Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 50. №1. С. 169 - 183. ISSN 2079-6641

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.911

Исследование эффективности численных методов для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии

Д. Ф. Сергиенко*[1,2], Р. И. Паровик[2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д.4, Россия

[2] Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. В данной работе представлено исследование четырех численных методов решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии: метода Розенброка (4-го порядка точности), Radau, BDF и LSODA. Метод Розенброка, реализован на языке программирования Python, остальные методы были взять из библиотеки Scipy Python. В работе приведено описание каждого численного метода, что позволяет обосновать выбор методов для решения поставленной задачи. Основной целью работы является сравнительный анализ их эффективности по критериям точности, устойчивости и вычислительной сложности. Проведена на языке Python оценка порядка точности методов с помощью правила Рунге, а также проанализированы их характеристики при решении системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с непостоянными коэффициентами. В работе представлены графики зависимости порядка точности от шага вычислений, осциллограммы решений и фазовые траектории математической модели, наглядно демонстрирующие поведение системы при различных параметрах. Особое внимание уделено адаптивности методов к жесткости системы, обусловленной наличием быстро затухающих и высокочастотных компонент. Результаты показывают, что метод Розенброка обеспечивает высокую точность при аналитически заданной матрице Якоби, тогда как порядок остальных методов имеет экспериментальный порядок ниже теоретического. Полученные данные позволяют определить оптимальный метод моделирования в зависимости от требуемой точности и вычислительных ресурсов. Исследование вносит вклад в развитие численных подходов к анализу геоакустических процессов и может быть использовано при прогнозировании деформационных явлений в горных породах.

Ключевые слова: геоакустическая эмиссия, модель, осциллограммы, фазовая траектория, метод Розенброка, BDF, Radau, LSODA, python.

Получение: 05.04.2025; Исправление: 16.04.2025; Принятие: 17.04.2025; Публикация онлайн: 18.04.2025

Для цитирования. Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И. Исследование эффективности численных методов для решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 50. № 1. С. 169-183. EDN: PHPEAX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: darya@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 50. no. 1. P. 169 - 183. ISSN 2079-6641

INFORMATION AND COMPUTING TECHNOLOGIES

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183

Research Article

Full text in Russian

MSC 86-08

Investigation of the Effectiveness of Numerical Methods for Solving a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission

D. F. Sergienko [*1,2], ***R. I. Parovik*** [2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya str., 4, Russia

[2] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 684034, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

Abstract. This paper presents a study of four numerical methods for solving a mathematical model of high-frequency geoacoustic emission: the Rosenbrock method (4th order of accuracy), Radau, BDF, and LSODA. The Rozobrok method is implemented in the Python programming language, the rest of the methods were taken from the Scipy Python library. The paper describes each numerical method, which makes it possible to justify the choice of methods for solving the problem. The main purpose of the work is a comparative analysis of their effectiveness according to the criteria of accuracy, stability and computational complexity. The order of accuracy of the methods using the Runge rule is estimated in Python, and their characteristics are analyzed when solving a system of two linear ordinary differential equations of the second order with non-constant coefficients. The paper presents graphs of the dependence of the order of accuracy on the step of calculations, waveforms of solutions and phase trajectories of a mathematical model that clearly demonstrate the behavior of the system under various parameters. Special attention is paid to the adaptability of the methods to the rigidity of the system due to the presence of rapidly attenuating and high-frequency components. The results show that the Rosenbrock method provides high accuracy with an analytically specified Jacobi matrix, while the order of the other methods has an experimental order lower than the theoretical one. The data obtained allows us to determine the optimal modeling method depending on the required accuracy and computing resources. The study contributes to the development of numerical approaches to the analysis of geoacoustic processes and can be used in predicting deformation phenomena in rocks.

Key words: geoacoustic emission, model, waveforms, phase trajectory, Rosenbrock method, BDF, Radau, LSODA, python.

Received: 05.04.2025; Revised: 16.04.2025; Accepted: 17.04.2025; First online: 18.04.2025

For citation. Sergienko D. F., Parovik R. I. Investigation of the Effectiveness of Numerical Methods for Solving a Mathematical Model of High-Frequency Geoacoustic Emission. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **50**: 1, 169-183. EDN: PHPEAX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-169-183.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS No. 124012300245-2.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence: E-mail: darya@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Sergienko D. F., Parovik R. I., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)

Введение

Современные задачи геофизики и геоакустики требуют применения точных и эффективных численных методов для моделирования сложных физических процессов. Одной из таких задач является моделирование высокочастотной геоакустической эмиссии (ГЭ), которая играет важную роль в изучении динамики земной коры, прогнозировании сейсмической активности и мониторинге природных катастроф. Математические модели, описывающие подобные процессы, зачастую представляют собой системы дифференциальных уравнений, решение которых аналитическими методами затруднено или невозможно [1–4].

Например, в статье [5] проводится исследование, какие алгоритмы и гиперпараметры являются наиболее подходящими для работы с жесткими системами дифференциальных уравнений, возникающими в результате биологических процессов. В работе рассматриваются 142 опубликованные модели в области системной биологии. В связи с этим и возникает необходимость в разработке и применении численных методов, которые бы обеспечивали высокую точность, устойчивость и вычислительную эффективность при минимальных затратах.

