Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 50. №1. С. 149 - 168. ISSN 2079-6641

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.687.1; 519.642.2

Анализ эффективности гибридного параллельного алгоритма численного решения задачи Коши для эредитарных моделей объемной активности радона в рамках программного комплекса FEVO

Д. А. Твёрдый*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул.Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. В статье представлено исследование вычислительной эффективности гибридного параллельного алгоритма, реализующего нелокальную неявную конечно-разностную схему (IFDS) для численного решения задачи динамики объемной активности радона (ОАР). В частности, решается задача Коши для нелинейного уравнения с производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто (эредитарная $\alpha(t)$-модель) для описания в накопительной камере аномальной динамики ОАР, которая может предшествовать сильным землетрясениям. Инструменты для анализа данных и моделирования динамики ОАР реализованы в программном комплексе FEVO. Также в программном комплексе FEVO с учетом известных наблюдаемых данных ОАР, методом безусловной оптимизации Левенберга-Марквардта реализовано решение обратных задач на идентификацию параметров эредитарных $\alpha(t)$-моделей, которое требует многократного их решения в рамках прямой задачи, что в свою очередь обуславливает важность разработки параллельных алгоритмов их решения. Параллельный алгоритм был реализован на языке C из-за его быстродействия и универсальности при работе с памятью, что важно при организации вычислений на CPU (с помощью API OpenMP) совместно с GPU (с помощью API CUDA). Анализ эффективности алгоритма проводился как серия из 10 вычислительных экспериментов на персональном ЭВМ, состоящих в решении тестового примера на основе эредитарной $\alpha(t)$-модели ОАР. Далее определяются: ускорение, эффективность и стоимость алгоритма, оценивается эффективность загрузки потоков CPU. Инструменты анализа эффективности реализованы в FEVO. Из анализа можно сделать вывод, что гибридный параллельный алгоритм IFDS показывает ускорение работы в 9–12 раз по сравнению с самой быстрой последовательной реализацией.

Ключевые слова: параллельные вычисления, CUDA, OpenMP, C, эффект памяти, эредитарность, нелокальность по времени, дробные производные, динамические системы, нелинейность, неявные конечно-разностные схемы.

Получение: 10.03.2025; Исправление: 01.04.2025; Принятие: 03.04.2025; Публикация онлайн: 18.04.2025

Для цитирования. Твёрдый Д. А. Анализ эффективности гибридного параллельного алгоритма численного решения задачи Коши для эредитарных моделей объемной активности радона в рамках программного комплекса FEVO // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 50. № 1. С. 149-168. EDN: ZVMJVG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050, https://rscf.ru/project/23-71-01050/

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: tverdyi@ikir.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 50. no. 1. P. 149 - 168. ISSN 2079-6641

INFORMATION AND COMPUTING TECHNOLOGIES

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168

Research Article

Full text in Russian

MSC 68W10; 65Y20; 26A33

Analysis of Efficiency of the Hybrid Parallel Algorithm for Numerical Solution of the Cauchy Problem for Hereditary Models of Radon Volumetric Activity in FEVO Software Complex

D. A. Tverdyi*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

Abstract. The article presents a investigation of the computational efficiency of a hybrid parallel algorithm implementing a nonlocal implicit finite-difference scheme (IFDS) for the numerical solution of the problem of radon volume activity dynamics (RVA). In particular, we solve the Cauchy problem for a nonlinear equation with fractional variable order derivative of Gerasimov-Caputo type (hereditary $\alpha(t)$-model) to describe the anomalous RVA dynamics in the storage chamber, which can be a precursor to strong earthquakes. Tools for data analysis and modeling of RVA dynamics are implemented in the FEVO software complex. Also in the FEVO software complex, taking into account the known observed data of the AAR, by the method of unconditional Levenberg-Marquardt optimization, the solution of inverse problems for the identification of the parameters of hereditary $\alpha(t)$-models is implemented, which requires multiple solutions within the framework of the direct problem, which in turn determines the importance of developing parallel algorithms for their solution. The parallel algorithm was implemented in C language because of its speed and versatility in working with memory, which is important when organizing calculations on CPU (using OpenMP API) together with GPU (using CUDA API). The efficiency of the algorithm was analyzed as a series of 10 computational experiments on a personal computer, consisting in solving a test case based on the hereditary $\alpha(t)$-model of RVA. Further, the acceleration, efficiency and cost of the algorithm are determined, and the efficiency of CPU thread utilization is evaluated. The efficiency analysis tools are implemented in FEVO. From the analysis we can conclude that the hybrid parallel IFDS algorithm shows a speedup of 9-12 times compared to the fastest sequential implementation.

Key words: parallel computing, CUDA, OpenMP, C, memory effect, hereditary, time nonlocality, fractional derivatives, dynamic systems, nonlinearity, implicit finite-difference schemes.

Received: 10.03.2025; Revised: 01.04.2025; Accepted: 03.04.2025; First online: 18.04.2025

For citation. Tverdyi D. A. Analysis of efficiency of the hybrid parallel algorithm for numerical solution of the Cauchy problem for hereditary models of radon volumetric activity in FEVO software complex. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **50**: 1, 149-168. EDN: ZVMJVG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-149-168.

Funding. The research was funded by a grant from the Russian Science Foundation, project number 23-71-01050, which can be found at https://rscf.ru/project/23-71-01050/

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for the submission of the final version of the article for publication.

***Correspondence:** E-mail: tverdyi@ikir.ru

Введение

В Российской Федерации уделяют пристальное внимание направлениям фундаментальной науки, имеющим практическое применение, в частности, большое внимание уделено математическому моделированию процессов в насыщенных средах в задачах геофизики, экономики, биологии и др. Для Камчатского края проблема сейсмичности имеет наивысший приоритет, т. к. полуостров Камчатка расположен в одном из наиболее сейсмоопасных районов Земли, а сильные землетрясения способны нанести огромный ущерб. Возможный путь для решения этой проблемы — создание эффективной системы прогнозирования на основе углубленного понимания процессов, происходящих в земной коре при подготовке будущего очага землетрясения. Исследование процессов миграции подпочвенных газов с помощью наиболее современных методов математического моделирования с целью интерпретации аномалий, предшествующих землетрясениям, является новым и актуальным методом исследований в этом направлении.

Мониторинг изменения концентрации газа радона (^{222}Rn) в подпочвенном, атмосферном воздухе и в воде считается известным и хорошо себя зарекомендовавшим индикатором процессов, протекающих в геологической среде [1], особенно как краткосрочный предвестник (до 15 суток) что показано в работах [1, 2] и многих др. В многочисленных работах, связанных с изучением предвестниковых аномалий, собрана и систематизирована информация о радоновых предвестниках, описаны методы анализа данных, исследуются физические модели возникновения землетрясений и их интерпретации. например [3–5] и др. Однако часто возникают случаи, когда ^{222}Rn обладает высокой миграционной способностью, что объяснить с помощью только механизма диффузии невозможно. Ведь процесс массопереноса по своей природе является нелокальным.

