Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2025. Т. 50. №1. С. 22 - 38. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-22-38

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.956.6

Об одной краевой задаче с граничными условиями третьего рода для уравнения смешанного типа третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части

Б. И. Исломов**, Г. К. Кылышбаева

Национальный Университет Узбекистана имени М. Улугбека, г. Ташкент, 100174, ул. Университетская 4, Республика Узбекистан

Аннотация. В этой статье предлагается метод решения задачи с граничным условием третьего рода для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа с суперпозицией операторов первого и второго порядка в прямоугольной области. Показано, что корректность постановки задачи существенным образом зависит от отношения сторон прямоугольника из гиперболической части смешанной области. Приведен пример, в котором поставленная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Установлен критерий единственности решения. При обосновании равномерной сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей. В связи, с чем установлены оценки малых знаменателей об отдаленности от нуля с соответствующей асимптотикой. Эти оценки позволили доказать сходимость ряда в классе регулярных решений данного уравнения. Доказаны оценки об устойчивости решения от заданных граничных функций.

Ключевые слова: уравнение третьего порядка, условия второго рода, спектральный метод, малые знаменатели, единственность, существование, устойчивость.

Получение: 20.01.2025; Исправление: 21.03.2025; Принятие: 23.03.2025; Публикация онлайн: 24.03.2025

Для цитирования. Исломов Б. И., Кылышбаева Г. К. Об одной краевой задаче с граничными условиями третьего рода для уравнения смешанного типа третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором в главной части // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 50. № 1. С. 22-38. EDN: XRZCCH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-22-38.

Финансирование. Исследование было проведено без поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: islomovbozor@yandex.com , kalbaevna85@mail.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2025. vol. 50. no. 1. P. 22 - 38. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-22-38

Research Article

Full text in Russian

MSC 35A02

On a Boundary Value Problem with Third Kind Boundary Conditions for a Third-Order Mixed-Type Equation with an Elliptic-Hyperbolic Principal operator

*B. I. Islomov**, *G. K. Kilishbayeva*

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, 100174, st. Universitetskaya 4, Republic of Uzbekistan

Abstract. In this paper, a method for solving a problem with a boundary condition of the third kind for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type with a superposition of first- and second-order operators in a rectangular domain is proposed. It is shown that the correctness of the problem statement depends significantly on the ratio of the sides of the rectangle from the hyperbolic part of the mixed domain. An example is given in which the problem with homogeneous conditions has a nontrivial solution. A solution to the problem is constructed as a sum of a series in eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. A criterion for the uniqueness of the solution is established. When substantiating the uniform convergence of the series, the problem of small denominators arises. In this connection, estimates of small denominators on the distance from zero with the corresponding asymptotics are established. These estimates made it possible to prove the convergence of the series in the class of regular solutions of this equation. Estimates of the stability of the solution from the given boundary functions are proved.

Key words: third order equation, conditions of the second kind, spectral method, small denominators, uniqueness, existence, stability.

Received: 20.01.2025; Revised: 21.03.2025; Accepted: 23.03.2025; First online: 24.03.2025

For citation. Islomov B. I., Kilishbaeva G. K. On a boundary value problem with third kind boundary conditions for a third-order mixed-type equation with an elliptic-hyperbolic principal operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **50**: 1, 22-38. EDN: XRZCCH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-22-38.

Funding. The study was conducted without the support of foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: islomovbozor@yandex.com , kalbaevna85@mail.ru

Введение

Корректные краевые задачи для уравнений эллиптико-гиперболического и параболо-гиперболического типов третьего порядка, впервые изучены в работах А. В. Бицадзе и М. С. Салахитдинова [1], М. С. Салахитдинова [2], Т. Д. Джураева [3], Т. Д. Джураева, А. Сопуева и М. Мамажонова [4], в которых смешанная область состоит из характеристических треугольников и прямоугольника (или полуокружности).

В этих работах решение найдено в классе функций, представляемых в виде

$$u(x,y) = v(x,y) + \omega(x)$$

или

$$u(x,y) = v(x,y) + \omega(y),$$

где $v(x,y)$ — произвольное регулярное решение уравнения второго порядка $Lv = 0$,$\omega(x)$, $\omega(y)$ — произвольные функции из класса $C[0,1] \cap C^2(0,1)$. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановочных дифференциальных операторов. Однако для уравнения смешанного типа с обобщенным оператором, содержащим младшие члены, этот метод не всегда может быть верным [5].

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа третьего порядка является одним из развивающихся разделов теории уравнений в частных производных. Опубликованы многочисленные теоретические исследования [6–10]. В этих работах изучен ряд корректных локальных и нелокальных краевых задач нового типа.

