Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 50. №1. С. 39 - 61. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-39-61

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

Посвящается памяти профессора А.К. Уринова

Об одной краевой задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа

И. У. Хайдаров[1*], Р. Т. Зуннунов[2,3,4]

[1] Ферганский государственный университет, 150100, Фергана, улица Мураббийлар, 19, Узбекистан

[2] Филиал Российского государственного университета нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина в г. Ташкенте, 100125, г. Ташкент, улица Дурмон йули, 34, Узбекистан

[3] Институт математики имени В.И. Романовского АН РУЗ., 100125, г. Ташкент, улица Университет, 9, Узбекистан

[4] Международный Университет Нордика, 100043, г. Ташкент, улица Бунедкор, 8/2, Узбекистан

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача со смещением для параболо-гиперболического уравнения, содержащее спектральный параметр и характеризующееся наличием двух взаимно перпендикулярных линий изменения типа. Область, в которой исследуется уравнение, состоит из подобластей, в каждой из которых уравнение изменяет тип — параболический в одних частях и гиперболический в других, что делает задачу особенно интересной и сложной в аналитическом плане. Кроме того, учтено наличие разрыва в коэффициентах уравнения, что обуславливает применение специального подхода при формулировке условий склеивания на границах областей различных типов. Целью работы является постановка и обоснование корректности (существования и единственности решения) краевой задачи со смещением в сложной геометрической области при произвольном вещественном значении спектрального параметра λ. При исследованияи поставленной задачи авторы используют метод интегральных преобразований и теории операторов, включая интегральные и интегро-дифференциальные операторы типа $A^{n,\lambda}_{mx}$, $B^{n,\lambda}_{mx}$, $C^{n,\lambda}_{mx}$, свойства которых играют ключевую роль в анализе задачи. Показано, что исходную задачу можно свести к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывными ядрами, разрешимость которых устанавливается с помощью теоремы, альтернативы Фредгольма. Доказывается, что решение задачи можно представить в виде явных интегральных формул с использованием функций Бесселя и специальных ядер, описывающих поведение решения в различных частях области. При этом существенную роль играют условия согласования, обеспечивающие корректное склеивание решений в линиях изменения типа уравнения и по линии разрыва коэффициентов.

Ключевые слова: уравнение параболо-гиперболического типа; краевая задача со смещением; линии изменения типа; спектральный параметр; интегральные уравнения Фредгольма; нелокальные условия; функции Бесселя-Клиффорда; корректность задачи; интегральные и интегро-дифференциальные операторы.

Получение: 31.03.2025; Исправление: 14.04.2025; Принятие: 17.04.2025; Публикация онлайн: 18.04.2025

Для цитирования. Хайдаров И. У., Зуннунов Р. Т. Об одной краевой задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 50. № 1. С. 39-61. EDN: RFEXMO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-39-61.

Финансирование. Второй автор поддержан грантом Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан № Ф-ФА-2021-424.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: ibrohim0902@gmail.com

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Хайдаров И. У., Зуннунов Р. Т., 2025

© ИКИР ДВО РАН, 2025 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 50. no. 1. P. 39 - 61. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-39-61

Research Article

Full text in Russian

MSC 35M10, 35M12

Dedicated to the memory of Professor A. K. Urinov

On a Nonlocal Boundary Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation with Two Perpendicular Lines of Type Change

I. U. Khaydarov[1*], R. T. Zunnunov[2,3,4]

[1] Fergana State University, 150100, Fergana, Murabbiylar street, 19, Uzbekistan

[2] Branch of the Russian State University of Oil and Gas (NRU) named after I.M. Gubkin in Tashkent, 100125, Tashkent, Durmon yuli street, 34, Uzbekistan

[3] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University street, 9, Uzbekistan

[4] International Nordic University, 100043, Tashkent, Bunyodkor street, 8/2, Uzbekistan

Abstract. The paper addresses a boundary value problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation involving a spectral parameter and characterized by the presence of two mutually perpendicular lines of type change. The domain under consideration is composed of subdomains in which the equation changes type—being parabolic in some regions and hyperbolic in others—making the problem particularly interesting and analytically challenging. Additionally, the equation includes discontinuous coefficients, which necessitates a special formulation of the transmission (gluing) conditions at the interfaces between regions of different types. The study aims to formulate and justify the well-posedness (existence and uniqueness of the solution) of the boundary value problem with a shift in a complex geometrical domain for an arbitrary real value of the spectral parameter λ. The authors employ the method of integral transforms and operator theory, including integral and integro-differential operators of the form $A^{n,\lambda}_{mx}$, $B^{n,\lambda}_{mx}$, and $C^{n,\lambda}_{mx}$, whose properties play a key role in the analysis. It is shown that the original problem can be reduced to an equivalent system of Fredholm integral equations of the second kind with continuous kernels. The solvability of this system is established using the Fredholm alternative theorem. Furthermore, it is demonstrated that the solution can be represented explicitly in terms of integral formulas involving Bessel functions and special kernels that capture the behavior of the solution in various parts of the domain. Matching conditions play a crucial role in ensuring the correct joining of solutions across regions where the type of the equation changes and along the line of coefficient discontinuity.

Key words: parabolic-hyperbolic type equation; boundary value problem with a shift; lines of type change; spectral parameter; Fredholm integral equations; nonlocal conditions; Bessel-Clifford functions; well-posedness of the problem; integral and integro-differential operators.

Received: 31.03.2025; Revised: 14.04.2025; Accepted: 17.04.2025; First online: 18.04.2025

For citation. Khaydarov I. U., Zunnunov R. T. On a nonlocal boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with two perpendicular lines of type change. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **50**: 1, 39-61. EDN: RFEXMO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-39-61.

Funding. The second author was supported by a grant from the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan No. F-FA-2021-424.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence: E-mail: ibrohim0902@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Khaydarov I. U., Zunnunov R. T., 2025

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2025 (original layout, design, compilation)

Введение

Началом нового важного этапа в развитии теории краевых задач для уравнений эллиптического, гиперболического и смешанного типов стали “нелокальные задачи”, т.е задачи с нелокальными краевыми условиями, общее определение и классификация которых даны в работе [1].

К таким задачам, прежде всего, относятся задачи типа Бицадзе-Самарского, впервые предложенные в 1969 году А.В. Бицадзе и А.А. Самарским [2]. В этих задачах нелокальные условия связывают значения искомого решения в граничных и внутренних точках области рассмотрения уравнения. Изучению таких задач посвящены многочисленные работы, среди которых отметим работы [3–5] и др.

К нелокальным задачам относятся также “задачи со смещением”, предложенные А.М. Нахушевым в 1969 году [6]. В этих задачах нелокальные условия связывают значения искомой функции или ее производной (вообще говоря, дробного порядка, зависящие от порядка вырождения уравнения), принимаемых на гиперболической части границы области рассмотрения. Такие задачи являются обобщением задачи Трикоми, а так же содержат широкий класс локальных краевых задач для уравнений смешанного типа и возникают при изучении различных вопросов прикладного характера, например, вопросов математической биологии, прогнозирования почвенной влаги, математического моделирования процессов излучения лазера, проблем физики плазмы и т.д. Поэтому эти задачи вызвали широкий интерес многих исследователей, в том числе учеников А.М. Нахушева, М.С. Салахитдинова и Т.Д. Джураева.

В большинстве работ, где изучены задачи со смещением для уравнений смешанного типа, рассмотрены модельные уравнения или линейные уравнения со специально подобранными коэффициентами при младших производных. Более того, А.М. Нахушевым в 1970 году доказано [7], что коэффициенты уравнения при младших членах существенно влияют на постановку и исследование краевых задач со смещением. В с [6], при постановке задач со смещением для уравнения колебаний струны использован оператор $sign\,(x-a)\,(d/dx)$, а в случае уравнений

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{2}$$

- операторы дробного дифференцирования D^{α}_{ax}.

Обширную библиографию в этом направлении можно найти в [8–10].