Поэтому авторами в работах [6–8] предлагаются математические эредитарные модели ОАР, но с учётом нелокальности по времени [9], что приводит к эффекту наследственности (памяти, эредитарности). Данные модели основаны на предположении, что геологическая среда имеет очень пористую, неоднородную структуру со сложной топологией порового пространства [10]. Математический аппарат исследования наследственности опирается на принципы эредитарности Вольтерры [11] и теорию интегро-дифференциальных уравнений, но в ряде случаев возможен переход к уравнениям дробной производной, аппарат которой изучен достаточно хорошо [12, 13]. В качестве дробной производной в эредитарных моделях ОАР рассматриваются операторы типа Герасимова-Капуто [14, 15] как переменного $0 < \alpha(t) < 1$ порядка, так и постоянного $0 < \alpha < 1$ порядка в частных случаях. Основная гипотеза эредитарных моделей ОАР в том, что порядок дробной производной связан с проницаемостью геологической среды, и тем самым $\alpha(t)$ связан с интенсивностью переноса ^{222}Rn. В то же время модели содержат параметры, связанные с другими процессами, влияющими на динамику ОАР в накопительной камере, например λ_0 — коэффициент воздухообмена [c^{-1}] и др.

Предложенные модели прошли апробацию на экспериментальных данных ОАР с пунктов мониторинга ^{222}Rn на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне и острова Сахалин. В сравнении с данными ОАР показано [7], что эредитарная α-модель может хорошо описывать не только процессы накопления при определенном выборе параметров, но и спада. Также показано [7], что эредитарная $\alpha(t)$-модель может описывать сложные импульсы (всплески) ОАР за счет конкретного вида функций, входящих в модельные уравнения. Расчеты, выполненные методами математического моделирования (рис. 1), показали, что механизм возникновения таких аномалий связан с инжекцией ^{222}Rn в поток подземных вод с полным поперечным перемешиванием под воздействием импульса деформационного напряжения [7]. Выявление признаков таких процессов в данных радоновых наблюдений является одной из актуальных задач геофизики.

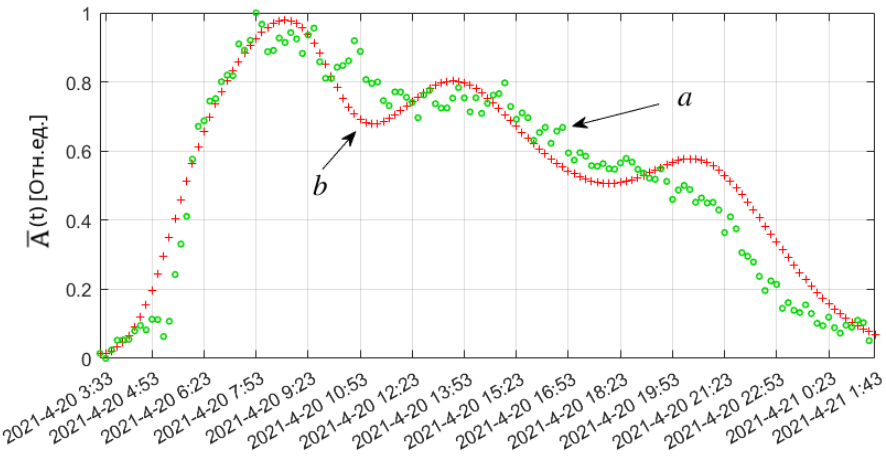

Рис. 1. a) Сглаженные и нормированные экспериментальные данные ОАР (выделеный аномальный всплеск), полученные на пункте MRZR, с шагом дискретизации в 1/6 [ч.]; b) результаты моделирования с коэффициентом детерминации $R^2 = 0.91$ и коэффициентом корреляции Пирсона $R = 0.96$

[Figure 1. a) Smoothed and normalized experimental OAR data (isolated anomalous burst) obtained at the MRZR, with a sampling step 1/6 [h]; b) Simulation results with coefficient of determination $R^2 = 0.91$ and Pearson correlation coefficient $R = 0.96$]

Однако в работах [6, 7] все параметры эредитарных моделей ОАР подбирались вручную при сопоставлении с обработанными экспериментальными данными ОАР. Подобранная комбинация параметров признавалась оптимальной при достижении высоких значений (80% — 95%) коэффициентов подобия между результатами моделирования и данными. Степень подобия оценивалась как вычисление R^2 — коэффициента детерминации и R — коэффициента корреляции Пирсона.

Такой трудоёмкий для исследователей процесс закономерно приводит к поиску решений для автоматизации подбора оптимальных параметров. Необходимость такого подхода часто возникает при работе с геологическими данными, в геофизике и сейсмологии [16] и др., т. к. невозможно провести прямые измерения этих

параметров. Как следствие, в работе [17] показано, что можно использовать метод Левенберга-Марквардта [18] для решения обратной задачи по восстановлению параметров в дробном уравнении более обобщенного вида. Формулировка обратной задачи сводит задачу математического моделирования к подбору других параметров, управляющих ходом итерационного метода решения, которые уже не привязаны к физическому смыслу исходной задачи. Такой способ постановки и решения обратной задачи применяется в работе [8] для восстановления значений параметров α и λ_0 в эредитарной α-модели. Впервые была применена эредитарная математическая модель для оценки изменения плотности потока радона (ППР) при изменении напряжённо-деформированного состояния среды до и после сильного землетрясения на Камчатке, на основе восстановленных значений λ_0. Полученные результаты интерпретировались как более точные, по сравнению с оценками по ОДУ-модели ОАР [3].

При решении обратной задачи итерационным методом Левенберга-Марквардта возникает необходимость в циклическом пересчете решения прямой задачи при иных значениях параметров и сопоставлении результатов с экспериментальными данными, однако скорость сходимости значений восстанавливаемых параметров к неким оптимальным заранее неизвестна. Более того, как показали исследования [7, 8], эредитарные модели ОАР имеют заметные перспективы практического применения для анализа данных и моделирования динамики ОАР как предвестника сильных землетрясений Камчатки. С целью развития данных моделей и их практического применения был разработан программный комплекс FEVO 1.0, реализующий математический аппарат эредитарных моделей, метод решения обратных задач, эффективные параллельные алгоритмы решения модельных уравнений прямых задач, а также инструменты обработки, сопоставления и визуализации экспериментальных данных и результатов моделирования. При этом прямая задача может иметь достаточно высокую вычислительную сложность при увеличении размерности задачи, например, когда вслед за изменением частоты дискретизации экспериментальных данных ОАР в несколько десятков раз, будет расти и число узлов N сетки численного метода решения. Всё вышесказанное выставляет требование уже к методу решения каждой отдельной прямой задачи, которое состоит в том, чтобы вычисление алгоритма решения прямой задачи выполнялось за наименьшее время. Что приводит нас к разработке параллельных алгоритмов решения модельных уравнений прямой задачи и анализу их эффективности.

Статья имеет следующую структуру. Раздел 1 представляет собой введение, описывая практическую значимость и предпосылки к данному исследованию. В разделе 2 приводится тестовый пример, основанный на эредитарной $\alpha(t)$-модели ОАР. В разделе 3 описываются методы численного решения прямой задачи для тестового примера. В разделе 4 приведены данные по оценкам среднего времени вычисления тестового примера при различных условиях. В разделе 5 описывается методика анализа эффективности параллельных алгоритмов, приводятся результаты анализа. В разделе 6 подводятся итоги исследования.