Много уравнений третьего порядка возникает в теории упругости материалов с памятью, в нелинейно-вязкоупругих средах, при моделировании процессов влагопереноса, при изучении гидродинамики "неньютоновских"жидкостей [11]. Такие уравнения можно найти в линейных задачах стационарных движений идеального газа [12].

Отметим также работы [13–16], в которых исследуются краевые задачи для нагруженного параболо-гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка в различных областях.

В последние годы, используя методы спектрального анализа [17], [18], изучены прямые и обратные задачи [19–22] для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов второго порядка в прямоугольной области, а в работах [23], [24] такие задачи исследуются для уравнения смешанного типа третьего порядка.

Прямые краевые задачи для смешанных уравнений второго порядка с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто исследованы в работах [25–27].

В настоящей работе, следуя работам [18], [19], изучается краевая задача с граничным условием третьего рода для уравнения эллиптико-гиперболического типа с суперпозицией операторов первого и второго порядка в прямоугольной области.

Постановка задачи

В прямоугольной области $D = \{(x,y): \ 0<x<1, \ -p<y<q\}$, рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где λ, $p>0$,$q>0$ — действительные числа, $a \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $c \in (-\infty,+\infty)$.

Введем обозначения:

$$AB \equiv J = \{(x,y): \ 0<x<1, \ y=0\}, \ AD: \ x=0, \ 0<y<q,$$

$$BC: \ x=1, \ 0<y<q, \ AD_0: \ x=0, \ -p<y<0, \ BC_0: x=1, \ -p<y<0,$$

$$D_0D: \ x=0, \ -p<y<q, \ C_0C: x=1, \ -p<y<q,$$

$$D_1 = D \ \cap \ \{(x,y): \ x>0, \ y>0\},$$

$$D_2 = D \ \cap \ \{(x,y): \ x>0, \ y<0\}, \ D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

Через $C^{k,m}_{\xi,\eta}(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными по ξ и η до k и m порядка включительно в области M.

В области D для уравнения (1) исследуем следующую задачу.

Задача C. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^{3,2}_{x,y}(D_1\cup D_2) \cap C^2_x(\overline{DD_0}\cup\overline{CC_0}), \quad u_{xyy} \in C(D_1\cup D_2) \tag{2}$$

$$0 = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 u, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & (x,y) \in D_2, \end{cases} \tag{3}$$

$$(au_{xx}(x,y) + cu_x(x,y))|_{x=0} = 0, \ \ (au_{xx}(x,y) + cu_x(x,y))|_{x=1} = 0, \quad -p \le y \le q, \tag{4}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad -p \le y \le q, \tag{5}$$

$$u(x,q) = g(x), \qquad u(x,-p) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$, $g(x)$ — *заданные достаточно гладкие функции.*

Построение решения задачи

Поскольку $\left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) Lu = L\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + cu\right) = 0, \quad (x,y) \in D_1 \cup D_2$, тогда мы можем ввести новую функцию $v(x,y) = a\frac{\partial u}{\partial x} + cu$, для которой получаем уравнение

$$0 = Lv \equiv \begin{cases} L_1 v \equiv v_{xx} + v_{yy} - \lambda^2 v, & (x,y) \in D_1, \\ L_2 v \equiv v_{xx} - v_{yy} - \lambda^2 v, & (x,y) \in D_2. \end{cases} \tag{7}$$

Из граничных условий (4) следует, что

$$v_x(0,y) = au_{xx}(0,y) + cu_x(0,y) = 0, \quad v_x(1,y) = au_{xx}(1,y) + cu_x(1,y) = 0. \tag{8}$$

Из условий (6) найдем

$$v(x,q) = au_x(x,q) + cu(x,q) = ag'(x) + cg(x) = g_1(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

$$v(x,-p) = au_x(x,-p) + cu(x,-p) = a\psi'(x) + c\psi(x) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{10}$$

В силу (2) с учетом $v(x,y) = au_x(x,y) + cu(x,y)$ заключаем, что решение задачи (8), (9) и (10) для уравнения (7) ищем в классе

$$\nu(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \overline{DD_0} \cup \overline{CC_0}) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_1 \cup D_2).$$

Частные решения уравнения (7), не равные нулю в области D и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (8), будем искать в виде

$$v(x,y) = X(x)Y(y). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (7) и (8) получаем

$$Y''(y) - (\lambda^2 + \mu^2)Y(y) = 0, \quad 0 < y < q, \tag{12}$$

$$Y''(y) + (\lambda^2 + \mu^2)Y(y) = 0, \quad -p < y < 0, \tag{13}$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{14}$$

$$X'(0) = 0, \qquad X'(1) = 0. \tag{15}$$

Как нам известно, что спектральная задача (14) и (15) имеет решение

$$X_0(x) = 1, \;\; X_n(x) = \sqrt{2}\cos \mu_n x, \;\; \mu_n = \pi n, \quad n \in N. \tag{16}$$

Тогда дифференциальные уравнения (12) и (13) имеют решения

$$Y_n(y) = \begin{cases} \alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_n \cos\rho_n y + \theta_n \sin\rho_n y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad \text{при } n \in N, \tag{17}$$

$$Y_0(y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_0 \cos\lambda y + \theta_0 \sin\lambda y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad \text{при } n = 0, \tag{18}$$

где $\rho_n = \sqrt{\mu_n^2 + \lambda^2}$, α_n, β_n, γ_n и $\theta_n\,(n \in N_0)$ — произвольные постоянные, $N_0 = N \cup \{0\}$.