Следовательно, можно ожидать, что при постановке и исследовании задач со смещением для уравнений с младшими членами возникают операторы более сложной структуры. Видимо, поэтому малоизученными остались задачи со смещением для уравнений смешанного типа с младшими членами.

Из всего вышеизложенного возникает естественный вопрос: можно ли исследовать задачи со смещением и задачи типа Бицадзе-Самарского для уравнений со спектральным параметром, а также вопросы о спектре таких задач для уравнений смешанного типа. Монография М.С. Салахитдинова и А.К.

Уринова [11] посвящена изучению этих вопросов на примере уравнений смешанного (эллиптико-гиперболического типа)

$$\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = const > 0, \tag{4}$$

где λ - заданный, вообще говоря комплексный параметр.

При постановке и исследовании краевых задач для этих уравнений в ограниченных областях использованы свойства следующих интегральных и интегро-дифференциальных операторов, введенных и изученных в этой монографии:

$$A_{mx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) - \int\limits_m^x f(t)\left(\frac{t-m}{x-m}\right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0[\lambda\sqrt{(x-m)(x-t)}\,]dt, \tag{5}$$

$$B_{mx}^{n,\lambda}[f(x)] \equiv f(x) + \int\limits_m^x f(t)\left(\frac{x-m}{t-m}\right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial x} J_0[\lambda\sqrt{(t-m)(t-x)}\,]dt, \tag{6}$$

$$C_{mx}^{0,\lambda}[g(x)] \equiv \operatorname{sign}(x-m)\left\{\frac{d}{dx}g(x) + \frac{1}{2}\lambda^2 \int\limits_m^x g(t)\bar{J}_1[\lambda(x-t)]\,dt\right\}, \tag{7}$$

$$C_{sx}^{1,\lambda}[f(x)] \equiv \frac{1}{\Gamma(2\beta)}\frac{d}{dx}\int\limits_s^x f(t)|x-t|^{2\beta-1}\bar{J}_\beta[\lambda(x-t)]\,dt +$$

$$+ \frac{\lambda^2 \operatorname{sign}(x-s)}{2(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)}\int\limits_s^x f(t)|x-t|^{2\beta}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-t)]\,dt, \tag{8}$$

где $f(x)$ - функция, определенная в (a,b), а $s \in [a,b]$; $\beta = m/(2m+4)$, причем в силу $m > 0$ справедливо неравенство $0 < \beta < 1/2$; $n = \overline{0,1}$. Здесь $\bar{J}_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha}J_\alpha(z)$ - функция Бесселя-Клиффорда, где $J_\alpha(z)$ - функция Бесселя первого рода порядка α, $\Gamma(z)$ - гамма-функция Эйлера [12].

При рассмотрении операторов $A_{sx}^{n,\lambda}$ и $B_{sx}^{n,\lambda}$ предположим, что $f(x) \in C(a,b) \cap L[a,b]$, а в случае оператора $C_{sx}^{1,\lambda}$ предполагаем что $f(x) \in C^{(0,\alpha)}(a,b) \cap L[a,b]$ $(\alpha > 1-2\beta)$. При таких предположения относительно функции $f(x)$ выражения $A_{sx}^{n,\lambda}[f(x)]$, $B_{sx}^{n,\lambda}[f(x)]$ и $C_{sx}^{1,\lambda}[f(x)]$ будут определены в (a,b) и принадлежать классу $C(a,b)$.

Для приведенных выше операторов имеют место следующие теоремы [11], которые используются при получении основных функциональных соотношений для исследования краевых задач:

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C(a,b) \cap L(a,b)$, *то для любых* $m \in [a,b]$ *и* $x \in (a,b)$ *справедливы следующие равенства:*

$$A_{mx}^{n,\lambda}\left\{B_{mx}^{n,\lambda}[f(x)]\right\} = f(x), \quad B_{mx}^{n,\lambda}\left\{A_{mx}^{n,\lambda}[f(x)]\right\} = f(x). \tag{9}$$

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C(a,b) \cap L(a,b)$, *то для любых* $m \in [a,b]$ *и* $x \in (a,b)$ *имеет место равенство*

$$A^{0,\lambda}_{mx}\left\{\int\limits_m^x B^{1,\lambda}_{mt}\left[f(t)\right]dt\right\} = \int\limits_m^x f(t)J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt. \tag{10}$$

Теорема 3. *Если* $f(x) \in C^1(a,b) \cap L(a,b)$, *то для любых* $m \in [a,b]$ *и* $x \in (a,b)$ *справедливо равенство*

$$A^{1,\lambda}_{mx}\left\{\frac{d}{dx}B^{0,\lambda}_{mx}[f(x)]\right\} = \mathrm{sign}(x-m)\cdot C^{0,\lambda}_{mx}\left[f(x)\right]. \tag{11}$$

Теорема 4. *Если* $f(x) \in C^1(a,b) \cap L(a,b)$, *то для любых* $k, \lambda = \mathrm{const}$ *и* $x \in (a,b)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_k^x f(t)\,J_0\left[\lambda_2\sqrt{(t-k)(t-x)}\right]dt = \int\limits_k^x B^{1,\lambda}_{kx}\left[f(t)\right]dt. \tag{12}$$

Нелокальные краевые задачи для уравнения (4) в неограниченных смешанных областях, рассмотрены, например, в работах [13–16].

Данная работа является продолжением исследований в этом направлении для уравнения смешанного (параболо-гиперболического) типа.

Постановка задачи

Пусть G – конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная отрезками: $AA^* = \{(x,y) : x-y=1, 0 \le x \le 1\}$, $A^*E^* = \{(x,y) : y=-1, -1 \le x \le 0\}$, $E^*B^* = \{(x,y) : x=-1, -1 \le y \le 0\}$, $B^*B = \{(x,y) : x-y=-1, 0 \le y \le 1\}$, $BE = \{(x,y) : y=1, 0 \le x \le 1\}$, $EA = \{(x,y) : x=1, 0 \le y \le 1\}$.

Введем обозначения: $D = G \cap (x+y>0)$, $G_0 = D \cap (x>0) \cap (y>0)$, $G_1 = D \cap (y<0)$, $G_2 = D \cap (x<0)$, D^* и G_0^*, G_1^*, G_2^* – области, симметричные к областям D и G_0, G_1, G_2 соответственно относительно отрезка $MK = \{(x,y) : x+y=0, -1 \le x \le 1\}$;

$$\theta_0(t) = \theta_0(t/2, -t/2), \quad \theta_1(t) = \theta_1((t+1)/2, (t-1)/2),$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(-t/2, t/2), \quad \theta_3(t) = \theta_3((t-1)/2, (t+1)/2).$$

Рассмотрим уравнение

$$L_3 u(x,y) = 0, \tag{13}$$

в области G где

$$L_3 \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - H(-xy)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - H(xy)\dfrac{\partial}{\partial y} - \lambda^2(\mathrm{sign}\,y) & \text{в } D \setminus (xy=0), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - H(-xy)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + H(xy)\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda^2(\mathrm{sign}\,x) & \text{в } D^* \setminus (xy=0), \end{cases}$$

λ— заданное действительное число, а $H(z)$— функция Хевисайда.

Уравнение (9) в области G принадлежит смешанному типу, а именно: в областях G_0, G_0^* – параболическому типу, а в областях G_j, $G_j^*, j = \overline{1,2}$ – гиперболическому типу. Отрезки $B^*A = \{(x,0) : -1 < x < 1\}$ и $A^*B = \{(0,y) : -1 < y < 1\}$ являются линиями изменения типа, а MK— линией разрыва последнего коэффициента уравнения.

