



Математическое моделирование динамики радона в зоне аэрации пористой геосреды в условиях ее напряженно-деформированного состояния

Г. А. Сковпень¹, Р. И. Паровик^{*2}

¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, Россия

² Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

Аннотация. В статье с помощью математической модели исследуется динамика объемной активности радона в условиях напряженно-деформированного состояния пористой геосреды. Напряженное состояние геосреды описывается с помощью функции напряжения или активации, которая входит в модельное уравнение как источник поступления радона вместе с интенсивностью его эманации. Модельное уравнение представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое разрешается с помощью интегрального преобразования Лапласа с учетом начального условия. В полученном аналитическом решении функция активации выбирается в виде двух экспонент. Первая экспонента описывает рост напряжения в геосреде, а вторая его разгрузку. В результате компьютерного моделирования в среде Maple2021 были получены расчетные кривые объемной активности радона, которые описывают бухтообразные аномалии аналогичные полученным в ходе радонового мониторинга на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне.

Ключевые слова: математическая модель, перенос радона, функция активации, Maple2021, аномалии.

Получение: 17.03.2025; Исправление: 02.04.2025; Принятие: 03.04.2025; Публикация онлайн: 18.04.2025

Для цитирования. Сковпень Г. А., Паровик Р. И. Математическое моделирование динамики радона в зоне аэрации пористой геосреды в условиях ее напряженно-деформированного состояния // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 50. № 1. С. 134-148. EDN: TCDSUJ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-134-148>.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН №124012300245-2.

Конкурирующие интересы. Конфликт интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:**  E-mail: parovik@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Сковпень Г. А., Паровик Р. И., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Mathematical Modeling of Radon Transport in the Aerated Zone of Porositic Geomedium under Conditions of its Stress-Strain State

G. A. Skovpen¹, R. I. Parovik^{*2}

¹ Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya str., 4, Russia

² Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 684034, Paratunka, Pogranichnaya str., 4, Mirnaya, 7, Russia

Abstract. The article uses a mathematical model to study anomalous changes in radon volume activity at a certain point in a porous geoenvironment under its stress-strain state. The stress state of the geoenvironment is described using a stress or activation function, which is included in the model equation as a source of radon inflow along with the intensity of its emanation. The model equation is a linear ordinary differential equation of the first order, which is solved using the integral Laplace transform, taking into account the initial condition. In the resulting analytical solution, the activation function is selected in the form of two exponentials. The first exponent describes the growth of stress in the geoenvironment, and the second its unloading. As a result of computer modeling in the Maple2021 environment, calculated curves of radon volume activity were obtained, which describe bay-shaped anomalies similar to those obtained during radon monitoring at the Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic test site.

Key words: mathematical model, radon transfer, activation function, Maple2021, anomalies.


Received: 17.03.2025; Revised: 02.04.2025; Accepted: 03.04.2025; First online: 18.04.2025

For citation. Skovpen G. A., Parovik R. I. Mathematical modeling of radon transport in the aerated zone of porositic geomedium under conditions of its stress-strain state. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, 50: 1, 134-148. EDN: TCDSUJ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-134-148>.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of IKIR FEB RAS No. 124012300245-2.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: parovik@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Skovpen G. A., Parovik R. I., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)



Введение

Радон (^{222}Rn) – радиоактивный газ, который образуется в результате распада радия (^{226}Ra) в цепочке урана-238 (^{238}U). Будучи инертным газом, радон легко мигрирует через поры и трещины в почвах и горных породах, что делает его важным индикатором геодинамических процессов [1]. Одной из задач современной геодинамики, связанной с сейсмической активностью и генерированием аномалий объемной активности радона (ОАР), является выяснение физических механизмов распространения и перераспределения энергии деформационных процессов в геологической среде.

Исследование миграционных свойств радона изучается в рамках теории эманационного метода [1–5]. Изначально этот метод был предложен для поиска месторождений урановых руд [2–4], но потом спектр его применения расширился. Метод позволяет с помощью математических моделей исследовать миграционные свойства радона в почвах, горных породах, в приземной атмосфере и в иных материалах [6]. Такой подход имеет ключевое значение для понимания процессов радиационного облучения и разработки мер по его снижению в нижних этажах жилых зданий и промышленных сооружений при их эксплуатации и проектировании [7–10], геодинамических процессов, которые характеризуются повышенной сейсмической активностью и могут приводить к сильным землетрясениям и горным ударам в шахтах [11–15].

С 1997 г. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне работает сеть пунктов мониторинга подпочвенных газов с целью поиска предвестников сильных землетрясений [16–18]. Пункты сети радонового мониторинга расположены в разных структурных элементах района побережья Авачинского залива, кроме того, каждый пункт имеет свои особенности строения толщи аллювиально-делювиальных отложений, в зоне аэрации которых размещаются датчики для регистрации концентрации подпочвенных газов, в том числе и радона [17]. Это, как показывает многолетний опыт, позволяет фиксировать в динамике концентрации радона индивидуальный отклик в связи с разной реакцией отдельных блоков земной коры на геодеформационные процессы, связанные с подготовкой сильных землетрясений. В качестве такого индивидуального отклика могут быть различные аномалии в динамике ОАР [19]. Например, на рис.1 приведены аномалии зарегистрированные перед Кроноцким землетрясением 05.12.1997 г. с $M=7.7$ (рис.1а), перед землетрясениями в Авачинском заливе 19.02.2015 (рис. 1б) и 20.03.2016 г (рис.1в).