Тестовый пример

В качестве тестового примера в данном исследовании рассмотрим эредитарную $\alpha(t)$-модель ОАР, близкую к той, что представлена в [7] для описания аномального выброса ^{222}Rn, результаты моделирования по которой в сопоставлении с данными представлены на (рис. 1). Модель представляет собой задачу Коши вида:

$$\theta^{\alpha-1}\partial_{0,t}^{\alpha(t)}\bar{A}(t) = -a(t)\bar{A}(t)^2 - \lambda_0\bar{A}(t) + c(t), \qquad \bar{A}(t) = \frac{A(t)}{A_{max}}, \quad \bar{A}(t_0) = \frac{A_0}{A_{max}}, \quad (1)$$

где

- $\bar{A}(t)$ – ОАР в безразмерном виде, [отн.ед.];
- $A(t)$ – ОАР, A_{max} – максимальное значение ОАР наблюдаемое в данных; A_0 – ОАР в начальный момент времени, [Бк/м^3];
- $t \in [t_0, T]$ – время, рассматриваемого процесса, [с];
- t_0 и $T > 0$ – начальный и конечный моменты времени, [с];
- θ – некоторое характерное время процесса [19], [с];
- $a(t)$ – связан с выводом ^{222}Rn из камеры в окружающую атмосферу при разнице давлений: внутреннего (камеры) и атмосферного, например, при прохождении в окрестности пункта наблюдения циклона, [отн.ед.];
- λ_0 – коэффициент воздухообмена, [с$^{-1}$];
- $c(t)$ – функция, описывает диффузионный [20] механизм ввода ^{222}Rn, [отн.ед.];
- $\partial_{0,t}^{\alpha(t)}\overline{A}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\displaystyle\int_0^t \frac{\dot{\overline{A}}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}$ – дробная производная типа Герасимова-Капуто [14, 15] переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$.

Пример 1. Будем рассматривать задачу (1) при значениях параметров:

$$\begin{gathered} N = 132, \quad T = 132, \quad \overline{A} = 0, \quad \overline{A}_{max} = 1, \quad \lambda_0 = 0.05, \quad \theta = 1 \\ \alpha(t) = 0.99\left(1 - \left(\frac{(T-t)}{T}\cos\left(\frac{3\pi\, t}{T}\right)^2\right)\right), \\ a(t) = -2\lambda_0 + 12\lambda_0\left(2\cos\left(\frac{\pi\, t}{T}\right)^2 + \cos\left(\frac{2\pi\, t}{T} - \frac{\pi}{11}\right)^2\right), \\ c(t) = 12\lambda_0\left(\frac{12(T-t)}{10\,T}\sin\left(\frac{2\pi\, t}{T}\right)^2 + \frac{(T-t)}{T}\sin\left(\frac{3\pi\, t}{T}\right)^2\right). \end{gathered} \quad (2)$$

Задача Коши (1) решалась численно, т.к. дробное уравнение в (1) является нелинейным. С этой целью в работе [21] предложены: EFDS (нелокальная явная конечно-разностная схема) и IFDS (нелокальная неявная конечно-разностная

схема). Независимо от выбранной схемы, численное решение рассматривается в равномерной сеточной области:

$$h = T/N, \qquad \widehat{\Omega} = \{(t_i = ih) : 0 \le i < N\}, \qquad \widehat{\mathbb{A}} \in \widehat{\Omega},$$
$$\overline{A}(t) = \overline{A}_i, \quad 0 < \overline{A}_i < 1, \qquad a(t) = a_i, \quad c(t) = c_i, \qquad \alpha(t) = \alpha_i. \tag{3}$$

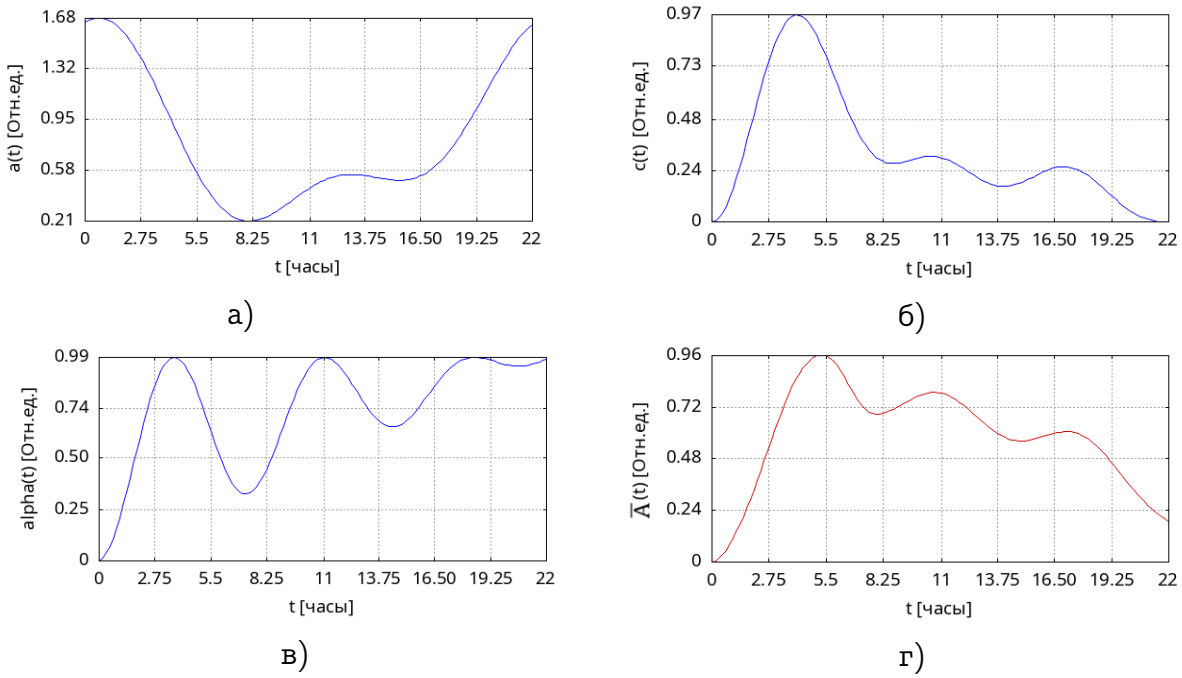

Рис. 2. а,б,в) вид функций-коэффициентов (2) уравнения; г) результаты расчётов по модели (1) с параметрами (2)

[Figure 2. а,б,в) form of functions-coefficients (2) of the equation; г) results of calculations using the model (1) with parameters (2)]

Такой тестовый пример (1) выбран по двум причинам. Во-первых, такая задача не синтезирована специально для анализа эффективности алгоритма, а имеет значение с точки зрения прикладной математики. Во-вторых, при этом задача может иметь достаточно высокую вычислительную сложность при увеличении размерности задачи вследствие увеличения числа узлов N в несколько десятков раз. В таком случае решение (1) с (2), представленное на (рис. 2), существенно не изменится, лишь повысится точность решения вслед за увеличением плотности числа узлов сетки (3). Поэтому для оценок по среднему времени расчёта будем проводить множество численных экспериментов при N от 132 до $3960 = (30 \times 132)$.

IFDS и методы решения

В статье [22] рассмотрены различные параллельные реализации EFDS и приведены оценки эффективности алгоритмов. Однако EFDS имеет неустранимую последовательную часть в алгоритме, что сильно снижает её эффективность

при увеличении числа узлов N. Поэтому, в данном исследовании заострим своё внимание именно на IFDS, которую далее решаем итерационным методом, который уже не имеет такого недостатка. Нелинейное уравнение в (1) аппроксимируется в области (3) по схеме IFDS следующим образом, где C – известная константа:

$$\begin{gathered} D_i \sum_{j=0}^{i-1} w_j^i \left(\overline{A}_{i-j} - \overline{A}_{i-j-1}\right) = -a_i \overline{A_i}^2 - \lambda_0 \overline{A_i} + c_i, \qquad \overline{A_0} = C, \\ D_i = \frac{h^{-\alpha_i}}{\Gamma(2-\alpha_i)}, \qquad w_j^i = (j+1)^{1-\alpha_i} - j^{1-\alpha_i}, \qquad 1 \le i < N, \end{gathered} \tag{4}$$

IFDS схема (4) и её обобщенные аналоги были апробированы в ряде тестовых и прикладных задач [21]. Описанные ниже методы решения IFDS схемы (4) подробно рассмотрены в [21]. В данном разделе приведены лишь основные сведения, необходимые для представления схемы параллельных вычислений.