Под регулярным в области $D(D^*)$ решением уравнения (9) будем понимать функцию

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(G_0) \cap C^{2,2}_{x,y}(G_1 \cup G_2) \quad \left[u(x,y) \in C(\overline{D^*}) \cap C^{1,2}_{x,y}(G_0^*) \cap C^{2,2}_{x,y}(G_1^* \cup G_2^*)\right],$$

удовлетворяющую в областях G_0, G_1 и G_2 (G_0^*, G_1^* и G_2^*) уравнению (9), а на линиях изменения типа – непрерывным условиями склеивания: $u(t,+0) = u(t,-0)$, $u(+0,t) = u(-0,t)$, $0 \le t \le 1$ $(-1 \le t \le 0)$, $u_y(t,+0) = u_y(t,-0)$, $u_x(+0,t) = u_x(-0,t)$, $0 < t < 1$ $(-1 < t < 0)$ и такую, что функции $u_x(t,0)$, $u_y(t,0)$, $u_x(0,t)$ и $u_y(0,t)$ ограничены при $t \to 0$ и $t \to 1$ $(t \to -1$ и $t \to 0)$.

Задача H. Требуется найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\bar{D}, \bar{D}^*\right) \cap C^1(G \backslash MK)$ является регулярным в областях D и D^* решением уравнения (9);

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{\overline{AE}} = \varphi(y), \quad 0 \le y \le 1, \tag{14}$$

$$u|_{\overline{A^*E^*}} = \varphi^*(x), \quad -1 \le x \le 0, \tag{15}$$

$$a_1(y) A^{0,\lambda}_{0y}\{u[\theta_2(y)]\} + b_1(y) A^{0,\lambda}_{-1y}\{u[\theta_1(y)]\} + c_1(y) u(0,y) = d_1(y), \ (0,y) \in \overline{A^*O}, \tag{16}$$

$$a_2(y) A^{0,\lambda}_{0y}\{u[\theta_2(y)]\} + b_2(y) A^{0,\lambda}_{1y}\{u[\theta_3(y)]\} + c_2(y) u(0,y) = d_2(y), \quad (0,y) \in \overline{OB}, \tag{17}$$

где $q \ne 0$ – заданное число, а $\varphi(y)$, $\varphi^*(x)$, $p_j(t)$, $a_j(y)$, $b_j(y)$, $c_j(y)$, $d_j(y)$ $\left(j = \overline{1,2}\right)$ – заданные функции, причем $\varphi(y)$, $\varphi^*(x)$ – непрерывно дифференцируемые, а $p_j(t)$, $a_j(y)$, $b_j(y)$, $c_j(y)$, $d_j(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые в замыкании своих областей определения функции и $a^2_j\left([(-1)^j y]\right) + b^2_j\left([(-1)^j y]\right) + c^2_j\left([(-1)^j y]\right) \ne 0$, $\forall y \in [0,1]$ $j = \overline{1,2}$; $A^{0,\lambda}_{0y}$ и $A^{0,\lambda}_{1y}$ – операторы, определенные формулами (1).

От заданных функций потребуем, чтобы

$$b_j(0) = 0, \quad a_j[(-1)^j] = 0, \quad j = \overline{1,2}; \quad a_1(y) \ne b_1(y), \ y \in [-1,0];$$

$$\left.\begin{aligned} d_2(0)[a_2(0) + c_2(0)]^{-1} - q d_1(0)[a_1(0) + c_1(0)]^{-1} = p_1(0) = p_2(0), \\ d_1(-1)[b_1(-1) + c_1(-1)]^{-1} = \varphi^*(0); \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\alpha_j(x) \ne 0, \ \beta'_j(x) \le 0, \gamma'_j(x) \ge 0, \forall x \in [0,1], j = \overline{1,2}, \tag{19}$$

где

$$\alpha_j(x) = a_j\left[(-1)^j x\right] + b_j\left[(-1)^j x\right] + 2c_j\left[(-1)^j x\right],$$

$$\beta_j(x) = a_j\left[(-1)^j x\right]/\alpha_j(x), \quad \gamma_j(x) = b_j[(-1)^j x]/\alpha_j(x).$$

При исследование задачи H существенно используется задача Г, об определении регулярного в области D решения уравнения (9), удовлетворяющее условиям (10), (13) и

$$a_1(-x)\,A_{0x}^{0,\lambda}\{u[\theta_0(x)]\}+b_1(-x)\,A_{1x}^{0,\lambda}\{u[\theta_1(x)]\}+c_1(-x)\,u(x,0)=d_0(x),\ \ (x,0)\in OA, \tag{20}$$

где $d_0(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Отметим, что задача H при $\lambda=0$ изучена в работе [17]. В данной задаче докажем однозначную разрешимость задачи H для произвольного действительного λ. Задачи, аналогичные задаче H, для одного уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа со спектральным параметром, поставлены и исследованы в работах [18–22].

Отметим, также что в работе [9] для уравнения (9) в области D рассмотрены некоторые локальные краевые задачи, а в работах [24], [25] – нелокальные краевые задачи типа Г.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи Г. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
&\tau_1(t)=u(t,0),\ \tau_2(t)=u(0,t),\ 0\le t\le 1;\\
&\tau_1^*(t)=u(t,0),\ \tau_2^*(t)=u(0,t),\ -1\le t\le 0;\\
&\nu_1(t)=u_y(t,0),\ \nu_2(t)=u_x(0,t),\ 0<t<1;\\
&\nu_1^*(t)=u_y(t,0),\ \nu_2^*(t)=u_x(0,t),\ -1<t<0.
\end{aligned}$$

Предположим, что $\tau_j(z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu_j(z)\in C^1(0,1)$, а $\tau_j'(z)$ и $\nu_j(z)$ - ограничены при $z\to 0$ и $z\to 1$, где $j=\overline{1,2}$. Тогда решение $u(x,y)$ уравнения (9) в областях G_1 и G_2 представимо в виде [26]

$$\begin{aligned}
u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)J_0\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]dt+\\
+\frac{1}{4}\lambda^2 y\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1(t)\ \bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\ dt,\quad (x,y)\in G_1;
\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}
u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_2(y+x)+\tau_2(y-x)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)J_0\left[\lambda\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]\ dt+\\
+\frac{1}{4}\lambda^2 x\int\limits_{y-x}^{y+x}\tau_2(t)\ \bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]dt,\quad (x,y)\in G_2,
\end{aligned}\tag{22}$$

соответственно.

Из (17) следует, что

$$u[\theta_0(x)]=\frac{1}{2}\tau_1(0)+\frac{1}{2}B_{0x}^{0,\lambda}[\tau_1(x)]-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\nu_1(t)J_0\left[\lambda\sqrt{t(t-x)}\right]dt,$$

$$u\left[\theta_1(x)\right]=\frac{1}{2}\tau_1(1)+\frac{1}{2}B_{1x}^{0,\lambda}\left[\tau_1(x)\right]-\frac{1}{2}\int\limits_x^1\nu_1(t)J_0\left[\lambda\sqrt{(1-t)(x-t)}\right]dt,$$

где $B_{0x}^{0,\lambda}$ и $B_{1x}^{0,\lambda}$ – операторы, определенные равенством (2).

Применяя к этим равенствам соответственно операторы $A_{0x}^{0,\lambda}$, $A_{1x}^{0,\lambda}$ и принимая во внимание равенства (5), (6) и (8), получим

$$A_{0x}^{0,\lambda}\left\{u\left[\theta_0(x)\right]\right\}=\frac{1}{2}\tau_1(0)J_0(\lambda x)+\frac{1}{2}\tau_1(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^x\nu_1(t)J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt,$$

$$A_{1x}^{0,\lambda}\left\{u\left[\theta_1(x)\right]\right\}=\frac{1}{2}\tau_1(1)J_0\left[\lambda(1-x)\right]+\frac{1}{2}\tau_1(x)-\frac{1}{2}\int\limits_x^1\nu_1(t)J_0\left[\lambda(t-x)\right]dt.$$

Принимая во внимание эти равенства и введенные обозначения, из условия (16) находим

$$\begin{aligned}\alpha_1(x)\tau_1(x)=2d_0(x)-a_1(-x)\tau_1(0)J_0(\lambda x)-\\ -b_1(-x)\tau_1(1)J_0\left[\lambda(1-x)\right]+a_1(-x)\int\limits_0^x\nu_1(t)J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt+\\ +b_1(-x)\int\limits_x^1\nu_1(t)J_0\left[\lambda(t-x)\right]dt,\quad 0\le x\le 1.\end{aligned}\tag{23}$$

Формула (19) является функциональным соотношением между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$ на отрезке OA, принесенное из области G_1.