В данной работе рассматриваются численные методы решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии (Ros, Radau, BDF, LSODA). Численные метод Розенброка четвертого порядка точности (Ros) был разработан на языке Python согласно алгоритму, представленном в работе [6]. Встроенные методы Radau, BDF, LSODA были взяты из библиотеки Scipy, Python. Основное внимание уделено исследованию эффективности методов с использованием правила Рунге для оценки порядка точности. Проведен сравнительный анализ методов по ключевым критериям: точность, устойчивость и вычислительная сложность.

В рамках работы представлены результаты численных экспериментов, включающие графики зависимости ошибки от точности вычислений, графики зависимости порядка точности от параметров методов, а также осциллограммы и фазовые траектории, иллюстрирующие поведение математической модели. Эти результаты позволяют оценить преимущества и недостатки различных численных методов и выбрать наиболее подходящий для решения поставленной нами задач моделирования геоакустической эмиссии.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения точности и надежности численных методов, используемых в геофизике, а также оптимизации вычислительных ресурсов. Результаты работы могут быть полезны для специалистов в области геоакустики, сейсмологии и математического моделирования, а также для разработки новых алгоритмов и программных средств для анализа геофизических данных.

Постановка задачи и методика решения

Высокочастотная ГЭ определяется как акустическое излучение в звуковом диапазоне частот (20 Гц – 20 кГц), генерируемое при деформационных процессах в приповерхностных слоях горных пород [7].

Как показано в исследованиях [8], сигналы высокочастотной ГЭ представляют собой суперпозицию релаксационных импульсов. Ключевыми диагностическими параметрами этих сигналов, позволяющими оценивать: стадию деформационного процесса, физико-механические свойства пород, локализацию деформационных возмущений, являются амплитудные характеристики, длительность импульсов и частотные параметры (частота следования и заполнения).

Эффективным подходом к анализу импульсных сигналов геоакустической эмиссии является применение комбинированного словаря, включающего сдвинутые и модулированные версии функций Гаусса и Берлаге [8–11]. Экспериментальные данные упомянутых работ свидетельствуют, что форма импульсов ГЭ хорошо аппроксимируется функциями Берлаге, которые описываются выражением:

$$\begin{gathered} g(t) = A \cdot t^{n(p_{max})\Delta} \cdot \exp\left(-\frac{n(p_{max})\Delta}{p_{max}\, t_{end}}\, t \right) \cdot \sin(2\pi f t + \phi_0), \\ n = \frac{\ln 20}{\frac{1}{p_{max}} - \ln \frac{1}{p_{max}} - 1}, \ t \in [t_0, t_{end}], t_0 \neq 0, t_0 > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где A — амплитуда импульса; n — параметр, отвечает за форму огибающей; p_{max} — положение максимума; Δ — крутизна огибающей; t — время, t_{end} — длительность импульса; f — частота заполнения; ϕ_0 — начальная фаза.

Согласно работам [12, 13] функция (1) является решением следующей задачи Коши на отрезке $t \in [t_0, T]$, $t_0 \neq 0, t_0 > 0$

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = \alpha \dot{g}(t) - \beta g(t) + \alpha(t)\gamma(t), \\ g(t_0) = \gamma(t_0)\tan(ct_0 + \phi_0), \\ \dot{g}(t_0) = \alpha(t_0) g(t_0) + c\gamma(t_0), \end{cases} \tag{2}$$

где коэффициенты задачи имеют вид:

$$\alpha(t) = a\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{b}\right), \ \beta(t) = \frac{a}{t^2} + c^2, \ \gamma(t) = A \cdot c \cdot t^a \cdot \exp\left(-\frac{a}{b} t\right) \cdot \cos(ct + \phi_0). \tag{3}$$

Задача (2)-(3) описывает один дислокационный источник, излучающий один импульс высокочастотной ГЭ.

Для описания двух дислокационных источников необходимо рассматривать систему из двух дифференциальных уравнений типа (2)-(3)

$$\begin{cases} \ddot{g}_1(t) = \alpha_1 \dot{g}_1(t) - \beta_1 g_1(t) + \alpha_1(t)\gamma_1(t) + k_1 g_2(t), \\ \ddot{g}_2(t) = \alpha_2 \dot{g}_2(t) - \beta_2 g_2(t) + \alpha_2(t)\gamma_2(t) + k_2 g_1(t), \\ g_1(t_0) = \gamma_1(t_0)\tan(c_1 t_0 + \phi_{01}), \ g_2(t_0) = \gamma_2(t_0)\tan(c_2 t_0 + \phi_{02}), \\ \dot{g}_1(t_0) = \alpha_1(t_0) g_1(t_0) + c_1\gamma_1(t_0), \ \dot{g}_2(t_0) = \alpha_2(t_0) g_2(t_0) + c_2\gamma_2(t_0). \end{cases} \tag{4}$$

коэффициенты системы имеют вид:

$$\alpha_1(t) = a_1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{b_1}\right),\ \alpha_2(t) = a_2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{b_2}\right),\ \beta_1(t) = \frac{a_1}{t^2}+c_1^2,\ \beta_2(t) = \frac{a_2}{t^2}+c_2^2,$$
$$\gamma_1(t) = A_1c_1t^{a_1}\exp\left(-\frac{a_1}{b_1}t\right)\cos(c_1t+\phi_{01}), \tag{5}$$
$$\gamma_2(t) = A_2c_2t^{a_2}\exp\left(-\frac{a_2}{b_2}t\right)\cos(c_2t+\phi_{02}).$$