Так как IFDS схема (4) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, то в качестве итерационного метода решения будем рассматривать как: метод Ньютона так и модифицированный метод Ньютона (MNM). Метод начинается с представления схемы (4) как итерационной функции:

$$F\left(\overline{A_i}\right) = D_i \sum_{j=0}^{i-1} w_j^i \left(\overline{A}_{i-j} - \overline{A}_{i-j-1}\right) + a_i \overline{A_i}^2 + \lambda_0 \overline{A_i} - c_i, \tag{5}$$

для которой составляется итерационный процесс:

$$U^{m+1} = U^m - \frac{F(U^m)}{J(U^m)}, \tag{6}$$

где, m – шаг итерационного процесса; $U^m = \left(\overline{A}_1^m, ..., \overline{A}_N^m\right)^T$ – вектор значений функции решения во всех узлах сетки $i = 1, ..., N$ известного на итерационном m (текущем) шаге; $F(U^m) = \left(f_1\left(\overline{A}_1^m\right), ..., f_N\left(\overline{A}_N^m\right)\right)$ – значения вычисляемые по (5) с учетом значений U^m решения на m шаге; $J(U^m) = (J_{ij}), i = 1, ..., N, j = 1, ..., N$ – Якобиан, нижнетреугольная матрица, вычисляемая по формуле:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, & j \ge i+1, \\ D_i - b_i + 2a_i\overline{A}_i, & j = i, \\ D_i\left(w_{i-j}^i - w_{i-j-1}^i\right), & j \le i-1. \end{cases} \tag{7}$$

Итерационный процесс (6) будет локально сходиться порядком $O(h)$ только, если для (7) выполняется $\det(J_{ij}) > 0$. Итерационный процесс (6) продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения.

Замечание 1. В качестве начального приближения U^0 согласно [22], выбирается вектор, составленный из значения $\overline{A}_{N-1}$, полученного при вычислении (4) по EFDS схеме. Это позволяет ускорить сходимость метода Ньютона, как минимум в случае рассматриваемых эредитарных моделей. Более того, это решает проблему

сингулярности в нуле, вследствие чего (6) не будет работать, т.к. функция в точке $\overline{A}_{N-1}$ будет определена и сама по себе является некоторым возмущением.

MNM отличается от метода Ньютона только тем, что якобиан (7) вычисляется один раз, до начала итерационного процесса (6). Это увеличит m число итераций для сходимости метода, однако уменьшит итоговое время работы алгоритма, т. к. вычислительно сложную задачу обращения (7) нужно будет провести один раз.

Гибридный CPU-GPU алгоритм

Для параллельной программной реализации решения IFDS используется API OpenMP – открытый стандарт программного интерфейса для параллельных систем с общей памятью [23]. OpenMP является набором директив для компиляторов, библиотек функций и переменных окружения, и реализует параллельные вычисления с помощью идеи многопоточности – нескольких параллельно выполняемых задач CPU потоках. Для работы с GPU используется API CUDA параллельных вычислений фирмы NVIDIA, позволяющий управлять RAM GPU по своему усмотрению. Память GPU имеет иерархическую структуру и оптимизирована под максимальную пропускную способность [24].

На рис. 3 приведена блок-схема реализующая (4)–(7) с помощью API OpenMP и API CUDA. Для реализации использован язык программирования "среднего"уровня `C`, из-за его универсальности, широкими возможностями по работе с памятью. Поэтому в псевдо-коде на рис. 3 встречаются фрагменты кода на языке `C` и его надстройки `CUDA␣C`. Некоторые тривиальные операции не приводятся в блок-схеме, например вызовы функций: `cudaMalloc()` – для выделения RAM GPU, большая часть вызовов `cudaFree()` – для освобождения RAM GPU, кроме тех, что важны при организации вычислений, а также вывод результатов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\alpha(t)$ после основного цикла.

Среднее время расчета тестовой задачи

Анализ эффективности будем проводить на основе данных о времени вычисления различных алгоритмов, реализующих IFDS. Из леммы Брента [23, 25, 26] следует, что любой алгоритм, реализованный для выполнения в системах типа PRAM, можно модифицировать таким образом, что его можно выполнить в системах PRAM с меньшим числом потоков, где PRAM — параллельная машина с произвольным доступом к памяти, объединяющая p потоков вычислительного узла, общую память и устройство управления. Из леммы Брента следует, что мы можем сравнивать время вычисления алгоритмов на системах: с одним потоком CPU (последовательный) и разным количеством потоков (параллельный).

В силу того, что мы будем получать немного различные T_p при каждом новом численном эксперименте, а количество экспериментов конечно, то T_p можно считать случайной величиной с некоторой функцией распределения. Тогда для вычисления $T_1(N)$ и $T_p(N)$ прибегнем к понятию математического ожидания