Аналогично, пользуясь формулой (18) и условием (13), находим функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ на отрезке OB, принесенное из области G_2;

$$\begin{aligned}\alpha_2(x)\tau_2(x)=2d_2(x)-a_2(x)\tau_2(0)J_0(\lambda x)-\\ -b_2(x)\tau_2(0)J_0\left[\lambda(1-x)\right]+a_2(x)\int\limits_0^x\nu_2(t)J_0\left[\lambda(x-t)\right]dt+\\ +b_2(x)\int\limits_x^1\nu_2(t)J_0\left[\lambda(t-x)\right]dt,\quad 0\le x\le 1.\end{aligned}\tag{24}$$

Причем здесь y переобозначена через x.

Полагая в равенствах (19) и (20) сперва $x=0$, а затем $x=1$ и учитывая условия $b_1(0)=b_2(0)=a_1(-1)=a_2(1)=0$, находим

$$\tau_1(0)=\frac{d_0(0)}{a_1(0)+c_1(0)},\quad \tau_1(1)=\frac{d_0(1)}{b_1(-1)+c_1(-1)},\tag{25}$$

$$\tau_2(0)=\frac{d_2(0)}{a_2(0)+b_2(0)},\qquad \tau_2(1)=\frac{d_2(1)}{b_2(1)+c_2(1)}.$$

Из этих равенств, в силу $u(x,y) \in C(\overline{D})$, следует, что заданные функции должны удовлетворять условиям согласования вида

$$d_2(0)[a_1(0)+c_1(0)] = d_0(0)[a_2(0)+c_2(0)], \quad d_0(1) = \varphi(0)[b_1(-1)+c_1(-1)].$$

При выполнении этих условий значения функции $u(x,y)$ в точках (0,1), (0,0) и (1,0) однозначно определяется через данные задачи Γ.

Следовательно, задача Γ в смысле разрешимости эквивалентна задаче $\widetilde{\Gamma}$, об определении в области G_0 решения $u(x,y) \in C(\overline{G}_0) \cap C^1(G_0 \cup OA \cup OB) \cap C^2(G_0)$ уравнения

$$u_{xx} - u_y - \lambda^2 u = 0, \tag{26}$$

удовлетворяющего условиям (10), (19) и (20).

Исследуем эту задачу. Пусть $u(x,y)$ – решение задачи $\widetilde{\Gamma}$ при $d_2(x) \equiv d_0(x) \equiv \varphi(y) \equiv 0$. Тогда в области G_0 справедливо тождество

$$0 = u\left(u_{xx} - u_y - \lambda^2 u\right) = (uu_x)_x - \frac{1}{2}\left(u^2\right)_y - (u_x)^2 - \lambda^2 u.$$

Интегрируя это тождество по области G_0 и применяя формулу Грина, получим

$$2\iint\limits_{G_0} \left[(u_x)^2 + \lambda^2 u\right] dxdy + \int\limits_0^1 u^2(x,1)\,dx + 2\int\limits_0^1 \tau_2(x)\,\nu_2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \tau_1^2(x)\,dx. \tag{27}$$

С другой стороны, переходя к пределу при $y \to 0$ и учитывая введенные обозначения, из (22) получим

$$\tau_1''(x) - \lambda^2\tau_1(x) - \nu_1(x) = 0, \qquad 0 < x < 1. \tag{28}$$

Умножая равенство (24) на $\tau_1(x)$ и интегрируя полученное равенство на отрезке $[0,1]$, с учетом $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, находим

$$\int\limits_0^1 \tau_1(x)\,\nu_1(x)\,dx = -\lambda^2\int\limits_0^1 \tau_1^2(x)\,dx - \int\limits_0^1 [\tau_1'(x)]^2 dx \leqslant 0. \tag{29}$$

Теперь, пользуясь равенствами (19) и (20) при $d_2(x) \equiv d_0(x) \equiv \varphi(y) \equiv 0$, докажем, что

$$l_j = \int\limits_0^1 \tau_j(x)\,\nu_j(x)\,dx \geqslant 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Пусть $j = 1$. Тогда, подставляя $\tau_1(x)$, найденную из (19), в l_1, имеем

$$l_1 = \int\limits_0^1 \nu_1(x)\,dx \left\{ \beta_1(x)\int\limits_0^x \nu_1(t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt + + \gamma_1(x)\int\limits_x^1 \nu_1(t)\,J_0[\lambda(t-x)]\,dt \right\},$$

Отсюда, заменяя функции $J_0(z)$ по формуле [12]

$$J_\omega(z) = \frac{(z/2)^\omega}{\sqrt{\pi}\Gamma(\omega+1/2)} \int\limits_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\omega-(1/2)} \cos(\xi z)\, d\xi, \quad \operatorname{Re}\omega > -1/2, \tag{30}$$

получим

$$l_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi \int\limits_{0}^{1} \nu_1(x) \left[\beta_1(x) \int\limits_{0}^{x} \nu_1(t) \cos\left[\lambda(x-t)\right] dt + \right.$$

$$\left. + \gamma_1(x) \int\limits_{x}^{1} \nu_1(t) \cos\left[\lambda(t-x)\right] dt \right] dx.$$

Пользуясь формулой косинуса разности и равенством

$$f(x) \int\limits_{m}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int\limits_{m}^{x} f(t)\, dt \right)^2,$$

выражение l_1 можно переписать в виде

$$l_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{0}^{1} \beta_1(x) \frac{d}{dx} \left[\left(\int\limits_{0}^{x} \nu_1(t) \cos(\lambda t \xi) dt \right)^2 + \left(\int\limits_{0}^{x} \nu_2(t) \sin(\lambda t \xi) dt \right)^2 \right] dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{0}^{1} \gamma_1(x) \frac{d}{dx} \left[\left(\int\limits_{x}^{1} \nu_1(t) \cos(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 + \left(\int\limits_{x}^{1} \nu_1(t) \sin(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 \right] dx \right\}.$$

Отсюда, применяя формулу интегрирования по частям к интегралам по x и учитывая условие $a_1(-1) = b_1(0) = 0$, находим

$$l_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{0}^{1} \gamma_1'(x) \left[\left(\int\limits_{x}^{1} \nu_1(t) \cos(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 + \left(\int\limits_{x}^{1} \nu_1 \sin(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 \right] dx \right.$$

$$\left. - \int\limits_{0}^{1} \beta_1'(x)\, (x) \left[\left(\int\limits_{0}^{x} \nu_1(t) \cos(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 + \left(\int\limits_{0}^{x} \nu_1(t) \sin(\lambda t \xi)\, dt \right)^2 \right] dx \right\},$$

откуда, в силу условия (15) при $j = 1$ следует неравенство $l_1 \geqslant 0$.

Пользуясь равенством (20) и условиями (15) при $j = 2$ аналогично доказывается неравенство $l_2 \geqslant 0$.

В силу $l_1 \geqslant 0$ из (25) следует, что $\tau_1'(x) \equiv 0$, т.е. $\tau_1(x) = \mathrm{const}$. Так как $\tau_1(x) \in C[0,1]$ и $\tau_1(0) = 0$, то $\tau_1(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$.

Если учесть равенство $\tau_1(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$ и неравенство $l_2 \geqslant 0$, то из (23) следует, что $u(x,1) \equiv 0$ и $u_x(x,y) = 0$, т.е. $u(x,1) = 0$ и $u(x,y) = \phi(y)$, где $\phi(y)$ – произвольная дифференцируемая функция. Из последних двух равенств следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G_0}$.

Отсюда, можно заключить, что задача $\widetilde{\Gamma}$ (следовательно и задача Γ) не может иметь более одного решения.