В работах [20–22] была предложена гидродинамическая математическая модель ОАР с учетом инъекции радона в поток грунтовых вод, который после разгрузки мог давать вклад в аномальные значения радона в пункте регистрации. Инъекция радона осуществлялась за счет напряженно-деформированного состояния массива горных пород. В работе [19] был реализован алгоритм решения модели в виде кода программы на языке C++, а также «метод площадей» для подбора расчетной кривой ОАР для описания аномалий, приведенных рис.1а и рис.1б. Программа была зарегистрирована в Роспатенте [23].

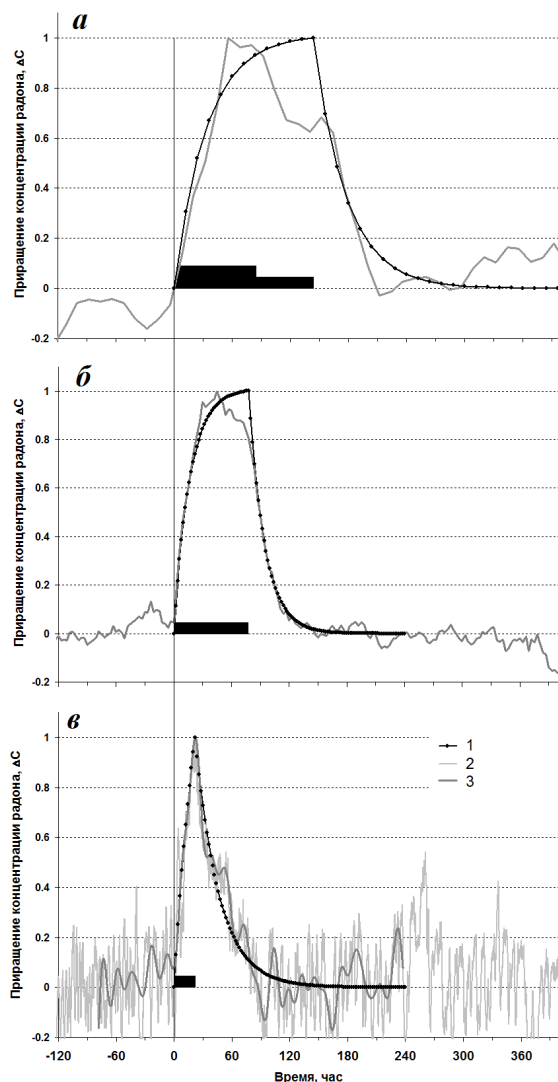


Рис. 1. Зарегистрированные в подпочвенном радоне предвестниковые аномалии. Все кривые нормированы на максимум. Черным прямоугольником отмечено предполагаемое время воздействия импульса напряжения. а – Кроноцкое землетрясение 5 декабря 1997 г. с $M = 7.7$, б – землетрясение Авачинского залива 19 февраля 2015 г. с $M = 5.5$, в – землетрясение 20 марта 2016 г. с $M=6.4$. 1) расчетные кривые, 2) исходные данные, 3) кривые, отфильтрованные фильтром высоких частот с граничной частотой 0.07 час^{-1}

[Figure 1. Harbinger anomalies recorded in subsoil radon. All curves are normalized to the maximum. A black rectangle marks the estimated exposure time of the voltage pulse. а – is the Kronotsky earthquake on December 5, 1997 with $M = 7.7$, б – is the Avacha Bay earthquake on February 19, 2015 with $M = 5.5$, в – is the earthquake on March 20, 2016 with $M=6.4$. 1) calculated curves, 2) initial data, 3) curves, filtered by a high-frequency filter with a boundary frequency 0.07 hour^{-1}]

Однако в настоящее время связь изменения уровня грунтовых вод и динамики значений ОАР в пункте наблюдений пока не установлены. Поэтому было предложено использовать математическую модель динамики ОАР, которая учитывает непосредственный выход избыточного радона из порового пространства за счёт напряженно-деформированного состояния вблизи датчика регистрации.

Физическая модель

Мы будем рассматривать изменения во времени значений ОАР вблизи датчика регистрации при условии напряженно-деформированного состояния. Сначала значения ОАР образуют некоторый фоновый уровень. В зависимости от выбранного периода наблюдений фоновый уровень испытывает суточные и/или сезонные вариации, однако всегда можно выбрать его некоторое среднее значение. Далее начиная с некоторого момента времени, включается напряжение геосреды, за счет которого происходит выход избыточного радона в ее поровое пространство в том числе и вблизи датчика регистрации. Этот процесс эквивалентен увеличению интенсивности эманирования радона в пористой среде. В результате происходит рост ОАР до некоторого момента времени. Далее происходит разгрузка напряжения до первоначального фонового уровня значений ОАР. Рост и разгрузка напряжений зависит от геолого-физических параметров, которые формируют функцию возмущения геосреды.

