 1$

Сделаем несколько замечаний относительно критического случая $\lambda^2 = 1$, который распадается на два подслучая: $\lambda = 1$ и $\lambda = -1$.

Пусть сначала $\lambda = 1$. В силу леммы 3 необходимым условием разрешимости в этом случае будет включение

$$f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) \in \mathcal{I}^+,$$

которое эквивалентно уравнению

$$f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) = I_x \left[f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) \right]. \tag{38}$$

Кроме того, согласно лемме 3, при выполнении (38) решение уравнения (1) с $\lambda = 1$ должно удовлетворять соотношению

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) \right] + g(x), \tag{39}$$

для некоторой функции $g(x) \in \mathcal{I}^-$.

Таким образом, вопрос о решении уравнения (1) при $\lambda = 1$ сводится к вопросу о разрешимости системы уравнений (38) и (39), в которой вместе с искомым решением $u(x)$ подлежит определению функция $g(x) \in \mathcal{I}^-$.

Аналогично, вопрос о решении уравнения в случае $\lambda = -1$ сводится к необходимости исследования системы

$$f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) = -I_x \left[f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) \right], \tag{40}$$

$$u(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) - \mu\, D_{0x}^{-\alpha} u(x) \right] + g(x), \qquad g(x) \in \mathcal{I}^+. \tag{41}$$

Изучение систем (38), (39) и (40), (41) требует выработки специальных подходов, что выходит за рамки настоящего исследования, и мы оставляем это для дальнейшего.

Заключение

В работе вопрос о разрешимости функционально-интегрального уравнения (1) редуцирован к вопросу о разрешимости интегрального уравнения (25), являющегося уравнением Фредгольма второго рода. Для осуществления указанной редукции проведен анализ функционального уравнения (5), которое, как показано (см. леммы 1, 3 и 4), однозначно разрешимо лишь в некритическом случае $\lambda^2 \neq 1$. Для этого случая сформулировано утверждение (см. теорему) о разрешимости уравнения (1), содержащее достаточные условия на коэффициенты и параметры уравнения, обеспечивающие о существование и единственность искомого решения. Представление решение (37) выписано в терминах резольвенты интегрального уравнения (25) (см. лемму 7).

Показано, что в критическом случае $\lambda^2 = 1$ вопрос о разрешимости уравнения (1) приводит к необходимости исследовать системы уравнений (38), (39) и (40), (41), содержащие интегральные уравнения первого и второго рода.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Энеева Л. М. К вопросу о решении смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Доклады АМАН, 2023. Т. 23, №4, С. 62–68 DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68.
3. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ, 2004. Т. 30, №2, С. 33–37.
4. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир, 2007. Т. 5, №4, С. 194–197.
5. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives // Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série,, 2006. Т. 80(94), С. 259–272.
6. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. Т. 10, №2, С. 139–150.
7. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation // Journal of Computational Physics, 2013. №252, С. 495–517.
8. Klimek M., Agrawal O.P. Fractional Sturm–Liouville problem // Computers and Mathematics with Applications, 2013. №66, С. 795–812.
9. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. Т. 13, №1, С. 125–142.
10. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2015. Т. 3, №2(11), С. 39–44.
11. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator // Documenta Mathematica, 2016. Т. 21, С. 1503–1514.
12. Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS // Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).
13. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS // Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).
14. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems // Mathematics, 2020. Т. 8(12), С. 2122 DOI: 10.3390/math8122122.
15. Энеева Л. М. Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2024. Т. 48, №3, С. 43–55 DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55.
16. Энеева Л. М. Начальная задача для уравнения дробного порядка с производной Герасимова–Капуто с инволюцией // Известия КБНЦ РАН, 2024. №6(26), С. 19–25 DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25.
17. Богачев В. И. *Основы теории меры*, Т. 1. Москва–Ижевск: НИЦ РХД, 2003. 544 с.

Информация об авторе

Энеева Лиана Магометовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов, Института прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0003-2530-5022.

References

[1] Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. M: Fizmatlit, 2003. 272 p.

[2] Eneeva L. M. On the question of solving a mixed boundary value problemfor an equation with fractional derivatives with different origins, Adyghe International Scientific Journal, 2023, Vol. 23, no. 4, Pp. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68

[3] Rekhviashvili S. Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics, Technical Physics Letters, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 33–37.

[4] Rekhviashvili S. Sh. Fractional derivative physical interpretation, Nonlinear world, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–197.

[5] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006. T. 80(94), C. 259–272.

[6] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. T. 10, №2, C. 139–150.

[7] Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation, Journal of Computational Physics, 2013, no. 252, pp. 495–517. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.06.031

[8] Klimek M., Agrawal O.P. Fractional Sturm–Liouville problem, Computers and Mathematics with Applications, 2013, no. 66, pp. 795–812. DOI:10.1016/j.camwa.2012.12.011

[9] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. T. 13, №1, C. 125–142.

[10] Eneeva L. M. Boundary value problem for differential equation with fractional order derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, vol. 3, no. 2(11), pp. 39–44.

[11] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator Documenta Mathematica, 2016. T. 21, C. 1503–1514.

[12] Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).

[13] Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).

[14] Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems. Mathematics, 2020. T. 8(12), C. 2122.

[15] Eneeva L. M. Cauchy problem for fractional order equation with involution, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2024, no. 3(48), pp. 43–55. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55

[16] Eneeva L. M. Initial value problem for a fractional order equation with the Gerasimov–Caputo derivative with involution, News Of The Kabardino-Balkarian Scientific Center Of RAS, 2024, no. 6(26), pp. 19–25. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25

[17] Bogachev V. I. Fundamentals of Measure Theory. Vol. 1. Moscow–Izhevsk, R&C Dymanics, 2003. 544 p.

Information about the author

Eneeva Liana Magometovna – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0003-2530-5022.