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи $\widetilde{\Gamma}$. С этой целью, переходя к пределу при $y \to 0$, из уравнения (22) получим равенство (24). Если временно считать функцию $\nu_1(x)$ известной, то решение уравнения (24), удовлетворяющее условиям (21), определяется формулой [27]

$$\tau_1(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)\,\nu_1(t)\,dt, \tag{31}$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} -\mathrm{sh}\,[\lambda_1(1-t)]\,\mathrm{sh}\,(\lambda_1 x)\,[\lambda_1 \mathrm{sh}\lambda_1]^{-1} & \text{при } 0 \le x \le t; \\ -\mathrm{sh}\,(\lambda_1 t)\,\mathrm{sh}\,[\lambda_1(1-x)]\,[\lambda_1 \mathrm{sh}\lambda_1]^{-1} & \text{при } t \le x \le 1, \end{cases})$$

$$f(x) = x\tau_1(1) + (1-x)\,\tau_1(0) - \lambda^2 \int_0^1 K(x,t)\,[t\tau_1(1) + (1-t)\,\tau_1(0)]\,dt.$$

Исключая из (19) и (27) функцию $\tau_1(x)$, относительно $\nu_1(x)$ получим интегральное уравнение вида

$$\int_0^1 K(x,t)\,\nu_1(t)\,dt - \beta_1(x)\int_0^x \nu_1(t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt -$$

$$-\gamma_1(x)\int_x^1 \nu_1(t)\,J_0[\lambda(t-x)]\,dt = f_1(x), \quad 0 < x < 1,$$

где $f_1(x) = 2\,[d_0(x)/\alpha_1(x)] - f(x) - \beta_1(x)\,\tau_1(0)\,J_0(\lambda x) - \gamma_1(x)\,\tau_1(1)\,J_0[\lambda(1-x)]$.

Дифференцируя это равенство по x и учитывая $\gamma_1(x) - \beta_1(x) \neq 0$, $x \in [0,1]$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче $\widetilde{\Gamma}$:

$$\nu_1(x) + \int_0^1 K_1(x,t)\,\nu_1(t)\,dt = f_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{32}$$

где $f_2(x) = f_1'(x)\,[\gamma_1(x) - \beta_1(x)]^{-1}$,

$$K_1(x,t) = \begin{cases} [\gamma_1(x) - \beta_1(x)]^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\{K(x,t) - \beta_1(x)\,J_0[\lambda(x-t)]\}, & x \geqslant t, \\ [\gamma_1(x) - \beta_1(x)]^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x}\{K(x,t) - \gamma_1(x)\,J_0[\lambda(t-x)]\}, & x \leqslant t. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $f_2(x) \in C^1[0,1]$, функции $K_1(x,t), K_{1x}(x,t)$ непрерывны при $x \neq t$, а при $x = t$ имеют скачок первого рода.

В силу единственности решения задачи $\widetilde{\Gamma}$ и эквивалентности её к уравнению (28), однородное интегральное уравнение

$$\nu_1(x) + \int_0^1 K_1(x,t)\nu_1(t)dt = 0, \qquad 0 < x < 1,$$

имеет только тривиальное решение. Тогда, согласно альтернативе Фредгольма [28] решение неоднородного интегрального уравнения (28) существует и единственно.

Подставляя найденную из (28) функцию $\nu_1(x)$ в (19), однозначно находим функцию $\tau_1(x)$, причем она принадлежит классу $C^2[0,1]$.

Этим задача $\widetilde{\Gamma}$ эквивалентно сведена к задаче, об определении решения уравнения (22), удовлетворяющее условиям (10), (20) и $u(x,0) = \tau_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

При решение этой задачи воспользуемся формулой решения первой краевой задачи для уравнения (22) в области G_0 [27]:

$$u(x,y) = \int_0^1 e^{-\lambda^2 y}\tau_1(\xi)\, G_1(x,y;\xi,0)\, d\xi + \int_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\tau_2(\eta)\, G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\, dy -$$
$$- \int_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\varphi(\eta)\, G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\, dy, \qquad (x,y) \in G_0, \quad (33)$$

где

$$G_j(x,y;\xi,\eta) = [4\pi(y-\eta)]^{-1/2} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{\varphi(y-\eta)}\right] + (-1)^j \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{\varphi(y-\eta)}\right] \right\}, \quad j = \overline{1,2}.$$

Считая $x \neq 0$, равенство (29) дифференцируем по x. Затем, переходя к пределу при $x \to 0$, имеем

$$\nu_2(y) = f_3(y) - \int_0^y \left[\tau_2(\eta)e^{\lambda^2\eta}\right]' e^{-\lambda^2 y} \left\{ [\pi(y-\eta)]^{-1/2} + K_0(y,\eta) \right\} dy, \quad 0 < y < 1, \quad (34)$$

где

$$f_3(y) = e^{-\lambda^2 y} \left\{ \int_0^1 \tau_1'(\xi) G_2(0,t;\xi,0) d\xi + \int_0^y \left[\varphi(\eta)e^{-\lambda^2\eta}\right]' G_{2\xi}(0,t;1,\eta) d\eta \right\},$$

$$K_0(y,\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(\frac{n^2}{\eta - y}\right).$$

Теперь в равенстве (20) переобозначим x на η и полученное равенство умножим на $\alpha_2^{-1}(\eta)\, e^{\lambda^2\eta}$. Затем, дифференцируя полученное равенство по η, имеем

$$\left[\tau_2(\eta)\, e^{\lambda^2\eta}\right]' = f_4(\eta) + e^{\lambda^2\eta}\left[\beta_2(\eta) - \gamma_2(\eta)\right]\nu_2(\eta) +$$
$$+\int_0^\eta \nu_2(t)\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2\eta}\beta_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(\eta - t)\right]\right\} dt + \int_\eta^1 \nu_2(t)\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2\eta}\gamma_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(y - t)\right]\right\} dt, \tag{35}$$

где $f_4(\eta) = (\partial/\partial\eta)\left\{e^{\lambda^2\eta}\alpha_2^{-1}(\eta)\left[2d_2(\eta) - a_2(\eta)\tau_2(0)J_0(\lambda\eta) - b_2(\eta)\tau_2(1)J_0[\lambda(1-\eta)]\right]\right\}$.

Подставляя (30) в (31), после некоторых преобразований получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное задаче $\widetilde{\Gamma}$:

$$\nu_2(y) + \int_0^1 \nu_2(t)\, K_2(y,t)\, dt = f_5(y), \quad 0 < y < 1, \tag{36}$$

где

$$f_5(y) = f_3(y) - e^{-\lambda^2 y}\int_0^y f_4(\eta)\left\{\left[\pi(y-\eta)\right]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\} dy,$$

$$K_2(y,t) = e^{\lambda^2(t-y)}\left[\beta_2(t) - \gamma_2(t)\right]\left\{\left[\pi(y-t)\right]^{-1/2} + K_0(y,t)\right\} +$$

$$+\int_t^y \left\{\left[\pi(y-\eta)\right]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\beta_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(\eta - t)\right]\right\} d\eta +$$

$$+\int_0^t \left\{\left[\pi(y-\eta)\right]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\gamma_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(t - \eta)\right]\right\} d\eta, \qquad y \geqslant t,$$

$$K_2(y,t) = \int_0^y \left\{\left[\pi(y-\eta)\right]^{-1/2} + K_0(y,\eta)\right\}\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{e^{\lambda^2(\eta-y)}\gamma_2(\eta)\, J_0\left[\lambda(t - \eta)\right]\right\} d\eta, \qquad y \leqslant t.$$

Однозначная и безусловная разрешимость неоднородного интегрального уравнения (32) (в силу эквивалентности её к задаче $\widetilde{\Gamma}$) следует из единственности решения задачи $\widetilde{\Gamma}$.