Каждое дифференциальное уравнение моделирует импульс высокочастотной ГЭ с уникальными параметрами, при этом энергетическое взаимодействие между импульсами осуществляется через коэффициент линейной связи. Задачу из двух дисслокационных источников можно обобщить на N-ое количество источников. Тогда система (4)-(5) примет следующий вид

$$\begin{cases} \ddot{g}_i(t) = \alpha_i(t)\dot{g}_i(t) - \beta_i(t)g_i(t) + \alpha_i(t)\gamma_i(t) + \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} k_{ij}g_i(t),\ i = 1,2,\ldots,n, \\ g_i(t_0) = \gamma_i(t_0)\tan(c_it_0+\phi_{0i}), \dot{g}_i(t_0) = \alpha_i(t_0)g_i(t_0) + c_i\gamma_i(t_0). \end{cases} \tag{6}$$

Коэффициенты $\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t)$ задаются по аналогии с выражением (5):

$$\alpha_i(t) = \left(\frac{a_i}{t}-\frac{a_i}{b_i}\right), \beta_i(t) = \frac{a_i}{t^2}+c_i^2, \gamma_i(t) = A_ic_i^{a_i}\exp\left(\frac{-b_i}{t}\right)\cos(c_it+\phi_{0i}. \tag{7}$$

Система включает в себя n уравнений, описывающих поведение каждого источника $g_i(t)$, взаимодействие между источниками описывается через коэффициенты k_{ij}. Далее ограничимся рассмотрением двух источников (4)-(5).

Согласно [12] система (4)-(5) является жесткой и по замечанию 6 жесткость системы не зависит от больших значений коэффициентов взаимодействия k_1 и k_2 дислокационных источников, что связано с выполнением условия $\beta_1, \beta_2 \geq k_1k_2$. Следующие признаки свидетельствуют о жесткости системы: наличие быстро затухающих компонент (члены с экспонентами $exp(-a_i/b_it)$), высокочастотные колебания ($\cos(c_it+\phi_{0i})$ при больших c_i). Далее для численного эксперимента мы выбрали четыре численных метода, которые наиболее устойчивые к жестким системам дифференциальных уравнений.

Результаты моделирования

Далее мы провели исследование на эффективность численных методов решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии на языке Python. Для численного решения системы (4)-(5) мы реализовали метод Розенброка четвертого порядка точности на Python и выбрали следующие численные методы библиотеки Scipy: «Radau»: неявный метод Рунге-Кутты семейства Радо. «BDF»: неявный многошаговый метод переменного порядка (от 1 до 5), основанный на формуле обратного дифференцирования для аппроксимации

производной. «LSODA»: метод Адамса с автоматическим определением жёсткости. Параметры для первого примера взяли следующими (Таблица 1) согласно источнику [9].

Метод Розенброка четвертого порядка точности имеет вид

$$
\begin{gathered}
(I - h\gamma_{11}J)k_1 = hf(y_n), \\
(I - h\gamma_{22}J)k_2 = hf(y_n + \alpha_{21}k1) - \gamma_{21} \cdot h \cdot k_1 \cdot J, \\
(I - \gamma_{33}J)k_3 = hf(y_n + \alpha_{31}k1 + \alpha_{32}k2) + hJ(\gamma_{31} \cdot k1 + \gamma_{32}k2), \\
(I - \gamma_{44}J)k_4 = hf(y_n + \alpha_{41}k_1 + \alpha_{42}k_2 + \alpha_{43}k_3) + hJ(\gamma_{41}k_1 + \gamma_{42}k_2 + \gamma_{43}k_3) \\
y_{n+1} = y_n + b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $\gamma_{11} = \frac{1}{6}, \gamma_{22} = \frac{2}{6}, \gamma_{33} = \frac{2}{6}, \gamma_{21} = -0.12642566, \gamma_{31} = -0.5, \gamma_{32} = -1.22102225482, \gamma_{44} = \frac{1}{6}, \alpha_{21} = \frac{1}{2}, \alpha_{31} = \frac{1}{2}, \alpha_{32} = \frac{32}{,}\alpha_{41} = -0.178278, \alpha_{42} = 0.219945, \alpha_{43} = \frac{1}{3}, b_1 = \frac{43}{758}, b_2 = \frac{83}{192}, b_3 = \frac{137}{768}, b_4 = \frac{1}{3}$ — параметры метода, I — единичная матрица, J — матрица Якоби системы (2),(3), $k_i, i = 1..4$ — стадии метода, h — шаг, y_n — значения функций $g_1(t), g_2(t)$ системы (4)-(5).

Метод Radau. Особенно перспективными являются предложенные Илом процессы Радо IIA, которые являются L-устойчивыми и имеющие высокий порядок. Для анализа существенно жестких режимов используется метод RADAU5, основанный на неявном методе Рунге-Кутты (трехстадийный метод Радо IIA) [14, 15].

Неявный метод Рунге-Кутты с s стадиями имеет вид

$$
\begin{aligned}
g_i &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_0 + c_j h, g_j), \quad i = 1, \cdots, s, \\
y_1 &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j f(x_0 + c_j h, g_j).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

c_i, a_{ij}, и b_i — параметры метода. Методы Рунге-Кутты, основанные на квадратурных формулах Радо и Лобатто, были представлены Бутчером в 1960 г. Идеи Бутчера развил Ил в 1969 г., который разработал методы типов I, II и III с превосходными свойствами устойчивости. Просцессы Ила типа II или Радо IIA получаются, если наложить условие $C(s)$. Примеры параметров методов порядков 1, 3, 5 даны в таблице 1.