Математическая модель

Отметим, что математические модели для изучения динамики радона в рамках теории эманационного можно разделить на два основных типа: диффузионно-конвективные модели [24, 25], которые описывают пространственный перенос радона за счет механизмов диффузии и конвекции и динамические модели [21], которые описывают изменения во времени концентрации радона в некоторой точке геосреды. В настоящей работе мы будем рассматривать динамическую модель изменения концентрации радона в точке пористой геосреды, расположенной вблизи датчика регистрации.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{dC(t)}{dt} = -\lambda C(t) + q(t), \quad C(t_0) = C_0, \quad (1)$$

где $C(t)$ – концентрация радиоактивного компонента в пористой геосреде на единицу объема, к-во частиц/м³; $t \in [t_0, T]$ – время рассматриваемого процесса, t_0, T – начальный и конечный момент времени, с; $\lambda = 2,1 \cdot 10^{-6}$ – постоянная радиоактивного распада, с⁻¹; $q(t) = q_0 \cdot \exp(f(\sigma(t)))$ – функция источника радона, к-во частиц/(м³с), характеризует поступление радиоактивного компонента в ее напряженном состоянии, которое определяется функцией $f(\sigma(t))$, q_0 – интенсивность эманирования радиоактивного компонента в ненапряженном состоянии.

Замечание 1. Задачу Коши (1) можно переписать в терминах ОАР в силу того, что она обычно измеряется на пунктах регистрации радонового мониторинга. Для перехода к ОАР необходимо воспользоваться формулой [4]:

$$A(t) = \frac{\lambda C(t)}{\eta}, \quad (2)$$

где η – коэффициент пористости.

Поэтому умножая правую и левую части на уравнения (1) мы приходим к следующей задаче:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda A(t) + q_A(t), \quad A(t_0) = A_0, \quad (3)$$

где $q_A(t) = \lambda A_{\text{фон}} \cdot \exp(f(\sigma(t)))$, $A_{\text{фон}} = \frac{q_0}{\eta}$.

Решение задачи Коши (3) можно получить с помощью интегрального преобразования Лапласа [26] в виде:

$$A(t) = A(t_0)e^{-\lambda t} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} q_A(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Первое слагаемое в правой части (4) отвечает за влияние начального состояния системы, второе – за влияние напряженного состояния массива горных пород.

Замечание 2. Для функции $f(\sigma(t))$ в первом приближении можно выбрать такую зависимость $f(\sigma(t)) = a\sigma(t)$, следуя работе [20], где a – положительный коэффициент пропорциональности. Тогда скорость поступления радиоактивного компонента будет иметь вид:

$$q(t) = q_n \exp(a\sigma(t)). \quad (5)$$

Разложим экспоненту в формуле (5) в ряд Маклорена и возьмем его первые два слагаемых, т. е. линейная часть:

$$q_A(t) = q_n + a_1 \sigma(t), \quad a_1 = a q_n, \quad q_n = \lambda A_{\text{фон}}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в формулу (4), мы получим:

$$A(t) = A(t_0)e^{-\lambda t} + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} (q_n + a_1 \sigma(\tau)) d\tau. \quad (7)$$

Рассмотрим более внимательно второе слагаемое в уравнении (7):

$$\begin{aligned} A_{\sigma}(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} (q_n + a_1 \sigma(\tau)) d\tau = q_n \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + a_1 \int_{t_0}^t \sigma(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \\ &= \frac{q_n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + a_1 \int_{t_0}^t \sigma(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau. \quad (8) \end{aligned}$$

Тогда с учетом соотношения (8) решение (7) запишется так:

$$A(t) = A(t_0)e^{-\lambda t} + \frac{q_n}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + a_1 \int_{t_0}^t \sigma(\tau)e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau. \quad (9)$$

Здесь первое и второе слагаемые в правой части уравнения (9) определяет реакцию на нормальное состояние, а третье слагаемое характеризует изменение радона под действием напряжения.

Функцию напряжения (активации) $\sigma(t)$ в формуле (9) мы будем рассматривать в виде:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1(t)[H(t - t_n) - H(t - t_z)] + \sigma_2(t)[H(t - t_z)], \quad (10)$$

где $H(t - t_n) = \begin{cases} 1, & t \geq t_n \\ 0, & t < t_n \end{cases}$ – функция Хевисайда; σ_0 – положительная

константа, фоновое напряжение; $\sigma_1(t)$ – функция напряжения на стадии возникновения аномалии от начального момента времени t_n вплоть до максимального значения аномалии t_z ($t_n \leq t \leq t_z$), $\sigma_2(t)$ – функция напряжения после максимального значения аномалии ($t > t_z$) определяет её разгрузку.

Выбирая в функции активации (10), конкретный вид функций напряжений $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ мы будем получать отклик в динамики ОАР, который должен отображаться на расчетных кривых, полученных по формуле (9).