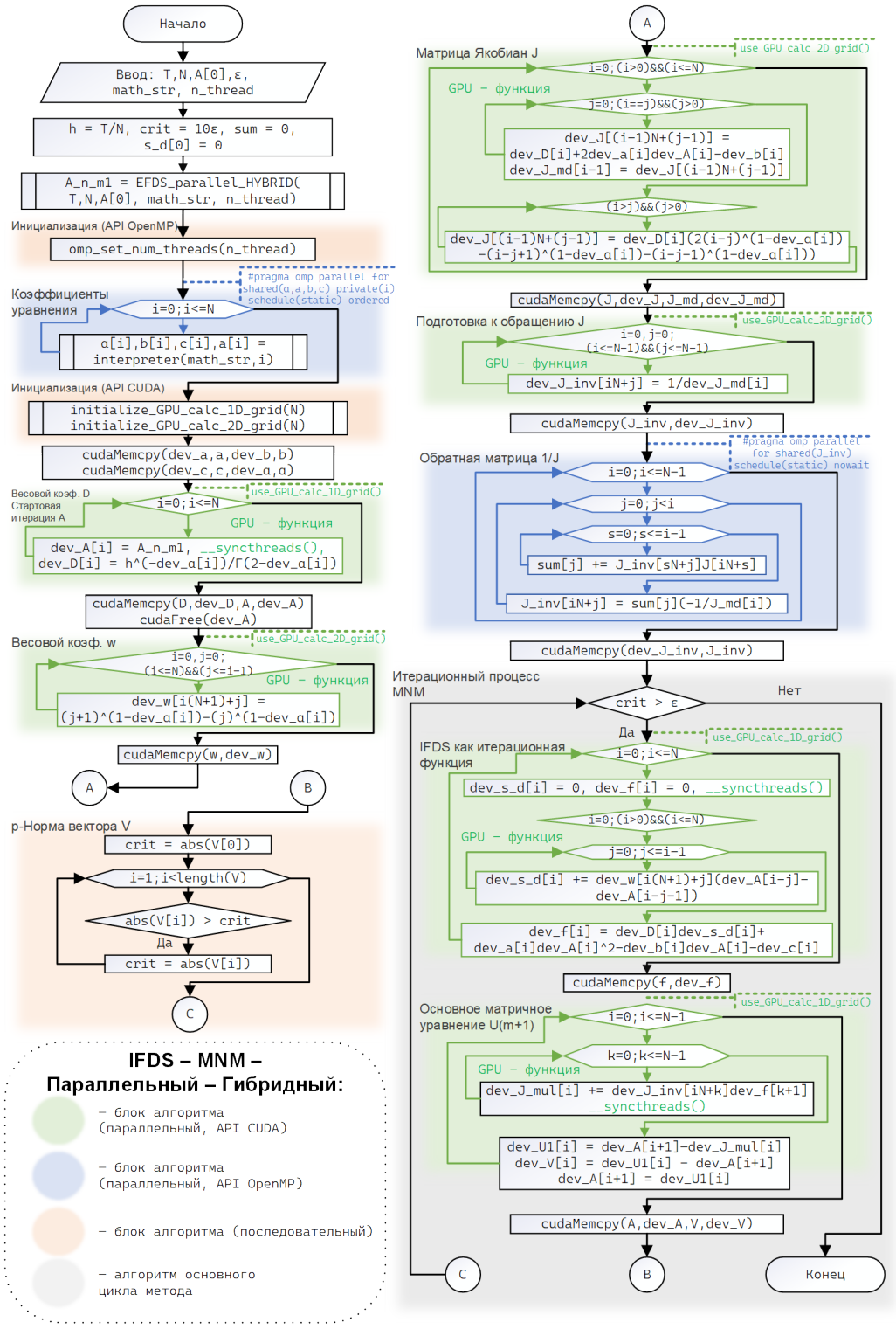

Рис. 3. Блок-схема гибридного параллельного алгоритма для решения IFDS с помощью MNM на основе (4) – (7)

[Figure 3. Flowchart of a hybrid parallel algorithm for solving IFDS using MNM based on (4) – (7)]

(среднее значение) [27] для дискретной случайной величины:

$$\mathbb{E}\left(T_{p,g}(N)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} T^{i}_{p,g}(N), \tag{8}$$

где i – индекс эксперимента; L – объем выборки.

Далее, согласно (8), рассчитаем $\mathbb{E}(\cdot)$ для выборки в $L = 10$ значений при разном количестве задействованных p потоков CPU, где:

- пусть $N = 3960$ – число узлов равномерной сеточной области (3) для (4). Характеризует размерность задачи, и как следствие, сложность алгоритма;
- $T_{1,0}(N)$ – время вычисления задачи со сложностью N, затрачиваемое последовательным (Sequential) алгоритмом;
- $T_{p,0}(N)$ – время вычисления задачи со сложностью N, затрачиваемое параллельным (API OpenMP) алгоритмом, на машине $p \geq 2$ потоками CPU;
- $T_{p,g}(N)$ – время вычисления задачи со сложностью N, затрачиваемое гибридным (Hybrid) алгоритмом на машине с $p \geq 2$ потоками CPU, код которого распараллелен как с помощью API OpenMP, так и API CUDA [24,28].

Числом мультипроцессоров GPU, которые будут задействованы для расчётов, пользователь не управляет, но может число `thread` на один `block`, зависящее от конкретной архитектуры GPU (здесь по умолчанию задаётся `thread = 32`), то значение g не меняется. Соответствующие функции FEVO 1.0 вычисляют оптимальную (наиболее производительную) `grid` задействования CUDA ядер GPU на основе заданного числа `thread`. Расчёты проводились на ЭВМ, расположенной в ИКИР ДВО РАН и приобретённой в рамках гранта Российского научного фонда № 23-71-01050. Данная ЭВМ имеет характеристики: CPU — AMD Ryzen 9 7950X, 16×4.5 GHz core, cache L2 16 Mb & L3 64 Mb; RAM — 96 Gb; GPU — GeForce RTX 4090, 24 Gb, 2235 MHz, ALU 16384.

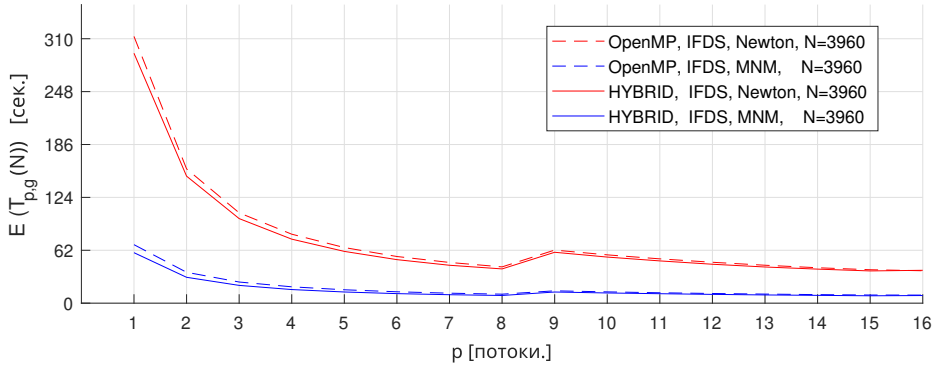

Рис. 4. Визуализация данных (таб. 1) по среднему времени расчета тестовой задачи

[Figure 4. Data visualization (tab. 1) the average calculation time of the test problem]

Таблица 1

Оценка степени загрузки потоков CPU для расчетов параллельных алгоритмов: как изменение $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ в [сек.] для различных реализаций IFDS [Алг.] при разном числе задействованных p [ед.] потоков CPU. [Estimation of CPU thread utilization for parallel algorithm computations: as the change $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ in [sec.] for different IFDS [Alg.] implementations with different number of CPU threads p [unit] involved.]

p \ Алг.	OpenMP N = 3960 IFDS (Newton)	OpenMP N = 3960 IFDS (MNM)	Hybrid N = 3960 IFDS (Newton)	Hybrid N = 3960 IFDS (MNM)
1 – Sequential equivalent	312.68	68.570	292.96	59.170
2	157.42	36.192	148.89	30.322
3	105.90	24.787	99.148	20.841
4	80.866	19.167	75.051	15.957
5	65.206	15.703	60.692	13.111
6	54.701	13.338	51.028	11.189
7	47.733	11.700	44.437	9.9130
8	42.537	10.547	40.156	9.0144
9	62.216	14.470	59.656	13.076
10	56.633	13.244	54.035	11.953
11	51.941	12.186	49.546	11.089
12	47.940	11.350	45.629	10.306
13	44.468	10.645	42.406	9.6448
14	41.515	10.014	39.912	9.1592
15	39.204	9.5504	37.792	8.6509
16	37.995	9.4682	38.536	8.9424

В программном комплексе FEVO 1.0 реализованы инструменты обработки, сопоставления и визуализации экспериментальных данных и результатов моделирования, а также инструменты анализа эффективности используемых параллельных алгоритмов. Для удобства в FEVO 1.0 разработан графический интерфейс пользователя (GUI) (рис. 5). Также реализован интерпретатор математических выражений вводимых пользователем, для задания функциональных зависимостей коэффициентов и параметров эредитарных моделей (рис. 5). Использование интерпретатора для вычисления векторов значений функции коэффициентов модели (2) немного замедляет начальный этап работы параллельных алгоритмов, однако существенно расширяет возможности FEVO 1.0 как инструмента для моделирования вариаций ОАР.