Таблица 1

Параметры методов Радо IIA порядков 1, 3, 5

$$
\begin{array}{c|c}
1 & 1 \\
\hline
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\
1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\frac{4-\sqrt{6}}{10} & \frac{88-7\sqrt{6}}{360} & \frac{296-169\sqrt{6}}{1800} & \frac{-2+3\sqrt{6}}{225} \\
\frac{4-\sqrt{6}}{10} & \frac{296+169\sqrt{6}}{1800} & \frac{88+7\sqrt{6}}{360} & \frac{-2-3\sqrt{6}}{225} \\
1 & \frac{16-\sqrt{6}}{36} & \frac{16+\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \\
\hline
 & \frac{16-\sqrt{6}}{36} & \frac{16+\sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9}
\end{array}
$$

Построение многошаговых методов основано на использовании полинома степени q. Приближенное значение решения $Y(x)$ в точке x_{n+1} представляется

в виде линейной комбинации нескольких приближенных значений решения и его производной в этой и предшествующих q точках. Очевидно, использование многошаговых формул ставит задачу вычисления q значений начальных значений $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, точность задания которых должна быть не хуже точности соответствующей формулы. В общем виде полином можно представить

$$Y_{n+1} = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i Y_{n-i+1} + h \sum_{j=0}^{q} \beta_j F(x_{n-j+1}, Y_{n-j+1}), \tag{10}$$

где q — порядок метода. Некоторые константы α_i и β_i в (10) могут принимать нулевые значения. При выборе $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0$ можно построить формулы дифференцирования назад BDF (backward differentiation formulae) [16, 17]. Теоретический порядок встроенного метода библиотеки Scipy варьируется от 1 до 5.

Алгоритм LSODA адаптивно переключается между методами решения жёстких и нежёстких ОДУ для численного интегрирования. Метод Адамса-Мультона (AM) для нежестких задач — неявный многошаговый метод переменного порядка от 1 до 12, выбирается автоматически.

Формула обратного дифференцирования (BDF) (10) — неявный многошаговый метод переменного порядка от 1 до 5, выбирается автоматически. Жесткость определяется по числу обусловленности матрицы Якоби [18, 19].

Далее проведем численный эксперимент моделирования высокочастотной ГЭ по численным схемам (8), (9), (10).

Пример 1. В таблице 2 приведены значения параметров модели (4), (5).

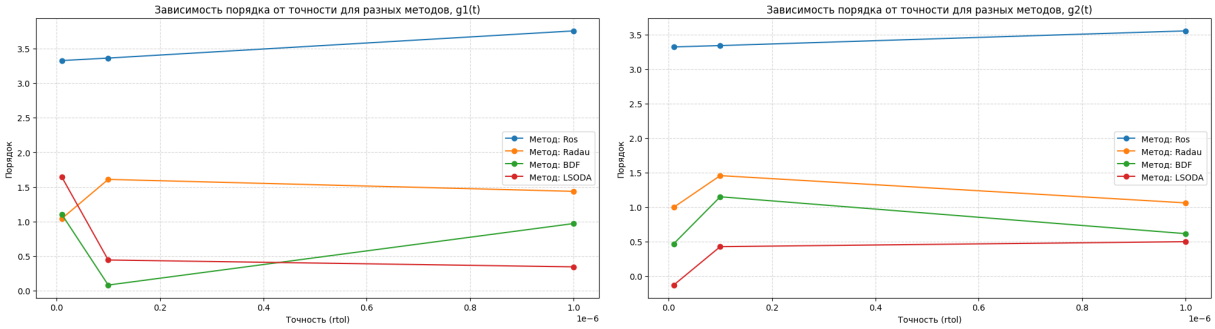
Таблица 2

Параметры математической модели высокочастотной ГЭ

Параметры	$g1(t)$	$g2(t)$
A	0.5	0.7
a	1.38	3.18
b	0.004	0.006
c	1256	1256
k	1	1
ϕ	0	0
t_0	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
t_{end}	$5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$

По результату эксперимента метод Розенброка демонстрирует высокий порядок точности (близкий к 4) даже при грубых допусках $rtol = 10^{-3}$.

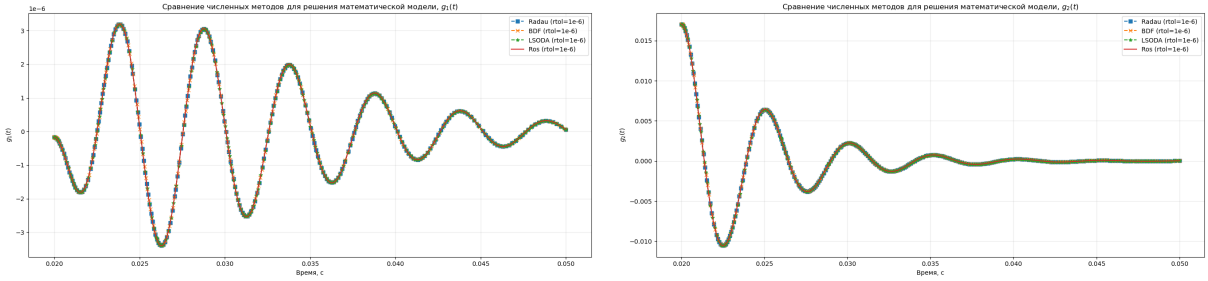
Метод Розенброка стабилен при различных значениях шага, что характерно для неявных методов. Для методов BDF, Radau, LSODA порядок варьируется в диапазоне от 1 до 1.6 рис. 1–3.



a) b)

Рис. 1. График зависимости порядка точности от шага для разных методов для Примера 1.