Найдем константу интегрирования $A(t_0)$ из начального условия (3). Для этого сначала рассмотрим более детально третье слагаемое в решении (9). Функцию активации (10) можно записать следующим образом:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0, & t \leq t_n \\ \sigma_0 + \sigma_1(t), & t_n \leq t \leq t_z \\ \sigma_0 + \sigma_2(t), & t_z \leq t \end{cases}. \quad (11)$$

Из функции (11), в силу того, что $t_0 \leq t_n$, следует, что интеграл в решении (9) для $t \leq t_n$ переходит в функцию: $\frac{a_1 \sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)})$. Поэтому решение (9) для $t \leq t_n$ будет следующим:

$$A(t) = A(t_0)e^{-\lambda t} + \frac{q_n + a_1 \sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}). \quad (12)$$

С учетом начального условия (3) при $t = t_0$ мы находим:

$$A(t_0) = A_0 e^{\lambda t_0}. \quad (13)$$

Окончательно решение (9) с учетом соотношения (13) можно записать в виде:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{q_n}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + a_1 \int_{t_0}^t \sigma(\tau)e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда в функции активации (11) функции напряжения выбраны так:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 + a, & t \leq t_n \\ \sigma_0 + ae^{b_1(t-t_n)}, & t_n \leq t \leq t_z \\ \sigma_0 + ae^{-b_2(t-t_z)}, & t_z \leq t \end{cases} \quad (15)$$

Пример графика функции активации (15) приведен на рис. 2.

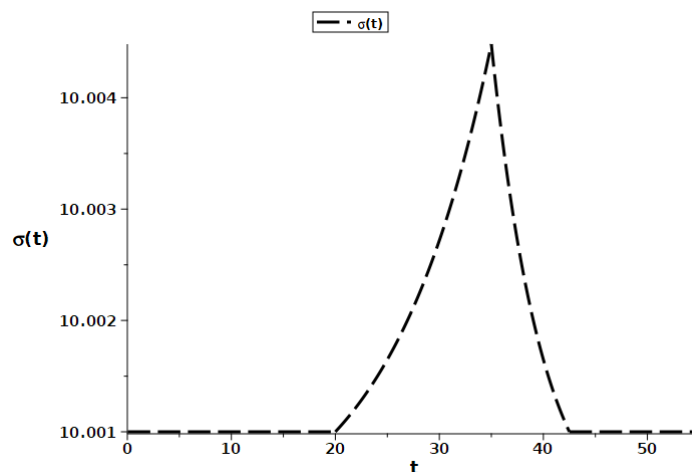


Рис. 2. Пример функция активации (15) при $\sigma_0 = 10$
 [Figure 2. Example activation function (15) at $\sigma_0 = 10$]

Для $t \leq t_n$ интеграл дает $\frac{a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)})$ или

$$A(t) = A_0e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{q_n + a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}). \quad (16)$$

Для $t_n \leq t \leq t_z$ интеграл дает $\frac{a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + \frac{aa_1e^{b_1t_z}}{\lambda+b_1}(e^{b_2(t-t_n)} - e^{-\lambda(t-t_n)})$ или

$$A(t) = A_0e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{q_n + a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + \frac{aa_1e^{b_1t_n}}{\lambda + b_1}(e^{b_1(t-t_n)} - e^{-\lambda(t-t_n)}). \quad (17)$$

Замечание 3. В силу того, что среднее время роста аномалии много больше среднего времени жизни радона, то $\tau_a = \frac{1}{b_1} \ll \tau_{Rn} = \frac{1}{\lambda}$ и $b_1 \gg \lambda$, тогда решение (17) можно упростить:

$$A(t) = A_0e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{q_n + a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + K_1e^{b_1(t-t_n)}, \quad K_1 = \frac{aa_1e^{b_1t_n}}{\lambda}. \quad (18)$$

Для $t \geq t_z$ интеграл дает $\frac{a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + \frac{aa_1e^{-b_2t_z}}{\lambda-b_2}(e^{-b_2(t-t_z)} - e^{-\lambda(t-t_z)})$ или

$$A(t) = A_0e^{-\lambda(t-t_0)} + \frac{q_n + a_1\sigma_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + K_2(e^{-b_2(t-t_z)} - e^{-\lambda(t-t_z)}), \quad (19)$$

где $K_2 = \frac{aa_1e^{-b_2t_z}}{\lambda-b_2}$.

Здесь для третьего слагаемого возможны случаи:

1. $b_2 \gg \lambda$ – напряжение снимается быстро, например, в течении суток:

$$\frac{a a_1 e^{-b_2 t_z}}{b_2} e^{\lambda t} \quad (20)$$

2. $b_2 \ll \lambda$ – напряжение снимается медленнее, чем распадается радон, например, в течении месяца и более:

$$\frac{a a_1 e^{-b_2 t_z}}{\lambda} e^{-b_2 t} \quad (21)$$

3. b_2 и λ – соизмеримые, то работает общая формула (19).