После того, как найдена функция $\nu_2(y)$ из уравнения (32), подставляя её в равенство (20), находим функцию $\tau_2(y)$. Следовательно, функции $\tau_j(y)$ и $\nu_j(y)$, $j = \overline{1,2}$, однозначно находятся через данные задачи Γ. С помощью найденных $\tau_j(y)$ и $\nu_j(y)$, $j = \overline{1,2}$ решение задачи Γ в областях G_0, G_1 и G_2 определяется соответственно формулами (29), (17) и (18). Этим завершается исследование задачи Γ.

Исследование задачи H.

Пусть $u(x,y)$ – решение задачи H. Введем обозначения:

$$\lim_{x\to -y-0} u(x,y)=0, \quad 0\leqslant y\leqslant (1/2), \tag{37}$$

$$a_1(-x)\,A_{0x}^{0,\lambda}\{u[\theta_0(x)]\}+b_1(-x)\,A_{1x}^{0,\lambda}\{u[\theta_1(x)]\}+ \\ +c_1(-x)\,u(x,0)=Y(x)\,,\ (x,0)\in\overline{OA}. \tag{38}$$

Будем считать, что $Y(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция (ниже докажем, что она действительно обладает этим свойством).

Из краевых условий и введенных обозначений видно, что если $Y(x)$ – известная функция, то решение задачи H в области D определяется как решение краевой задачи {(9), (10), (13), ()} формулами (29), (17), (18), а в области D^* – краевой задачи {(9), (11), (12), (33)} формулами

$$u(x,y)=\int\limits_0^1 e^{-\lambda^2 y}\tau_1(\xi)\,G_1(x,y;\xi,0)\,d\xi+\int\limits_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\tau_2(\eta)\,G_{1\xi}(x,y;0,\eta)\,dy- \\ -\int\limits_0^y e^{\lambda^2(\eta-y)}\varphi(\eta)\,G_{1\xi}(x,y;1,\eta)\,dy, \qquad (x,y)\in G_0^*,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_2^*(y+x)+\tau_2^*(y-x)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{y-x}^{y+x}\nu_2^*(t)J_0\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]\,dt+ \\ +\frac{1}{4}\lambda_2^2 x\int\limits_{y-x}^{y+x}\tau_2^*(t)\,\bar{J}_1\left[\lambda_2\sqrt{(y-t)^2-x^2}\right]dt, \quad (x,y)\in G_2^*,$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau_1^*(x+y)+\tau_1^*(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1^*(t)J_0\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]\,dt+ \\ +\frac{1}{4}\lambda^2 y\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1^*(t)\,\bar{J}_1\left[\lambda\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right]dt, \quad (x,y)\in G_1^*. \tag{39}$$

Поэтому займёмся нахождением неизвестной функции $Y(x)$.

Пользуясь формулами (17) и () и методикой, примененной при получении равенства (19), из соотношений (12) и () получим

$$\alpha_1(x)\,\tau_1(x)=2Y(x)-\tau_1(0)\,a_1(-x)\,J_0(\lambda x)- \\ \tau_1(1)\,b_1(-x)\,J_0[\lambda(1-x)]+a_1(x)\int\limits_0^x\nu_1(x)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt+ \\ +b_1(x)\int\limits_x^1\nu_1(t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt, \tag{40}$$

$$\alpha_1(x)\tau_2^*(-x) = 2d_1(-x) - \tau_2^*(0)\,a_1(-x)\,J_0(\lambda x) -$$
$$- \tau_1^*(-1)\,b_1(-x)\,J_0[\lambda(1-x)] - a_1(-x)\int_0^x \nu_1^*(-t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt -$$
$$- b_1(-x)\int_x^1 \nu_2^*(-t)\,J_0[\lambda(x-t)]\,dt. \quad (41)$$

Вычитая () из (4), имеем

$$2Y(x) = 2d_1(-x) + \alpha_1(x)[\tau_1(x) - \tau_1{}^*(-x)] +$$
$$+ a_1(-x)J_0(\lambda x)[\tau_1(0) - \tau_2{}^*(0)] + b_1(-x)J_0[\lambda(1-x)][\tau_1(1) - \tau_2{}^*(-1)] -$$
$$- a_1(-x)\int_0^x [\nu(t) + \nu_2{}^*(-t)]J_0[\lambda(x-t)]dt -$$
$$- b_1(-x)\int_x^1 [\nu(t) + \nu_2{}^*(-t)]J_0[\lambda(x-t)]dt. \quad (42)$$

Следовательно, функция $Y(x)$ однозначно выражается через неизвестную функцию $\delta(x) = \tau_1(x) - \tau_2 * (-x)$. Определим функцию $\delta(x)$.

Уравнение (9) в областях G_0 и G_0^* имеет вид (22) и

$$u_{yy} + u_x + \lambda^2 u = 0, \quad (x,y) \in G_0^*. \quad (43)$$

Переходя к переделу при $y \to +0$ и $x \to -0$ в (22) и (43) соответственно и учитывая введенные обозначения, получаем (24) и

$$\tau_2{}^{*\prime\prime}(-x) - \lambda^2\tau_2^*(-x) + \nu_2{}^*(-x) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (44)$$

Вычитая (44) из (24), находим

$$\delta''(x) - \lambda^2\delta(x) - [\nu_1(x) + \nu_2{}^*(-x)] = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (45)$$

Как указано выше, что решение задачи H в областях G_1 и G_1^* соответственно определяется формулой (17) и (). Подставляя (17) и () в условие $\lim\limits_{y\to -x-0} u(x,y) = \lim\limits_{y\to -x+0} u(x,y)$, $0 \leqslant x \leqslant (1/2)$ и учитывая первое из условий согласования (14), после некоторых преобразований, получим

$$B_{0x}^{0,\lambda}[\tau_1(x) - \tau_2^*(-x)] - \int_0^x [\nu_1(t) + \nu_2^*(-t)]\,J_0\left[\lambda\sqrt{t(t-x)}\right]dt = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

где $B_{0x}^{0,\lambda}$ – оператор, определенный формулой (2).

В силу равенства (8) и обозначения $\delta(x) = \tau_1(x) - q\tau_2^*(-x)$ последнее равенство переписывается в виде

$$B_{0x}^{0,\lambda}\delta(x) - \int_0^x B_{0t}^{1,\lambda}[\nu_1(t) + \nu_2^*(-t)]\,dt = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

Дифференцируя это равенство по x, а затем применяя оператор $A_{0x}^{1,\lambda}$, определяемый формулой (1), с учетом равенств (5) и (7), получим

$$\nu_1(z) + \nu_2^*(-z) = C_{0z}^{0,\lambda}[\delta(z)],\ 0 < z < 1, \tag{46}$$

где $C_{0x}^{0,\lambda}$ – оператор определенный формулой (3).

Подставляя (46) в (45), получаем интегро-дифференциальное уравнения относительно $\delta(x)$:

$$\delta''(x) - \lambda^2\delta(x) - C_{0x}^{1,\lambda}[\delta(x)] = 0,\ 0 < x < 1. \tag{47}$$

Из (10), (11), в силу условий согласования (14), следует,что

$$\delta(0) = 0,\ \delta(1) = \varphi(0) - \varphi^*(0). \tag{48}$$

Докажем, что решение уравнения (47), удовлетворяющее условию (48) существует и единственно.