[Figure 1. The dependence of order on accuracy for different methods for Example 1.]



a) b)

Рис. 2. Сравнение численных методов для решения математической модели

[Figure 2. Comparison of numerical methods for solving a mathematical model, $g_1(t)$]

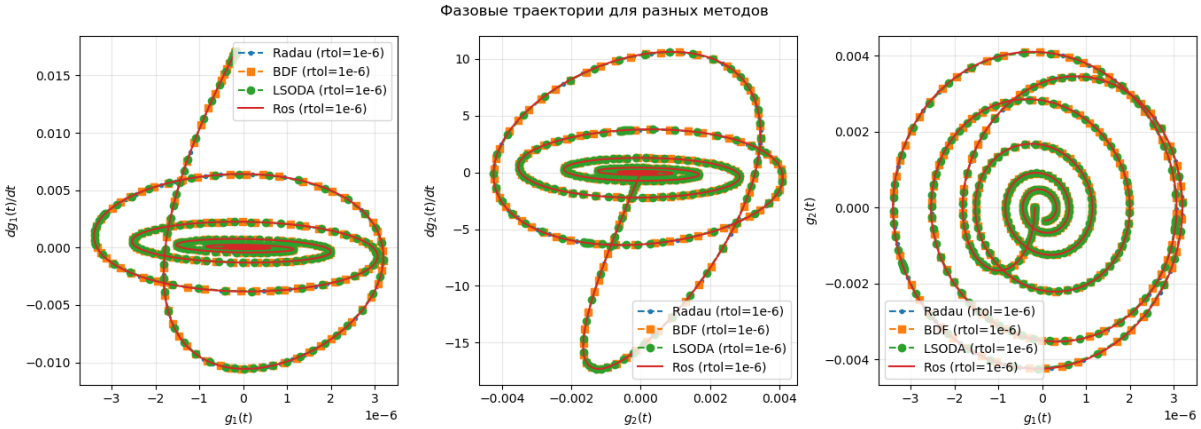
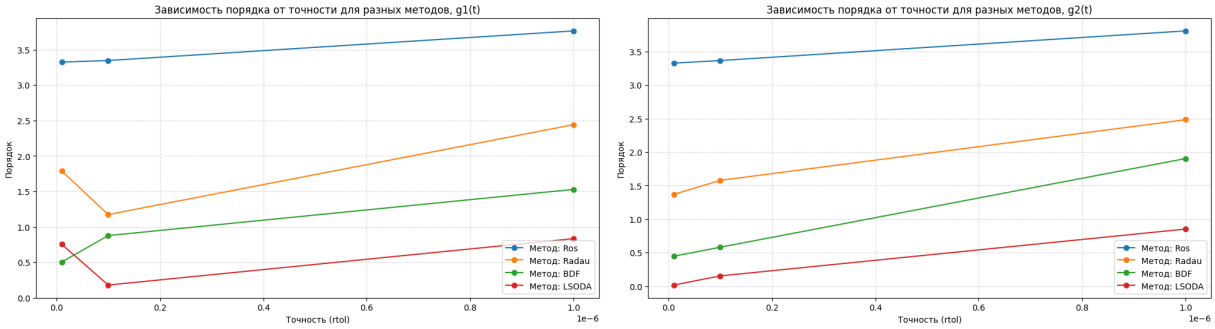


Рис. 3. Фазовые траектории математической модели

[Figure 3. Phase trajectories of the mathematical model]

Пример 2. Значение параметров: $k_1 = k_2 = 10^6$, остальные значения параметров возьмем из Примера 1.

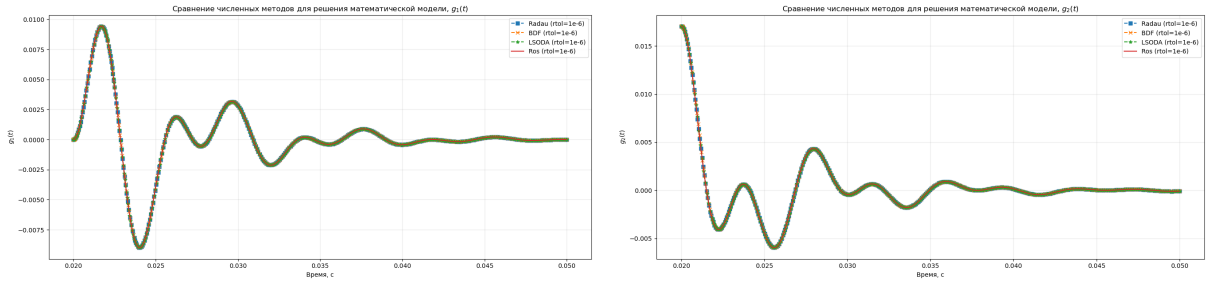
Для примера 2 метод Розенброка также дает хорошие результаты, порядок близок к 4 (рис. 4–6).



a) b)

Рис. 4. График зависимости порядка точности от шага для разных методов для Примера 2.

[Figure 4. Graph of the dependence of the order of accuracy on the step for different methods for Example 2.]



a) b)

Рис. 5. Сравнение численных методов для решения математической модели для для Примера 2

[Figure 5. Comparison of numerical methods for solving a mathematical model for Example 2.]