Далее подставляя (16), (17) и (18) в (11) получим

$$v_n(y) = \begin{cases} \alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_n \cos\rho_n y + \theta_n \sin\rho_n y, & -p < y < 0, \end{cases} \quad \text{при } n \in N, \tag{19}$$

$$v_0(y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y}, & 0 < y < q, \\ \gamma_0 \cos\lambda y + \theta_0 \sin\lambda y, & -p < y < 0. \end{cases} \quad \text{при } n = 0. \tag{20}$$

Тогда функции (19) и (20), по построению, удовлетворяют в областях $D_j\,(j = 1,2)$ уравнению (7) и нулевым граничным условиям (8) при любых

α_n, β_n, γ_n и $\theta_n\,(n \in N_0)$. Следовательно, в силу линейности и однородности уравнения (7) сумма частных решений

$$v(x,y) = \begin{cases} \alpha_0 e^{-\lambda y} + \beta_0 e^{\lambda y} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n e^{-\rho_n y} + \beta_n e^{\rho_n y})\, X_n(x), & 0 < y < q, \\ \gamma_0 cos\lambda y + \theta_0 sin\lambda y + \sum_{n=1}^{+\infty} (\gamma_n cos\rho_n y + \theta_n sin\rho_n y)\, X_n(x), & -p < y < 0, \end{cases} \tag{21}$$

также удовлетворяет уравнению (7) и граничным условиям (8).

Решая уравнения $a\frac{\partial u}{\partial x} + cu = v(x,y)$ с учетом условия (5), найдем искомую функцию

$$u(x,y) = e^{-\frac{c}{a}x}\left[\varphi(y) + \frac{1}{a}\int_0^x v(t,y)e^{\frac{c}{a}t}dt\right], \tag{22}$$

где $v(x,y)$ определяется из (21).

Теперь находим коэффициенты α_0, β_0, γ_0, θ_0 ,α_n, β_n, γ_n и θ_n. В силу (2) с учетом

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad (x,0) \in \bar{J}, \quad \lim_{y\to+0} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} u_y(x,y), \quad (x,0) \in J$$

из (22) получим

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n - \theta_n}{2}, \beta_n = \frac{\gamma_n + \theta_n}{2}, \quad n \in N_0. \tag{23}$$

В силу условия (9) и (10) из (22) с учетом (21) и (23) находим

$$u(x,y)|_{y=q} = (au_x(x,y) + cu(x,y))|_{y=q} =$$

$$= \gamma_0 ch\lambda q + \theta_0 sh\lambda q + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n ch\rho_n q + \theta_n sh\rho_n q)\cos\mu_n x$$

$$= g_0 + g_1(x) = g_{10} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} g_{1n}cos\mu_n x, \tag{24}$$

$$u(x,y)|_{y=-p} = (au_x(x,y) + cu(x,y))|_{y=-p} =$$

$$= \gamma_0 \cos\lambda p - \theta_0 \sin\lambda p + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} [\gamma_n \cos\rho_n p - \theta_n \sin\rho_n p]\cos\mu_n x =$$

$$= \psi_0 + \psi_1(x) = \psi_{10} + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}cos\mu_n x, \tag{25}$$

где

$$g_{10} = \int_0^1 g_1(x)\,dx, \quad g_{1n} = \sqrt{2}\int_0^l g_1(x)\cos\,\mu_n x dx\,. \tag{26}$$

$$\psi_{10} = \int_0^1 \psi_1(x)\,dx, \quad \psi_{1n} = \sqrt{2}\int_0^l \psi_1(x)\cos\,\mu_n x dx\,. \tag{27}$$

Удовлетворив функции (22) граничным условиям (9) и (10) с учетом (21), получим систему относительно неизвестных γ_n, θ_n и γ_0, θ_0:

$$\begin{cases} \gamma_n ch\,\rho_n q + \theta_n sh\,\rho_n q = g_{1n}\ , \\ \gamma_n cos\,\rho_n p - \theta_n sin\,\rho_n p = \psi_{1n}\,, \end{cases} \tag{28}$$