Сначала докажем единственность решения. Для этого достаточно доказать, что однородная задача

$$\delta''(x) - \lambda^2\delta(x) - C_{0x}^{0,\lambda}\delta(x) = 0, \quad x \in (0,1); \quad \delta(0) = \delta(1) = 0 \tag{49}$$

имеет только тривиальное решение. С этой целью, учитывая вид операторы $C_{0x}^{0,\lambda}$, перепишем уравнение в (49) в виде

$$\delta''(x) - \delta'(x) - \lambda^2\delta(x) - \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^x \delta(t)\overline{J}_1[\lambda(x-t)]dt = 0, x \in (0,1).$$

Умножим это равенство на $\delta(x)$ и интегрируем по x на отрезке $[0,1]$. Затем, интегрируя по частям первые два интеграла и учитывая условия $\delta(0) = \delta(1) = 0$, получим

$$\int_0^1 [\delta'(x)]^2 dx + \lambda^2\int_0^1 \delta^2(x)\,dx + \frac{1}{2}\lambda^2\int_0^1 \delta(x)\,dx\int_0^x \delta(t)\,\overline{J_1}[\lambda(x-t)\,dt = 0. \tag{50}$$

Последний интеграл в (50) обозначим через l и функцию $\overline{J_1}(z)$ заменяем по формуле (26) при $w = 1$:

$$l = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^1 \left(1-\xi^2\right)^{1/2}\left\{\int_0^1 \delta(x)\,dx\int_0^x \delta(t)\cos[\lambda(x-t)]\,dt\right\}d\xi.$$

Отсюда, применяя формулу для косинуса разности и учитывая равенство

$$f(x)\int_0^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2,$$

вычисляем интеграл по x. В результате получим

$$l = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{1/2}\left\{\left[\int_0^1 \delta(t)\cos(\lambda\xi t)\,dt\right]^2 + \left[\int_0^1 \delta(t)\sin(\lambda\xi t)\,dt\right]\right\}d\xi.$$

Следовательно, $l \geq 0$.

Если учесть это, то из (50) следует, что $\delta'(x) \equiv 0$, т.е. $\delta(x) = \mathrm{const}$, $x \in (0,1)$. Так как $\delta(x) \in C[0,1]$ и $\delta(0) = \delta(1) = 0$, то $\delta(x) \equiv 0$, $x \in [0,1]$.

Теперь, переходим к доказательству существования решения задачи {(47), (48)}. С этой целью перепишем уравнение (46) в виде

$$\delta''(x) - \lambda^2\delta(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

где

$$f(x) = \delta'(x) + (1/2)\lambda^2\int_0^x \delta(t)\,\bar{J}_1[\lambda(x-t)]dt. \tag{51}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (48) имеет вид

$$\delta(x) = f_1(x) + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt, \tag{52}$$

где $f_1(x) = x\delta(1) + (1-x)\delta(0) + \lambda^2\int_0^1 K[x,t][t\delta(1) + (1-t)\delta(0)]dt$, а $K(x,t)$—функция Грина (см.формулу (27)).

Подставляя в (52) функцию $f(x)$ из (51) и применяя формулу интегрирования по частям, после некоторых преобразований, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\delta(x)$, эквивалентное задаче {(47), (48)}:

$$\delta(x) - \int_0^1 K_1(x,t)\,\delta(t)\,dt = f_2(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{53}$$

где $f_2(x) = x\delta(1) + (1-x)\delta(0)$, $K_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}K(x,t) - \frac{1}{2}\lambda^2\int_t^1 K(x,z)\,\bar{J}_1[\lambda(z-t)]dz$, причем $f_2(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$, а $K_1(x,t)$ и её производные непрерывны при $t \neq x$ и имеют скачок первого рода при $t = x$.

Тогда, согласно альтернативе Фредгольма [28], решение интегрального уравнения (53) существует и единственно, причем, в силу свойства $f_2(x)$ и $K_1(x,t)$, его решение принадлежит классу $C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Следовательно, функция $\delta(x) = \tau_1(x) - \tau_2^*(-x)$ однозначно находится через данные задачи H и принадлежит классу $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Если учесть это и равенства (46), (), то можно заключить, что неизвестная функция $Y(x)$ однозначно определяется через данные задачи H, причем она

принадлежит классу $Y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ и $Y(x) \equiv 0$ при $\varphi(y) \equiv \varphi^*(x) \equiv d_1(x) \equiv 0$.

Этим исследование задачи H завершается.

Заключение

В настоящей работе доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи со смещением для параболо-гиперболического уравнения с двумя взаимно перпендикулярными линиями изменения типа и спектральным параметром. Предложенный метод основан на приведении задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода и использовании специальных интегральных операторов с ядрами, выраженными через функции Бесселя. Результаты исследования имеют важное значение для теории краевых задач для уравнений смешанного типа и могут быть использованы при математическом моделировании процессов в неоднородных средах, таких как физика плазмы, диффузия в сложных геометриях, в биофизике, а также в задачах прогноза в метеорологии и гидродинамике.

Следует отметить что, краевые задачи для смешанных эллиптико-гиперболических уравнений в области типа G и D поставлены и исследованы в работах [29–33].

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* -М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // *Доклады АН СССР. -Москва*, 1969. Т. 185, №4,6, С. 739–740.
3. Абрегов М. Х. Некоторые задачи типа задачи Бицадзе - Самарского для уравнения смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*, 1974. Т. 10, №1, С. 3–6.
4. Алимов Ш. А. Об одной спектральной задаче типа задачи Бицадзе-Самарского // *ДАН СССР. - Москва*, 1986. Т. 287, №6, С. 1289–1290.
5. Андреев А. А., Рябов А. В. Некоторые краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для обобщенного уравнения Трикоми в неограниченных областях / *Дифференциальные уравнения и их приложения*, Межвузовский сборник трудов по физико - математическим наукам, Т. 2. Куйбышев, 1975, С. 9–15.
6. Нахушев А. М. О некоторых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Дифференциальные уравнения. -Минск*, 1969. Т. 5, №1, С. 44–59.
7. Нахушев А. М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений на плоскости // *Дифференциальные уравнения. -Минск*, 1970. Т. 6, №1, С. 191–195.
8. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* -М.: Наука, 2006. 287 с.
9. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* -М.: Физматгиз, 2003. 272 с.
10. Нахушев А. М. *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов.* -М.: Наука, 2006. 174 с.
11. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.* - Ташкент: Фан, 1997. 166 с.
12. Кузнецов В. С. *Специальные функции.* -М.: Высшая школа, 1965. 424 с.
13. Зуннунов Р. Т. Задачи со смещением на характеристиках одного семейства для уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. - Нальчик*, 2010. Т. 12, №1, С. 15–24.

14. Зуннунов Р. Т. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области // *Бюллетень Института математики*, 2023. №5, С. 80–88.

15. Зуннунов Р. Т., Толибжонов Ж. А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 30, №1, С. 31–41, DOI 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41.

16. Зуннунов Р. Т., Хайдаров И. У. Краевая задача со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 32, №3, С. 55–64, DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64 .

17. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Об одной нелокальной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения // *Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук. - Ташкент*, 1984. №3, С. 29–34.

18. Каримов Ш. Т. Нелокальная задача с нормальной производной для общего уравнения Лаврентьева-Бицадзе в двусвязной области // *Узбекский математический журнал. - Ташкент*, 1993. №3, С. 59–63.

19. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // *Доклады АН СССР. - М.*, 1982. Т. 262, №3, С. 539–541.

20. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения / *Неклассические задачи математической физики.* -Ташкент, Фан, 1985, С. 25-47.

21. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Об одной задаче типа задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения / *Дифференциальные уравнения в честных производных и их применения*, Труды Всесоюзного симпозиума 21-23 апреля 1982 г.. Тбилиси, Тбилиского университета, 1982, С. 211–216.

22. Салахитдинов М. С., Кадыров З. Задачи с нормальной производной для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // *Дифференциальные уравнения. -Минск*, 1986. Т. 22, №1, С. 103–114.

23. Эгамбердиев У. О некоторых краевых задачах для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа / *Краевые задачи механики сплошных сред.* - Ташкент, Фан, 1982, С. 117-128.

24. Джураев Т. Д., Абдуллаев А. С. Об одной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа / *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Ташкент, Фан, 1986, С. 60-77.

25. Джураев Т. Д., Абдуллаев А. С. Об одной краевой задаче со смещением для параболо-гиперболического уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа / *Неклассические уравнения математической физики и задачи теории ветвления.* -Ташкент, Фан, 1988, С. 16-24.

26. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* - М.: Наука, 1977. 736 с.

27. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* -Ташкент: Фан, 1986. 220 с.

28. Михлин С. Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* -М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

29. Зайнулабидов М. М. Краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения // *Дифференциальные уравнения. - Минск*, 1970. Т. 6, №1, С. 99–108.