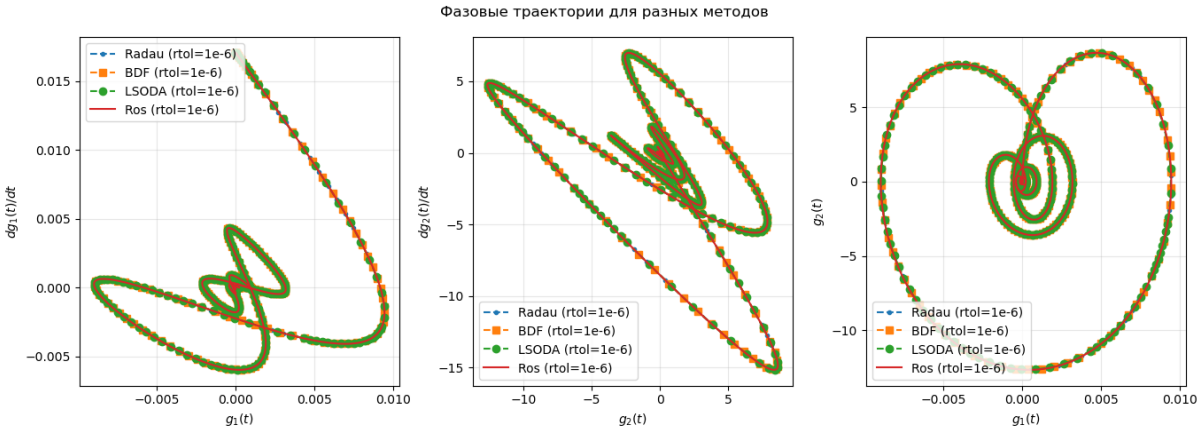
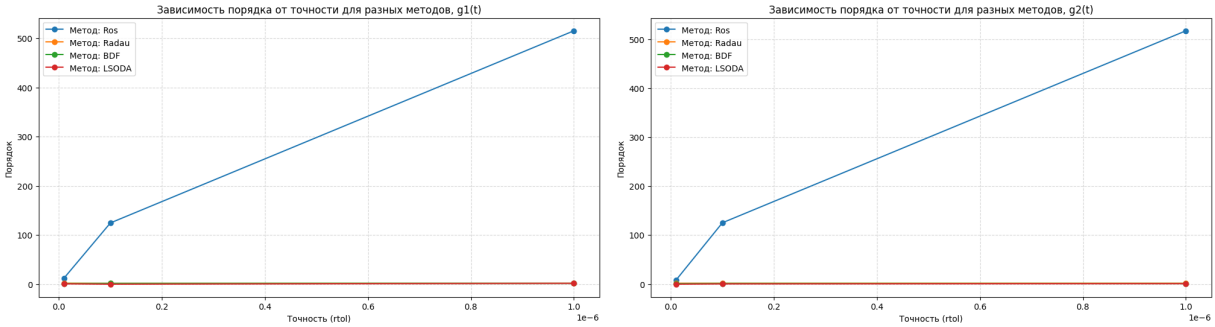


Рис. 6. Фазовые траектории математической модели для Примера 2

[Figure 6. Phase trajectories of the mathematical model for Example 2.]

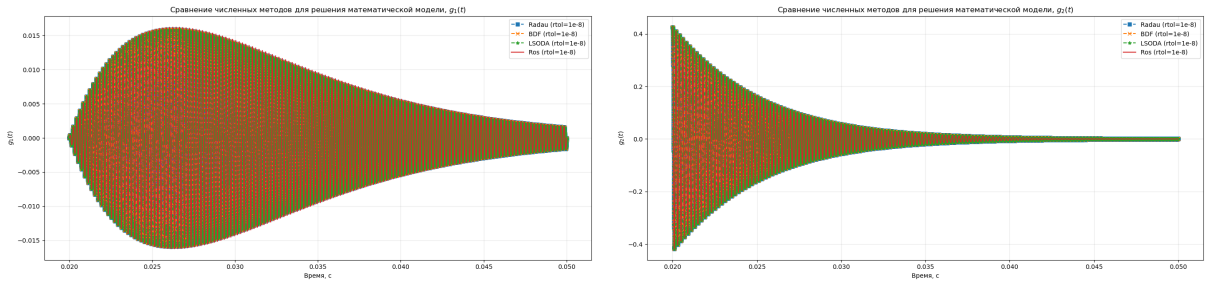
Пример 3. Значение параметров: $c_1 = c_2 = 31416$, $k_1 = k_2 = 10^6$, остальные значения параметров возьмем из Примера 1.



a) b)

Рис. 7. График зависимости порядка точности от шага для разных методов для Примера 3.

[Figure 7.Graph of the dependence of the order of accuracy on the step for different methods for Example 3.]



a) b)

Рис. 8. Сравнение численных методов для решения математической модели для Примера 3

[Figure 8. Comparison of numerical methods for solving a mathematical model for Example 3]