Замечание 4. Формуле (19) первое слагаемое уменьшается при больших временах, а второе увеличивается и выходит на асимптотику $K_0 = \frac{q_n + a_1 \sigma_0}{\lambda}$. Далее чтобы согласовать первую и вторую ветки решений при $t \leq t_n$ и при $t_n < t < t_z$ нужно учесть, что на границе $t = t_n$ значение ОАР $K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}$, поэтому выберем его за фоновый уровень. Для того, чтобы согласовать вторую и третью ветки решения на границе $t = t_z$.

Исходя из выше сказанного, решение задачи (3) можно записать так:

$$A(t) = \begin{cases} K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \leq t_n \\ K_0 + K_1 e^{b_1 t}, & t_n < t < t_z \\ K_0 + K_2 (e^{-b_2 t} - e^{-\lambda t}), & t_z \leq t < t_f \\ K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \geq t_f \end{cases} \quad (22)$$

Замечание 5. В решении (22) нужно обратить внимание на согласование второй и третьей ветки решения на границе $t = t_z$. Приравняв эти ветви на границе $t = t_z$ мы получаем условие согласования:

$$K_2 = \frac{K_1 e^{b_1 t_z}}{e^{-b_2 t_z} - e^{-\lambda t_z}} \quad (23)$$

Замечание 6. Для того, чтобы третья ветка решения переходила в фоновый уровень ОАР, нужно найти время t_f из трансцендентного уравнения:

$$e^{-b_2 t_f} - e^{-\lambda t_f} = \frac{K_1}{K_2} e^{b_1 t_n} \quad (24)$$

Частные случаи решения

При $b_2 \ll \lambda$

$$A(t) = \begin{cases} K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \leq t_n \\ K_0 + K_1 e^{-b_1 t}, & t_n < t < t_z \\ K_0 + K_3 e^{-\lambda t}, & t_z \leq t < t_f \\ K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \geq t_f \end{cases} \quad (25)$$

где условия согласования (25) имеет вид: $K_3 = K_1 e^{(\lambda+b_1)t_z}$, а время $t_f = \frac{\ln \frac{K_3}{K_1} - b_1 t_n}{\lambda}$.

При $b_2 \gg \lambda$

$$A(t) = \begin{cases} K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \leq t_n \\ K_0 + K_1 e^{-b_1 t}, & t_n < t < t_z \\ K_0 + K_4 e^{-b_2 t}, & t_z \leq t < t_f \\ K_0 + K_1 e^{b_1 t_n}, & t \geq t_f \end{cases}, \quad (26)$$

где $K_4 = K_1 e^{(b_2+b_1)t_z}$, $t_f = \frac{\ln(\frac{K_4}{K_1}) - b_1 t_n}{b_2}$.

Результаты моделирования

Результаты моделирования будет проводить в среде символьной математики Maple2021. Выберем следующие значения параметров: $\lambda = 0.18144 \text{ сут}^{-1}$, $t_n = 20 \text{ сут}$, $t_z = 35 \text{ сут}$, $b_1 = 0.35 \text{ сут}^{-1}$, $K_1 = 0.001$, $K_0 = 1000 \text{ Бк/м}^3$, $t_0 = 0$. Остальные параметры выбирались: для случая: $b_2 \gg \lambda$: $b_2 = 0.05 \text{ сут}^{-1}$, $K_2 = 1202.604284$, $t_f = 140 \text{ сут}$; для случая $b_2 \ll \lambda$: случай, когда b_2 и λ соизмеримы: $b_2 = 2 \text{ сут}^{-1}$, $K_2 = 119688.1299$, $t_f = 64 \text{ сут}$; $b_2 = 0.1$, $K_2 = 7345.219127$, $t_f = 88 \text{ сут}$.

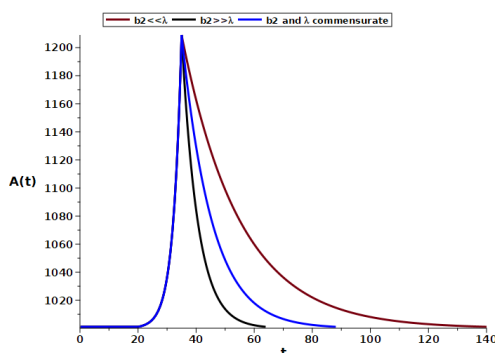


Рис. 3. Расчетные кривые ОАР: случай $b_2 \gg \lambda$ (черная кривая) по формуле (25); случай $b_2 \ll \lambda$ (красная кривая) по формуле (26); случай, когда b_2 и λ соизмеримые по формуле(22).

[Figure 3. Calculated curves of radon volume activity: case $b_2 \gg \lambda$ (black curve) according to the formula (25); case $b_2 \ll \lambda$ (red curve) according to the formula (26); the case when b_2 and λ are commensurate according to the formula(22).]

На рис.3 приведены расчетные кривые ОАР, полученные по формулам (22) – (26). Мы видим, что форма расчетных кривых на рис. 2 похожа на форму аномалий в почвенном радоне, представленной на рис. 1(в), которая предшествовала землетрясению в районе Авачинского залива 20 марта 2016 г. с $M=6.4$.