30. Оромов Ж. О краевых задачах типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения // *Дифференциальные уравнения. - Минск*, 1983. Т. 19, №1, С. 94–101.

31. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Аналог задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // *Доклады АН УзССР. - Ташкент*, 1983. №1, С. 3–4.

32. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи в двусвязной области для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения / *Современные проблемы математической физики*, Труды Всесоюзного симпозиума 22-25 апреля 1987 г.. Тбилиси, Тбилиского университета, 1987, С. 349–356.

33. Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Нелокальная краевая задача в двусвязной области для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // *Доклады АН СССР. - М.*, 1988. Т. 229, №1, С. 63–66.

Информация об авторах

Хайдаров Иброхимжон Усмоналиевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан, ORCID 0000-0002-3145-6911.

Зуннунов Рахимжон Темирбекович – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики, Филиала Российского государственного университета нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан ORCID 0000-0001-9392-5464.

References

[1] Nakhushev, A. M. Equations of Mathematical Biology. Moscow: Vysshaya Shkola, 1995. 301 pp.(In Russian).

[2] Bitsadze, A. V., Samarskii, A. A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1969, Vol. 185, No. 4,6, pp. 739–740.(In Russian).

[3] Abregov, M. Kh. Some problems of the Bitsadze–Samarskii type for equations of mixed type. Differential Equations, 1974, Vol. 10, No. 1, pp. 3–6.(In Russian).

[4] Alimov, Sh. A. On a spectral problem of the Bitsadze–Samarskii type. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1986, Vol. 287, No. 6, pp. 1289–1290.(In Russian).

[5] Andreev, A. A., Ryabov, A. V. Some boundary value problems of the Bitsadze–Samarskii type for a generalized Tricomi equation in unbounded domains. In: Differential Equations and Their Applications, Interuniversity collection of papers on physical and mathematical sciences, Vol. 2, Kuibyshev, 1975, pp. 9–15.(In Russian).

[6] Nakhushev, A. M. On some problems for hyperbolic and mixed-type equations. Differential Equations, Minsk, 1969, Vol. 5, No. 1, pp. 44–59.(In Russian).

[7] Nakhushev, A. M. Methodology for formulating well-posed problems for linear hyperbolic equations in the plane. Differential Equations, Minsk, 1970, Vol. 6, No. 1, pp. 191–195.(In Russian).

[8] Nakhushev, A. M. Shift Problems for Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 2006. 287 pp.(In Russian).

[9] Nakhushev, A. M. Fractional Calculus and Its Applications. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 pp.(In Russian).

[10] Nakhushev, A. M. Differential Equations of Mathematical Models of Nonlocal Processes. Moscow: Nauka, 2006. 174 pp.(In Russian).

[11] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations with a Spectral Parameter. Tashkent: Fan, 1997. 166 pp.(In Russian).

[12] Kuznetsov, V. S. Special Functions. Moscow: Vysshaya Shkola, 1965. 424 pp.(In Russian).

[13] Zunnunov, R. T. Shift problems on characteristics of one family for a mixed-type equation in an unbounded domain. Reports of the Adyghe (Cherkess) International Academy of Sciences, Nalchik, 2010, Vol. 12, No. 1, pp. 15–24.(In Russian).

[14] Zunnunov, R. T. On a boundary value problem with shift for a generalized Tricomi equation with a spectral parameter in an unbounded domain. Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, No. 5, pp. 80–88.(In Russian).

[15] Zunnunov, R. T., Tolibzhonov, Zh. A. A boundary value problem with shift for a model mixed-type equation in an unbounded domain. Bulletin of KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences, 2020, Vol. 30, No. 1, pp. 31–41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41.(In Russian).

[16] Zunnunov, R. T., Khaidarov, I. U. A boundary value problem with shift for a generalized Tricomi equation with a spectral parameter in an unbounded domain. Bulletin of KRAUNC. Physical and Mathematical Sciences, 2020, Vol. 32, No. 3, pp. 55–64. DOI:10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64.(In Russian).

[17] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. On a nonlocal boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation. Proceedings of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR. Series of Physical and Mathematical Sciences, Tashkent, 1984, No. 3, pp. 29–34.(In Russian).

[18] Karimov, Sh. T. A nonlocal problem with a normal derivative for the general Lavrentiev–Bitsadze equation in a doubly connected domain. Uzbek Mathematical Journal, Tashkent, 1993, No. 3, pp. 59–63.(In Russian).

[19] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. On a boundary value problem for a mixed-type equation with non-smooth degeneration lines. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1982, Vol. 262, No. 3, pp. 539–541.(In Russian).

[20] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. Boundary value problems for a class of mixed-type equations with non-smooth degeneration lines. In: Non-Classical Problems of Mathematical Physics, Tashkent: Fan, 1985, pp. 25–47.(In Russian).

[21] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. On a problem of the Tricomi type for a mixed-type equation with non-smooth lines of degeneracy. In: Differential Equations in Partial Derivatives and Their Applications, Proceedings of the All-Union Symposium, April 21–23, 1982. Tbilisi: Tbilisi University, 1982, pp. 211–216.(In Russian).

[22] Salakhitdinov, M. S., Kadyrov, Z. Problems with a normal derivative for an equation of mixed type with non-smooth lines of degeneracy. Differential Equations, Minsk, 1986, Vol. 22, No. 1, pp. 103–114.(In Russian).

[23] Egamberdiev, U. On some boundary value problems for a mixed parabolic-hyperbolic equation with two lines of type change. In: Boundary Value Problems in Continuum Mechanics. Tashkent: Fan, 1982, pp. 117–128.(In Russian).

[24] Dzhuraev, T. D., Abdullaev, A. S. On a boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation with two perpendicular lines of type change. In: Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics. Tashkent: Fan, 1986, pp. 60–77.(In Russian).

[25] Dzhuraev, T. D., Abdullaev, A. S. On a boundary value problem with a shift for a parabolic-hyperbolic equation with two perpendicular lines of type change. In: Nonclassical Equations of Mathematical Physics and Problems of Bifurcation Theory. Tashkent: Fan, 1988, pp. 16–24.(In Russian).

[26] Tikhonov, A. N., Samarskii, A. A. Equations of Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1977. 736 pp.(In Russian).

[27] Dzhuraev, T. D., Sopuev, A., Mamazhanov, M. Boundary Value Problems for Parabolic-Hyperbolic Equations. Tashkent: Fan, 1986. 220 pp.(In Russian).

[28] Mikhlin, S. G. Lectures on Linear Integral Equations. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 232 pp.(In Russian).

[29] Zainulabidov, M. M. A boundary value problem for an equation of mixed type with two intersecting lines of degeneracy. Differential Equations, Minsk, 1970, Vol. 6, No. 1, pp. 99–108.(In Russian).

[30] Oromov, Zh. On boundary value problems of the Bitsadze–Samarskii type for a second-kind mixed-type equation with a non-smooth line of degeneracy. Differential Equations, Minsk, 1983, Vol. 19, No. 1, pp. 94–101.(In Russian).

[31] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. An analogue of the Tricomi problem for an equation of mixed type with non-smooth lines of degeneracy. Reports of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR, Tashkent, 1983, No. 1, pp. 3–4.(In Russian).

[32] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. Boundary value problems in a doubly connected domain for an equation of mixed type with a non-smooth line of degeneracy. In: Modern Problems of Mathematical Physics, Proceedings of the All-Union Symposium, April 22–25, 1987. Tbilisi: Tbilisi University, 1987, pp. 349–356.(In Russian).

[33] Salakhitdinov, M. S., Urinov, A. K. A nonlocal boundary value problem in a doubly connected domain for an equation of mixed type with non-smooth lines of degeneracy.

Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1988, Vol. 229, No. 1, pp. 63–66.(In Russian).

Information about the authors

Khaydarov Ibrokhimjon Usmonalievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-3145-6911.

Zunnunov Rakhimjon Temirbekovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics of the Branch of Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-9392-5464.