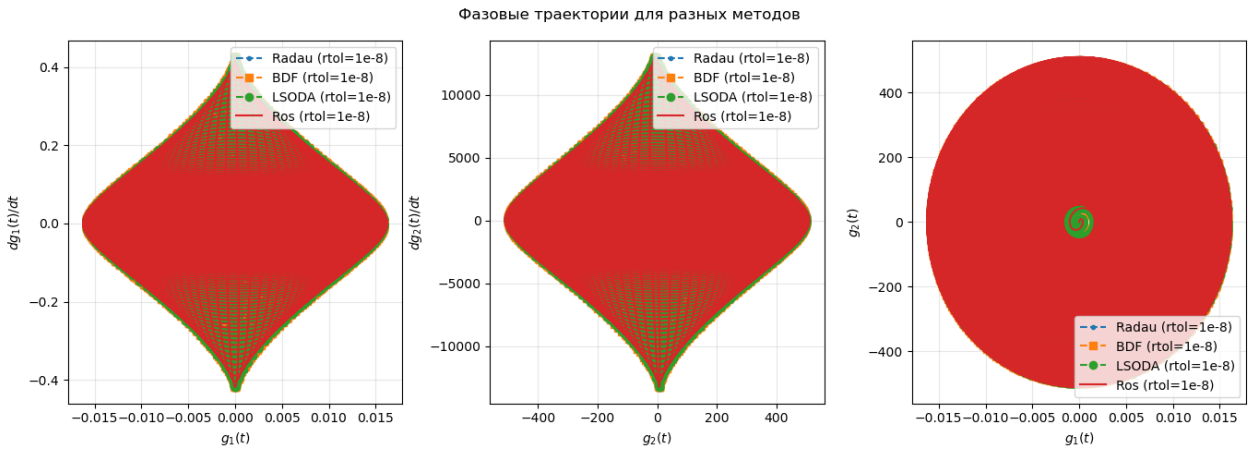


Рис. 9. Фазовые траектории математической модели для Примера 3.

[Figure 9. Phase trajectories of the mathematical model for Example 3.]

При больших значениях коэффициентов $k_1 = k_2 = 10^6$, $c_1 = c_2$ экспериментальный порядок точности метода Розенброка изменяется в пределах от 517.468 до 8.249. Порядок остальных методов имеет значения в пределах от 0 до 1. Исходя из рис. 7–9, мы видим, что в системе (4)-(5) возникает жесткость при больших c_i.

Заключение

В ходе проведенного исследования были проанализированы численные методы решения математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии, включая метод Розенброка четвертого порядка точности (Ros), а также встроенные методы Radau, BDF и LSODA из библиотеки SciPy. Основное внимание уделялось сравнительному анализу методов по ключевым критериям: точности вычислений, устойчивости и вычислительной сложности.

Результаты исследования показали, что метод Розенброка четвертого порядка точности демонстрирует высокую точность и устойчивость при моделировании геоакустической эмиссии, что согласуется с теоретическими ожиданиями для методов четвертого порядка. Анализ устойчивости по правым частям и начальным данным подтвердил надежность данного метода при работе с различными типами входных параметров. Встроенные методы Radau и BDF также показали хорошие результаты, особенно в задачах с жесткими системами, тогда как LSODA проявил себя как универсальный инструмент, автоматически адаптирующийся к характеристикам решаемой системы.

Графические зависимости ошибки от точности вычислений, а также осциллограммы и фазовые траектории наглядно продемонстрировали преимущества и ограничения каждого из исследуемых методов. На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что выбор оптимального численного метода зависит от конкретных условий моделирования: для задач, требующих высокой точности и стабильности, предпочтительным является метод Ros, тогда как в случаях, где важна вычислительная эффективность и адаптивность, целесообразно использовать Radau, BDF или LSODA.

Полученные результаты имеют практическую значимость для моделирования геоакустической эмиссии и могут быть применены в дальнейших исследованиях, связанных с анализом деформационных процессов в горных породах.

Список литературы

1. Шубин А. К. Разработка математической модели для исследования процесса восстановления гексафторида вольфрама газообразным водородом // *Южно-Сибирский научный вестник*, 2020. Т. 6(34), С. 234–238.

2. Богатырева Е. В., Ивановская А. В. Математическая формулировка задачи оптимизации судовых энергетических установок // *Вестник Керченского государственного морского технологического университета*, 2020. Т. 4, С. 32–41 DOI: 10.47404/2619-06050605_2020_4_32.

3. Khudayarov B. A., Turaev F. Zh. Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid // *Applied Mathematical Modelling*, 2019. vol. 66, pp. 662-679 DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008.

4. Паровик Р. И. Дробная модель геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 45, № 4, С. 24–35, DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-24-35.

5. Städter P. et al. Benchmarking of numerical integration methods for ODE models of biological systems // *Scientific reports*, 2021. vol. 11, no. 1, pp. 2696 DOI: 10.1038/s41598-021-82196-2.

6. Ponalagusamy R., Ponnammal K. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison. // *Int. J. Appl. Comput. Math 1*, 2015. vol. 1, pp. 45–68 DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x.

7. Марапулец Ю. В., Шевцов Б. М. *Мезомасштабная акустическая эмиссия.* Владивосток: Дальнаука, 2012. 126 с.

8. Афанасьева А. А, Луковенкова О. О., Марапулец Ю. В., Тристанов А. Б. Применение разреженной аппроксимации и методов кластеризации для описания структуры временных рядов акустической эмиссии // *Цифровая обработка сигналов и ее применение*, 2013. № 2, С. 30–34.

9. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals // *Conf. proc. of SPA-2019. Poznan, IEEEConf. proc. of SPA-2019. Poznan, IEEE*, pp. 256–260, DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.

10. Lukovenkova O., Marapulets Y., Solodchuk A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks // *Sensors*, 2022. vol. 22, no. 24, pp. 9798.

11. Луковенкова О. О., Марапулец Ю. В., Тристанов А. Б. [и др.] Оптимизация метода адаптивного согласованного преследования для анализа сигналов геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2018. Т. 4, № 24, С. 197–207 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-197-207.

12. Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.*, 2023. Т. 42, № 1, С. 191–206 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206.

13. Гапеев М. И., Солодчук А. А., Паровик Р. И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки.*, 2022. Т. 40, № 3, С. 88–100 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.