На форму расчетных кривых на рис.3 в процессе разгрузки напряжений играет роль параметр b_2 , чем меньше значения этого параметра, тем медленнее происходит разгрузка напряжения. Это также следует из оценки среднего времени разгрузки напряжения, которое можно определить из соотношения $\tau = 1/b_2$.

Интересно отметить, что при увеличении времени начала аномалии $t_n = 25$ сут, уменьшается время выхода на фоновый уровень для трех случаев (рис. 4): $b_2 \gg \lambda$ – 54.3 сут, $b_2 \ll \lambda$ – 105 сут, когда b_2 и λ соизмеримые – 70.6 сут.

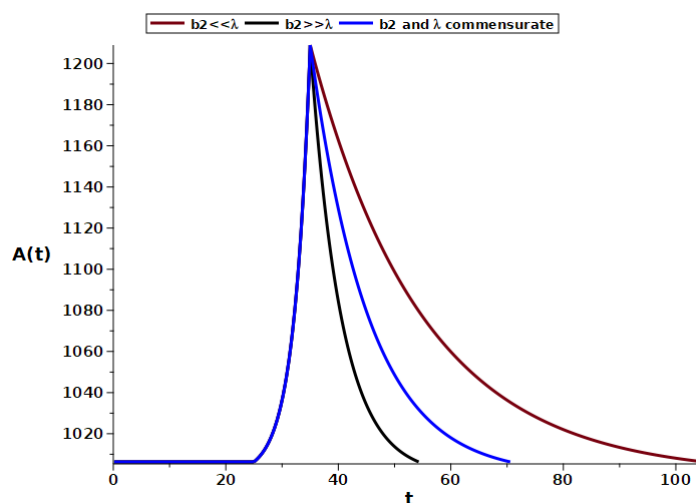


Рис. 4. Расчетные кривые ОАР, построенные при значении $t_n = 25$ сут, остальные параметры остались неизменными как на рис.2.

[Figure 4. The calculated curves of radon volume activity, plotted at a value of $t_n = 25$ days, the remaining parameters remained unchanged as in Fig.2.]

Заключение

В статье показано, что с помощью математического и компьютерного моделирования можно исследовать аномалии в динамике радона, которые могут предшествовать сейсмическим событиям. В частности, показано, что аномалии, возникающие в поле почвенного радона (рис.1в), могут быть описаны с помощью, предложенной математической модели (1) с функцией напряжения (15). Дальнейшее развитие исследований заключается в выборе других функций напряжения (10) для описания аномалий (рис.1а) и (рис.1б). Далее будет проведено уточнение параметров модели согласно экспериментальным данным по радоновому мониторингу, проводимому на Камчатке. Будет доработан программный комплекс на языке C++. Другое направление работы связано с разработкой новых математических моделей динамики радона в рамках неклассической теории эманационного метода и проведение сопоставление с ранее полученными результатами и экспериментальными данными [25, 27].

Список литературы


1. Рудаков В. П. *Эманационный мониторинг геосред и процессов*. М.: Научный мир, 2009. 176 с.
2. Граммаков А. Г., Никонов А. И., Тарфеев Г. П. *Радиометрические методы поисков и разведки урановых руд*. М.: Госгеолтехиздат, 1957. 610 с.
3. Новиков Г. Ф., Капков Ю. Н. *Радиоактивные методы разведки*. Л.: Недра, 1965. 759 с.