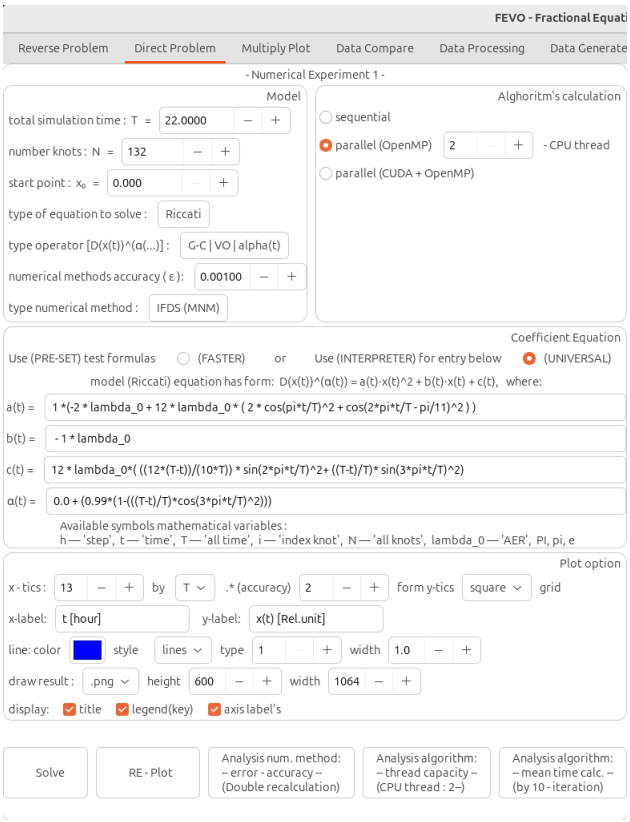

Рис. 5. GUI FEVO 1.0 для решения прямых задач математического моделирования с выводом результатов в файл и их визуализацией, а также для анализа используемых параллельных алгоритмов и методов численного решения

[Figure 5. GUI FEVO 1.0 for solving direct problems of mathematical modeling with following output of results to a file and their visualization, as well as for analysis of used parallel algorithms and methods of numerical solution]

Анализ вычислительной эффективности

Теперь с использованием данных по $\mathbb{E}\left(T_{p,g}(N)\right)$, затраченном на решение тестовой задачи (таб. 1), исследуем эффективность гибридных параллельных алгоритмов.

Замечание 2. Под эффективностью понимается оптимальное соотношение в координатах: ускорение вычислений – число потоков вычислительных узлов, по сравнению с последовательной версией алгоритма. Для оценки эффективности анализируется $\mathbb{E}\left(T_{p,g}(N)\right)$ в терминах: время работы, ускорение, эффективность и стоимость алгоритма.

Ускорение $A_{p,g}(N)$ которое предоставляет параллельный алгоритм, в сравнении с самым эффективным последовательным алгоритмом, определяется формулой:

$$A_{p,g}(N) = \frac{\mathbb{E}\left(T_{1,0}(N)\right)}{\mathbb{E}\left(T_{p,g}(N)\right)}, \tag{9}$$

где, $\max(A_{p,0}(N)) = p$ – теоретическая величина, возможная при отсутствии неизбежных задержек при выполнении параллельного алгоритма на CPU.

Эффективность $V_{p,g}(N)$ использования параллельным алгоритмом заданного количества потоков, определяется по формуле:

$$V_{p,g}(N) = \frac{\mathbb{E}(T_{1,0}(N))}{p \cdot \mathbb{E}(T_{p,g}(N))} = \frac{A_{p,g}(N)}{p}, \tag{10}$$

где, при $\max(A_{p,g}(N)) = p$ получим что $\max(V_{p,g}(N)) = 1$.

Стоимость $C_{p,g}(N)$ – это произведение количества используемых потоков и $T_{p,g}(N)$ времени решения параллельном алгоритмом:

$$C_{p,g}(N) = \mathbb{E}(T_{p,g}(N)) \cdot p. \tag{11}$$

Стоимостно–оптимальный показатель (СОП) $CO_{p,g}(N)$ алгоритма, характеризуется стоимостью пропорциональной сложности наилучшего последовательного алгоритма [29], и в этом случае:

$$CO_{p,g}(N) = \frac{C_{p,g}(N)}{\mathbb{E}(T_{1,0}(N))}. \tag{12}$$

Результаты представлены ниже на (рис. 6).

Далее, на основе результатов в (таб. 1) и (рис. 7) оценим, как меняется $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ при уменьшении N и числе потоков p, выбранном на основе анализа.

Таблица 2

Оценка уменьшения $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ в [сек.] для различных реализаций IFDS [Алг.] при уменьшении N [узлов] и фиксированном числе p [ед.] потоков CPU. [Estimation of the decrease $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ in [sec.] for different IFDS [Alg.] when N [node] are decreased and p [unit] of CPU threads is fixed.]

$N \setminus$ Алг.	Sequential $p = 1$ IFDS (Newton)	Sequential $p = 1$ IFDS (MNM)	OpenMP $p = 8$ IFDS (Newton)	OpenMP $p = 8$ IFDS (MNM)	Hybrid $p = 8$ IFDS (Newton)	Hybrid $p = 8$ IFDS (MNM)
$132 = (1 \times 132)$	0.0517	0.0481	0.0492	0.0475	0.0537	0.0489
$660 = (5 \times 132)$	1.4342	0.5908	0.3891	0.2783	0.3752	0.2525
$1320 = (10 \times 132)$	10.078	2.9208	1.8314	0.8212	1.7762	0.6997
$1980 = (15 \times 132)$	32.887	8.3711	5.3471	1.8676	5.3193	1.5837
$2640 = (20 \times 132)$	77.139	18.492	11.818	3.5419	11.689	3.0204
$3300 = (25 \times 132)$	153.25	35.104	22.843	6.2162	22.711	5.4139
$3960 = (30 \times 132)$	277.53	60.161	42.414	10.547	40.156	9.0144
$4620 = (35 \times 132)$	467.19	97.182	74.799	16.188	27.615	14.253
$5280 = (40 \times 132)$	758.56	157.74	112.74	26.860	22.668	22.366
$5940 = (45 \times 132)$	1092.9	230.63	171.48	38.718	66.609	34.863