14. Hairer E., Wanner G. Stiff differential equations solved by Radau methods // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999. vol. 111, no. 1-2, pp. 93–111 DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00134-X.

15. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems.* Berlin: Springer series in Computational Mathematics, 1991. 615 pp.

16. Семенов М. Е. Анализ областей абсолютной устойчивости неявных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений // *Известия Томского политехнического университета*, 2010. Т. 317, № 2, С. 516–522.

17. Shampine L. F., Reichelt M. W. The MATLAB ODE Suite // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1997. vol. 18(1), pp. 1–22 DOI: 10.1137/s1064827594276424 .

18. Hindmarsh A. C. ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers // *In Scientific Computing*, 1983, pp. 55-64.

19. Petzold L. Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1983. vol. 4(1), pp. 136-148 DOI: 10.1137/0904010.

Информация об авторах

Сергиенко Дарья Фаритовна – аспирант кафедры информатики и математики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия; программист лаборатории акустических исследований, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия ORCID 0009-0008-6512-4537.

Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор ДВО РАН, академик РАЕ, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Shubin A.K. Development of a mathematical model for studying the process of reduction of tungsten hexafluoride by gaseous hydrogen. South Siberian Scientific Bulletin. 2020. vol 6(34). pp. 234–238. (In Russian).

[2] Bogatyreva E. V., Ivanovskaya A. V. Mathematical statement of the problem of marine power plants optimization. Bulletin of the Kerch State Maritime Technological University. 2020. No. 4. pp. 32–41. DOI: 10.47404/2619-06050605_2020_4_32 (In Russian).

[3] Khudayarov B. A., Turaev F.Z. Mathematical simulation of nonlinear oscillations of viscoelastic pipelines conveying fluid. Applied Mathematical Modelling. 2019. vol. 66. pp. 662–679. DOI: 10.1016/j.apm.2018.10.008

[4] Parovik R. I. Fractional model of geoacoustic emission. Vestnik KRAUNTS. Physico-Mathematical Sciences, 2023. vol. 45, no. 4, pp. 24–35. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-24-35.

[5] Städter, P., Schälte, Y., Schmiester, L. et al. Benchmarking of numerical integration methods for ODE models of biological systems. 2021. vol. 11(1), p. 2696. DOI:10.1038/s41598-021-82196-2

[6] Ponalagusamy, R., Ponnammal, K. A Parallel Fourth Order Rosenbrock Method: Construction, Analysis and Numerical Comparison. Int. J. Appl. Comput. 2015. pp. 45–68. DOI: 10.1007/s40819-014-0002-x

[7] Marapulets Yu.V., Shevtsov B.M. Mesoscale acoustic emission. Vladivostok: Dalnauka Publ., 2012. 126 p. (In Russian).

[8] Afanasyeva A. A., Lukovenkova O. O., Marapulets Yu. V., Tristanov A. B. Application of sparse approximation and clustering methods to describe the structure of acoustic emission time series. Digital signal processing. 2013. vol. 2. pp. 30–34. (In Russian).

[9] Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals. Conf. proc. of SPA-2019. Poznan, IEEEConf. proc. of SPA-2019. Poznan, IEEE, C. 256–260, DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.

[10] Lukovenkova O., Marapulets Y., Solodchuk A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks. Sensors, 2022. vol. 22, no. 24. 9798.

[11] Lukovenkova O. O., Marapulets Yu.V., Tristanov A. B. et al. Optimization of the adaptive coordinated pursuit method for analyzing geoacoustic emission signals. Vestnik KRAUNTS. Physico-Mathematical Sciences, 2018. vol. 4, no. 24, pp. 197–207. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-197-207 (In Russian).

[12] Mingazova D. F., Parovik R. I. Some aspects of the qualitative analysis of the high-frequency geoacoustic emission model. Vestnik KRAUNTS. Physical and Mathematical Sciences., 2023. vol. 42, no. 1, pp. 191–206 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206 (In Russian).

[13] Gapeev M.I., Solodchuk A.A., Parovik R.I. Coupled oscillators as a model of high-frequency geoacoustic emission. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2022, 40: 3, 88-100. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.

[14] Hairer E., Wanner G. Stiff differential equations solved by Radau methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999. vol. 111, no. 1–2, p. 93–111. DOI: 10.1016/S0377-0427(99)00134-X

[15] Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer series in Computational Mathematics, 1991. 615 pp.

[16] Semenov M. E. Analysis of areas of absolute stability of implicit methods for solving systems of ordinary differential equations. Proceedings of Tomsk Polytechnic University, 2010. vol. 317, no. 2, pp. 516–522. (In Russian).

[17] Shampine L. F., Reichelt M. W. The MATLAB ODE Suite. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 1997. vol. 18(1), pp. 1–22 DOI: 10.1137/s1064827594276424 .
[18] Hindmarsh A. C. ODEPACK, a Systematized Collection of ODE Solvers. In Scientific Computing, 1983, pp. 55-64.
[19] Petzold, L. Automatic Selection of Methods for Solving Stiff and Nonstiff Systems of Ordinary Differential Equations. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1983. vol. 4(1). p. 136–148. doi:10.1137/0904010

Information about the authors

Sergienko Daria Faritovna – aspirant of the Department of Mathematics and Computer Science, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia; programmer of the Laboratory of Acoustic Research, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia ORCID 0009-0008-6512-4537.

Parovik Roman Ivanovich – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences, Leading Researcher at the Laboratory of Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia ORCID 0000-0002-1576-1860.