4. Новиков Г. Ф. *Радиометрическая разведка*. Л.: Недра, 1989. 407 с.
5. Паровик Р.И. *Математические модели классической теории эманационного метода*. г. Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2014. 128 с.
6. Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview // *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2002. vol. 129, pp. 185-204.
7. Цапалов А. А. Результаты долговременных исследований закономерностей поведения ОА и ЭРОА радона в зданиях московского региона // *АНРИ*, 2011. Т. 61, №3, С. 52–64.
8. Nunes L. J. R., Curado A, Lopes S. I. The Relationship between Radon and Geology: Sources, Transport and Indoor Accumulation // *Appl. Sci.*, 2023. vol. 13, pp. 7460 DOI: 10.3390/app13137460.
9. Su C., Wang M., Yin Y., Sun C., Zou Z., Wang H., Dai Y. Approaches to Estimating Indoor Exposure to Radon — A Systematic Review // *Atmosphere*, 2025. vol. 16, pp. 286 DOI: 10.3390/atmos16030286.
10. Nunes L. J. R., Curado A. The Harmonization of Radon Exposure Mitigation for the Sustainability of Buildings: Assessing the Impact of the EURATOM Directive on European Legislation // *Buildings*, 2025. vol. 15, pp. 618 DOI: 10.3390/buildings15040618.
11. Булашевич Ю. П., Уткин В. И., Юрков А. К., Николаев В. В. Изменение концентрации радона как предвестник горных ударов в глубоких шахтах // *Горный журнал*, 1996. №6, С. 19 – 22.
12. Moshupya P. M., Mohuba S. C., Abiye T. A., Korir I., Nhleko S. Indoor Radon Monitoring in Residential Areas in the Vicinity of Coal Mining Operations in the Mpumalanga Province, South Africa // *Atmosphere*, 2025. vol. 16, pp. 290 DOI: 10.3390/atmos16030290.
13. Montiel-López D., Molina S., Galiana-Merino J. J., Gómez I., Kharazian A. Soler-Llorens J. L., Huesca-Tortosa J. A., Guardiola-Villora A., Ortuño-Sáez G. Spatio-Temporal Correlation Between Radon Emissions and Seismic Activity: An Example Based on the Vrancea Region (Romania) // *Sensors*, 2025. vol. 25, pp. 933 DOI: 10.3390/s25030933.
14. Tverdyi D., Makarov E., Parovik, R. Estimation of Radon Flux Density Changes in Temporal Vicinity of the Shipunskoe Earthquake with $M_w = 7.0$, 17 August 2024 with the Use of the Hereditary Mathematical Model // *Geosciences*, 2025. vol. 15, pp. 30 DOI: 10.3390/geosciences15010030.
15. Gulan L. Analysis of Long-Term Monitoring of Radon Levels in a Low-Ventilated, Semi-Underground Laboratory—Dose Estimation and Exploration of Potential Earthquake Precursors // *Atmosphere*, 2024. vol. 15, pp. 1534 DOI: 10.3390/atmos15121534.
16. Фирстов П. П. Мониторинг объемной активности подпочвенного радона (^{222}Rn) на Паратунской геотермальной системе в 1997-1998 гг. с целью поиска предвестников сильных землетрясений Камчатки // *Вулканология и сейсмология*, 1999. №6, С. 22 – 31.
17. Фирстов П. П., Макаров Е. О. Реакция подпочвенного и растворенного в подземных водах радона на изменение напряженно-деформированного состояния земной коры // *Сейсмические приборы*, 2015. Т. 51, №4, С. 58 – 80.
18. Фирстов П. П., Макаров Е. О. *Динамика подпочвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения*. П.-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга, 2018. 147 с.
19. Каткова Г. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Компьютерная программа для моделирования аномальных вариаций объемной активности радона на основе механизма его инъекции в поток грунтовых вод // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2022. Т. 40, №3, С. 165 – 178 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-165-178.
20. Дубинчук В. Т. Анализ возможностей использования гидрохимических предвестников землетрясений // *Водные ресурсы*, 1983. №5, С. 130 – 136.
21. Гудзенко В. В., Дубинчук В. Т. *Изотопы радия и радон в природных водах*. М.: Наука, 1987. 45 с.
22. Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes / Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption, 1991 / Proceedings of an Advisory Group Meeting held in Vienna (9-12 September), pp. 6 – 22.
23. Сковпень Г. А. Программа для моделирования аномальных вариаций объёмной активности радона на основе механизма его инъекции в поток грунтовых вод; №2022686131: заявл. 21.12.2022; опубл. 09.01.2023 // *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2023610264 РФ*. ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга».


24. Паровик Р.И. Модель нестационарной диффузии-адвекции радона в системе грунт-атмосфера // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2010. № 1(1), С. 39 – 45.
25. Паровик Р.И., Шевцов В.М. Процессы переноса радона в средах с фрактальной структурой // *Математическое моделирование*, 2009. Т. 21, № 8, С. 30–36.
26. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
27. Паровик Р.И. *Математическое моделирование неклассической теории эманационного метода*. П.-Камчатский: КамГУ им. В. Беринга, 2014. 80 с.

Информация об авторах



Сковпень Глафира Андреевна ✉ – аспирант кафедры информатики и математики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия
 ORCID 0000-0002-9781-7249.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия
 ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