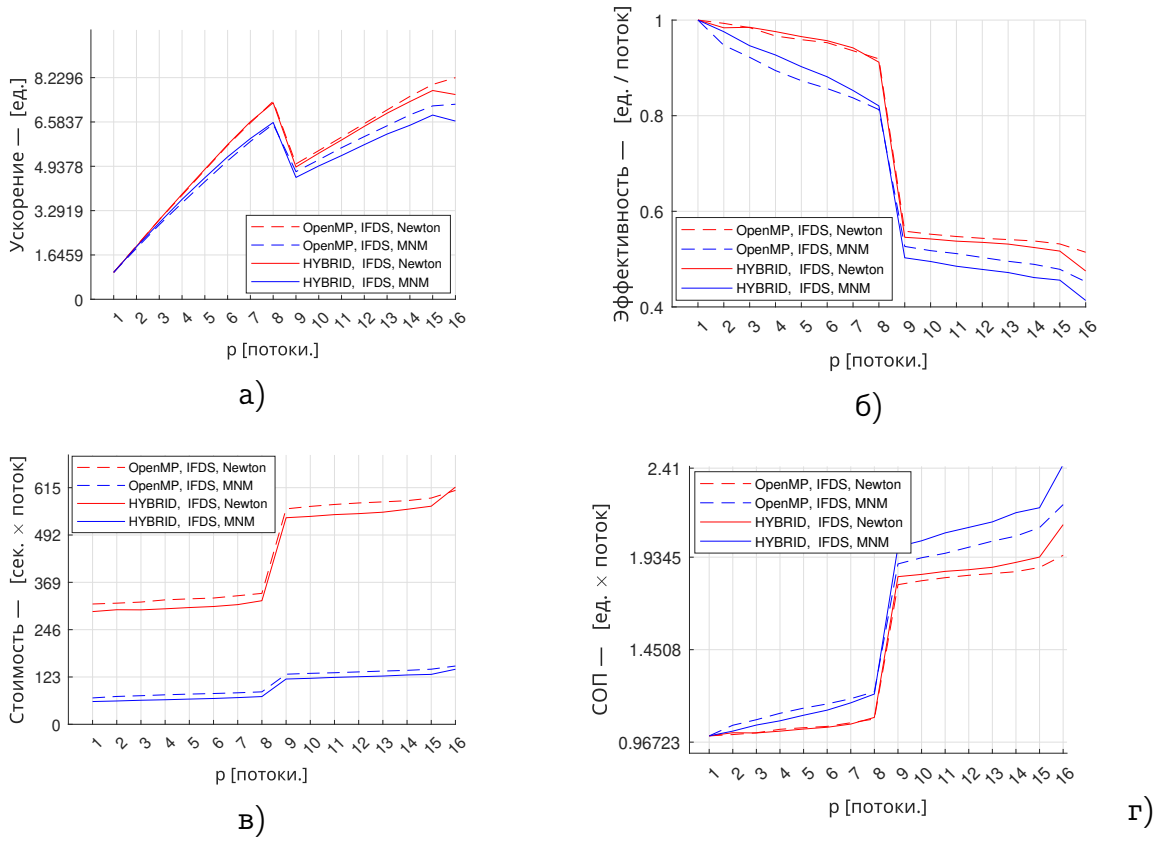

Рис. 6. При разном p – числе потоков CPU, и $g = 32$ – постоянном числе thread GPU имеем следующие оценки параллельных алгоритмов: а) Ускорение $A_{p,g}(N)$ согласно (9); б) Эффективность $V_{p,g}(N)$ согласно (10); в) Стоимость $C_{p,g}(N)$ согласно (11); г) СОП $CO_{p,g}(N)$ согласно (12)

[Figure 6. With different p – number of CPU threads, and $g = 32$ – constant number of thread GPUs, we have the following estimates of parallel algorithms: a) Acceleration $A_{p,g}(N)$ according to (9); б) Efficiency $V_{p,g}(N)$ according to (10); в) Cost $C_{p,g}(N)$ according to (11); г) Cost-optimum indicator $CO_{p,g}(N)$ according to (12)]

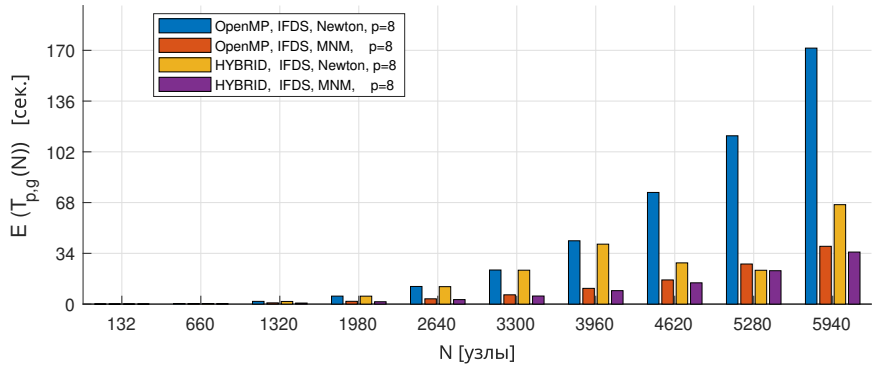

Рис. 7. Визуализация данных (таб. 2) с оценками уменьшения $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ при разных N, без учета последовательных алгоритмов

[Figure 7. Data visualization (Table. 2) with reduction estimates $\mathbb{E}(T_{p,g}(N))$ for different N, without taking into account sequential algorithms]

Заключение

Из результатов анализа эффективности гибридных CPU-GPU параллельных алгоритмов IFDS видно, что при решении тестовых задач одинаковой вычислительной сложности на основе эредитарной $\alpha(t)$-модели ОАР имеет место прирост скорости вычисления в 6–8 раз по сравнению с последовательными алгоритмами. Однако при использовании потоков CPU $p > 8$ для параллельной обработки эффективность использования этих потоков заметно снижается.

Также из результатов, представленных, видно, что при решении тестовых задач при равномерно возрастающей вычислительной сложности, но оптимальном числе потоков CPU, равном 8, имеет место прирост скорости вычисления в 2 раза по сравнению с последовательными алгоритмами. Однако использование гибридных CPU-GPU параллельных алгоритмов дает существенное преимущество перед параллельными OpenMP алгоритмами только при решении задач вычислительной сложности $N > 4000$. Последнее связано с тем, что операции над векторами и матрицами проводятся в основном на GPU, которые имеют преимущество над CPU при работе с большими размерностями тензоров.

Аббревиатуры

ОАР	Объемная активность радона
CPU	Central Processing Unit (Центральный процессор)
GPU	Graphic Processing Unit (Графический процессор)
IFDS	Implicit Finite-Difference Scheme
GUI	Graphic User Interface (Графический интерфейс пользователя)
MNM	Modified Newton's Nethod (Модифицированный метод Ньютона)
OpenMP	Open Multi-Processing
CUDA	Compute Unified Device Architecture
API	Application Programming Interface
PRAM	Parallel Random Access Machine
RAM	Random Access Memory

Список литературы

1. Nikolopoulos D., Cantzos D., Alam A., Dimopoulos S., Petraki E. Electromagnetic and Radon Earthquake Precursors // *Geosciences*, 2024. vol. 14, no. 10, pp. 271 DOI: 10.3390/geosciences14100271.

2. Бирюлин С. В., Козлова И. А., Юрков А. К. Исследование информативности объемной активности почвенного радона при подготовке и реализации тектонических землетрясений на примере Южно-Курильского региона // *Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле*, 2019. Т. 4, № 44, С. 73–83 DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.

3. Фирстов П. П., Макаров Е. О. *Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения.* Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018. 148 с. ISBN978-5-7968-0691-3.

4. Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes // *In Proceedings of the Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption, Vienna, Austria, 9–12 September 1991*, 1993, pp. 9–22.