- [1] Rudakov V., P. Emanation monitoring of geomediums and processes. M.: Scientific World, 2009, pp. 176 (In Russian)
- [2] Grammakov A., G., Nikonov A., I., Tarfeev G., P. Radiometric methods of prospecting and exploration of uranium ores, Gosgeoltekhizdat, 1957 pp. 610 (In Russian)
- [3] Novikov G., F., Kapkov Yu., N. Radioactive exploration methods. L.: Mineral resources, 1965, pp. 759 (In Russian)
- [4] Novikov G. F. Radiometric intelligence. L.: Mineral resources, 1989, pp. 407 (In Russian)
- [5] Parovik R. I. Mathematical models of the classical theory of the emanation method. Petropavlovsk-Kamchatsky: Kamchatka State University named after Vitus Bering, 2014, pp. 128 (In Russian)
- [6] Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2002, vol. 129, pp. 185-204
- [7] Tsapalov A., A. The results of long-term studies of the patterns of behavior of OA and EROA radon in buildings of the Moscow region. *HENRI*, 2011, vol. 61, no 3, pp. 52-64 (In Russian)
- [8] Nunes L. J. R., Curado A, Lopes S. I. The Relationship between Radon and Geology: Sources, Transport and Indoor Accumulation. *Appl. Sci.*, 2023, vol. 13, pp. 7460, DOI: 10.3390/app13137460
- [9] Su C., Wang M., Yin Y., Sun C., Zou Z., Wang H., Dai Y. Approaches to Estimating Indoor Exposure to Radon — A Systematic Review. *Atmosphere*, 2025, vol. 16, pp. 286 DOI: 10.3390/atmos16030286
- [10] Nunes L. J. R., Curado A. The Harmonization of Radon Exposure Mitigation for the Sustainability of Buildings: Assessing the Impact of the EURATOM Directive on European Legislation. *Buildings*, 2025, vol. 15, pp. 618 DOI: 10.3390/buildings15040618
- [11] Bulashevich Yu. P., Utkin V. I., Yurkov A. K., Nikolaev V. V. Change in radon concentration as a harbinger of mining impacts in deep mines. *Mining Journal*, 1996, no 6, pp. 19 – 22 (In Russian)
- [12] Moshupya P. M., Mohuba S. C., Abiye T. A., Korir I., Nhleko S. Indoor Radon Monitoring in Residential Areas in the Vicinity of Coal Mining Operations in the Mpumalanga Province, South Africa. *Atmosphere*, 2025, vol. 16, pp. 290 DOI: 10.3390/atmos16030290
- [13] Montiel-López D., Molina S., Galiana-Merino J. J., Gómez I., Kharazian A. Soler-Llorens J. L., Huesca-Tortosa J. A., Guardiola-Villora A., Ortuño-Sáez G. Spatio-Temporal Correlation Between Radon Emissions and Seismic Activity: An Example Based on the Vrancea Region (Romania). *Sensors*, 2025, vol. 25, pp. 933 DOI: 10.3390/s25030933
- [14] Tverdyi D., Makarov E., Parovik, R. Estimation of Radon Flux Density Changes in Temporal Vicinity of the Shipunskoe Earthquake with $M_w = 7.0$, 17 August 2024 with the Use of the Hereditary Mathematical Model. *Geosciences*, 2025, vol. 15, pp. 30 DOI: 10.3390/geosciences15010030 (In Russian)
- [15] Gulan L. Analysis of Long-Term Monitoring of Radon Levels in a Low-Ventilated, Semi-Underground Laboratory—Dose Estimation and Exploration of Potential Earthquake Precursors. *Atmosphere*, 2024, vol. 15, pp. 1534 DOI: 10.3390/atmos15121534
- [16] Firstov P., P. Monitoring of the volume activity of subsurface radon (^{222}Rn) at the Paratunskaya geothermal system in 1997-1998 in order to search for precursors of strong earthquakes in Kamchatka. *Volcanology and seismology*, 1999, no 6, pp. 22 – 31 (In Russian)
- [17] Firstov P., P., Makarov E., O. The reaction of subsurface and dissolved radon in groundwater to changes in the stress-strain state of the Earth's crust. *Seismic instruments*, 2015, vol. 51, no 4, pp. 58 – 80 (In Russian)

- [18] Firstov P.,P., Makarov E.,O. Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes. P.-Kamchatki: KamGU named after Vitus Bering, 2018, pp. 147 (In Russian)
- [19] Katkova G. A., Makarov E. O., Parovik R. I. A computer program for modeling abnormal variations in the volumetric activity of radon based on the mechanism of its injection into the groundwater stream. Bulletin of KRAUNTS. Physical and mathematical sciences., 2022, vol. 40, no ,3, pp. 165 – 178 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-165-178 (In Russian)
- [20] Dubinchuk V.,T. Analysis of the possibilities of using hydrochemical precursors of earthquakes. Water resources, 1983, no 5, pp. 130 – 136 (In Russian)
- [21] Gudzenko V. V., Dubinchuk V. T. Isotopes of radium and radon in natural waters. M.: Science, 1987, pp. 45 (In Russian)
- [22] Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes / Isotopic geochemical precursors of earthquakes and volcanic eruption Proceedings of an Advisory Group Meeting held in Vienna, 9-12 September, Proceedings of an Advisory Group Meeting held in Vienna, 1991, pp. 6 – 22
- [23] Skovpen G. A. A program for modeling abnormal variations in radon volume activity based on the mechanism of its injection into a groundwater stream: 2022686131: published on 12/21/2022: published on 01/9/2023. Certificate of state registration of a computer program 2023610264 RF. «Vitus Bering Kamchatka State University» (In Russian)
- [24] Parovik R. I. paper Model of unsteady diffusion-advection of radon in the soil-atmosphere system, Bulletin of KRAUNTS. Physical and mathematical sciences, 2010, no1(1), pp. 39 – 45 (In Russian)
- [25] Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transport processes in media with fractal structure. Mathematical modeling, 2009, vol. 21, no 8, pp. 30–36 (In Russian)
- [26] Ditkin V.,A., Prudnikov A.,P. Handbook of Operational Calculus. M.: Higher School, 1965, pp. 466 (In Russian)
- [27] Parovik R. I. Mathematical modeling of the nonclassical theory of the emanation method(In Russian)

Information about the authors



Skovpen Glafira Andreevna ✉ – postgraduate student of the Department of Computer Science and Mathematics, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia
ORCID 0000-0002-9781-7249.



Parovik Roman Ivanovich ✉ – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher at the Laboratory of Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia,
ORCID 0000-0002-1576-1860.