5. Chang W., Lin Y. Y. Preliminary study on the application of hydrogeochemistry of earthquake prediction // *Contrib. Pap. Intern. Symp. on earthquake prediction. UNESCO: Conf. 801. Col. 14/111-8, Paris, 2–6 Apr. Paris*, 1979, pp. 1–14.
6. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance // *E3S Web Conference*, 2020. vol. 196, no. 02027, pp. 1–6 DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
7. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 4, pp. 850 DOI: 10.3390/math11040850.
8. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O. Estimation of radon flux density changes in temporal vicinity of the Shipunskoe earthquake with $M_w = 7.0$, 17 August 2024 with the use of the hereditary mathematical model // *Geosciences*, 2025. vol. 15, no. 1, pp. 30 DOI: 10.3390/geosciences15010030.
9. Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transfer processes in fractional structure medium // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010. vol. 2, pp. 180–185 DOI: 10.1134/S2070048210020055.
10. Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: Times Books, 1982. 468 pp.
11. Volterra V. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
12. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 1st ed.*. Boston: Elsevier Science, 2006. 540 pp. ISBN978-0444518323.
13. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
14. Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena // *Meccanica*, 2017. vol. 52, pp. 3043–3052 DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y.
15. Novozhenova O. G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union // *FCAA*, 2017. vol. 20, pp. 790–809.
16. Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations // *Conference on Inverse Scattering, Theory and application*, 1983, pp. 206–220.
17. Твёрдый Д. А., Паровик Р. И. О задаче оптимизации для определения вида функциональной зависимости переменного порядка дробной производной типа Герасимова-Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2024. Т. 47, №2, С. 35–57 DOI: 10.26117/2079-6641-2024-47-2-35-57.
18. More J. J. The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory // *In: Watson, G.A. (eds.) Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics*, 1978. vol. 630, pp. 105–116 DOI: 10.1007/BFb0067700.
19. Рехвиашвили С. Ш., Псху А. В. Дробный осциллятор с экспоненциально-степенной функцией памяти // *Письма в Журнал Технической Физики*, 2022. Т. 48, №7, С. 33–35 DOI: 10.21883/PJTF.2022.07.52290.19137.
20. Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room // *Journal of Environmental Radioactivity*, 2013. vol. 124, pp. 185–190 DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
21. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation // *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 1, pp. 23 DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
22. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Hybrid GPU–CPU Efficient Implementation of a Parallel Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Riccati Equation of Fractional Variable Order // *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 15, pp. 3358 DOI: 10.3390/math11153358.
23. Борзунов С. В., Кургалин С. Д., Флегель А. В. *Практикум по параллельному программированию: учебное пособие*. Санкт-Петербург: БХВ, 2017. 236 с.
24. Sanders J., Kandrot E. *CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming*. London: Addison-Wesley Professional, 2010. 311 pp.
25. Brent R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions // *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1974. vol. 21, no. 2, pp. 201–206 DOI: 10.1145/321812.321815.
26. Corman T. H., Leiserson C. E., Rivet R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms, 3rd ed.*. Cambridge: The MIT Press, 2009. 1292 pp. ISBN978-0262033848.
27. Shao J. *Mathematical Statistics, 2nd ed.*. New York: Springer, 2003. 592 pp.

28. Cheng J., Grossman M., McKercher T. *Professional Cuda C Programming, 1st ed.*. New-York: Wrox Pr Inc, 2014. 497 pp. ISBN1118739329.

29. Гергель В. П. *Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем. Учебное пособие*. Москва: Издательство МГУ, 2010. 544 с.

Информация об авторе

Твёрдый Дмитрий Александрович✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории элетромагнитных излучений, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-6983-5258.

References

[1] Nikolopoulos D., Cantzos D., Alam A., Dimopoulos S., Petraki E. Electromagnetic and Radon Earthquake Precursors, Geosciences, 2024, vol. 14, no. 10, pp. 271. DOI: 10.3390/geosciences14100271.

[2] Biryulin S. V., Kozlova I. A., Yurkov A. K. Investigation of informative value of volume radon activity in soil during both the stress build up and tectonic earthquakes in the South Kuril region, Bulletin of KRASEC. Earth Sciences, 2019, vol. 4, no. 44, pp. 73–83. DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.

[3] Firstov P. P., Makarov E. O. Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitus Bering Kamchatka State University, 2018, 148 pp., isbn: 978-5-7968-0691-3 (In Russian)

[4] Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes, In Proceedings of the Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption, Vienna, Austria, 9–12 September 1991, 1993, pp. 9–22.

[5] Chang W., Lin Y. Y. Preliminary study on the application of hydrogeochemistry of earthquake prediction, Contrib. Pap. Intern. Symp. on earthquake prediction. UNESCO: Conf. 801. Col. 14/111-8, Paris, 2–6 Apr. Paris, 1979, pp. 1–14.

[6] Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, E3S Web Conference, 2020, vol. 196, no. 02027, pp. 1–6. DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.

[7] Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 4, pp. 850. DOI: 10.3390/math11040850.

[8] Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O. Estimation of radon flux density changes in temporal vicinity of the Shipunskoe earthquake with $M_w = 7.0$, 17 August 2024 with the use of the hereditary mathematical model, Geosciences, 2025, vol. 15, no. 1, pp. 30. DOI: 10.3390/geosciences15010030.

[9] Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transfer processes in fractional structure medium, Mathematical Models and Computer Simulation, 2010, vol. 2, pp. 180–185. DOI: 10.1134/S2070048210020055.

[10] Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. New York, Times Books, 1982, 468 pp.

[11] Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. New York, Dover Publications, 2005, 288 pp.

[12] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, 1st ed. Boston, Elsevier Science, 2006, 540 pp., isbn: 978-0444518323.

[13] Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003, 272 pp.(In Russian)

[14] Caputo M., Fabrizio M. On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena, Meccanica, 2017, vol. 52, pp. 3043–3052. DOI: 10.1007/s11012-017-0652-y.

[15] Novozhenova O. G. Life And Science of Alexey Gerasimov, One of the Pioneers of Fractional Calculus in Soviet Union, FCAA, 2017, vol. 20, pp. 790–809.

[16] Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, Conference on Inverse Scattering, Theory and application, 1983, pp. 206–220.

[17] Tverdyi D. A., Parovik R. I. The optimization problem for determining the functional dependence of the variable order of the fractional derivative of the Gerasimov-Caputo type,

Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2024, vol. 47, no. 2, pp. 35–57. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-47-2-35-57.(In Russian)
[18] More J. J. The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory, In: Watson, G.A. (eds.) Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics, 1978, vol. 630, pp. 105–116. DOI: 10.1007/BFb0067700.
[19] Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V. Fractional oscillator with exponential-power memory function, Technical Physics Letters, 2022, vol. 48, no. 7, pp. 33–35. DOI: 10.21883/PJTF.2022.07.52290.19137,(In Russian)
[20] Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room, Journal of Environmental Radioactivity, 2013, vol. 124, pp. 185–190. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
[21] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, Fractal and Fractional, 2022, vol. 6, no. 1, pp. 23. DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
[22] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Hybrid GPU–CPU Efficient Implementation of a Parallel Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Riccati Equation of Fractional Variable Order, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 15, pp. 3358. DOI: 10.3390/math11153358.
[23] Borzunov S. V., Kurgalin S. D., Flegel A. V. Praktikum po parallel'nomu programmirovaniyu: uchebnoe posobie [Workshop on Parallel Programming: A Study Guide]. Saint Petersburg: BVH, 2017, 236 pp.(In Russian)
[24] Sanders J., Kandrot E. CUDA by Example: An Introduction to General-Purpose GPU Programming. London, Addison-Wesley Professional, 2010, 311 pp.
[25] Brent R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions, Journal of the Association for Computing Machinery, 1974, vol. 21, no. 2, pp. 201–206. DOI: 10.1145/321812.321815.
[26] Corman T. H., Leiserson C. E., Rivet R. L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3rd ed.. Cambridge, The MIT Press, 2009, 1292 pp., isbn: 978-0262033848.
[27] Shao J. Mathematical Statistics, 2nd ed. New York, Springer, 2003, 592 pp.
[28] Cheng J., Grossman M., McKercher T. Professional Cuda C Programming, 1st ed. New-York, Wrox Pr Inc, 2014, 497 pp., isbn: 1118739329.
[29] Gergel V. P., Strongin R. G. High Performance Computing for Multi-Core Multiprocessor Systems. Study Guide. Moscow: MGU publishing, 2010, 544 pp.(In Russian)

Information about the author

Tverdyi Dmitrii Alexsandrovich – PhD (Phys. & Math.), Researcher, Electromagnetic Radiation Laboratory, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka village, Russia, ORCID 0000-0001-6983-5258.