Если определитель системы (28)

$$\Delta_n(p,q) = ch\ \rho_n q \sin\ \rho_n p + sh\ \rho_n q \cos\ \rho_n p \neq 0 \quad \text{при всех} \quad n \in N_0, \tag{29}$$

то она имеет единственное решение

$$\gamma_n = \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}\sin\ \rho_n p + \psi_{1n} sh\ \rho_n q\right], \theta_n = \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}\cos\ \rho_n p - \psi_{1n} ch\ \rho_n q\right]. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (23) получим

$$u(x,y) = \varphi(y)e^{-\frac{c}{a}x} + \left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right)\frac{[g_{10}\Delta_0(p,y) + \psi_{10} sh\lambda(q-y)]}{c\Delta_0(p,q)} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}\Delta_n(p,y) + \psi_{1n} sh\rho_n(q-y)\right]\int_0^x e^{\frac{c}{a}t}\cos\rho_n t\,dt \qquad y > 0, \tag{31}$$

$$u(x,y) = \varphi(y)e^{-\frac{c}{a}x} + \left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right)\frac{[g_{10}\sin\lambda(p+y) + \psi_{10}\Delta_0(-y,q)]}{c\Delta_0(p,q)} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}\sin\rho_n(p+y) + \psi_{1n}\Delta_n(-y,q)\right]\int_0^x e^{\frac{c}{a}t}\cos\rho_n t\,dt \qquad y < 0, \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta_n(p,y) = ch\rho_n y\ \sin\rho_n p + sh\rho_n y \cos\ \rho_n p\ , \qquad 0 < y < q\,,\\
&\Delta_n(-y,q) = sh\rho_n q\cos\ \rho_n y - ch\rho_n q\ \sin\ \rho_n y\ , \quad -p < y < 0\,,\ n \in N_0.
\end{aligned} \tag{33}$$

Критерий единственности решения задачи C

Теорема 1. *Если существует решение задачи* C*, то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* $n \in N_0$ *выполнены условия* (29)*.*

Доказательство. Пусть $v(x,y)$ — решение однородной задачи (8)-(10) для уравнения (7) и $\nu(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \overline{DD_0} \cup \overline{CC_0}) \cap C^{2,2}_{x,y}(D_1 \cup D_2)$. Следуя работам [17], [18] введем функции

$$v_n(y) = \int_0^1 v(x,y)X_n(x)dx = \sqrt{2}\int_0^1 v(x,y)\cos\ \rho_n x dx. \tag{34}$$

где $\left\{1,\ \sqrt{2}\cos\rho_n x\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует полный ортонормированный базис в $L_2[0,1]$.

На основании (34) введем функции

$$v_n(y) = \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} v(x,y)\cos\ \rho_n x\,dx, \tag{35}$$

где ε — достаточно малое число.

Дифференцируя равенство (35) дважды по y при $y > 0$ и $y < 0$ с учетом уравнения (7), а затем, интегрируя по частям дважды в интегралах, содержащих

производную v_{xx} и переходя к пределу при $\varepsilon > 0$ с учетом граничных условий (8), получим

$$\begin{cases} v_n''(y) - \rho_n^2 v_n(y) = 0, & 0 < y < q, \\ v_n''(y) + \rho_n^2 v_n(y) = 0, & -p < y < 0, \end{cases} \tag{36}$$

где $\rho_n^2 = \lambda^2 + \mu_n^2$, $\mu_n = \pi n$, $n \in N_0$.

Общее решения дифференциального уравнения (36) определяется по формуле (19) и (20).

Пусть теперь $g(x) = \psi(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0,1]$ и выполнены условия (29) при всех $n \in N_0$. Тогда в силу (9), (10) при $g_1(x) \equiv 0$ и $\psi_1(x) \equiv 0$ из (26), (27) имеем $g_{1n} \equiv 0$, $\psi_{1n} \equiv 0$, при всех $n \in N_0$. Отсюда следует, что $v_n(y) = 0$ на [-p,q] при всех $n \in N_0$. Следовательно, в силу (34) имеем

$$\sqrt{2}\int_0^1 v(x,y)\cos\rho_n x dx = 0, \quad n \in N_0.$$

Отсюда, в силу полноты функции $\left\{1, \sqrt{2}\cos\rho_n x\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(0,1)$ заключаем, что $v(x,y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-p,q]$. Поскольку функция $v(x,y)$ непрерывна на $\bar{D}$, то $v(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Отсюда, в силу $\varphi(y) \equiv 0$ из (22) следует, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$. Следовательно, задача C единственна при выполнении условия (29) при всех $n \in N_0$.

Естественно возникает вопрос о существовании нулей выражения $\Delta_m(p,q) = 0$. С этой целю, перепишем (29) в следующем виде:

1) при $m = 0$

$$\Delta_0(p,q) = \sqrt{ch^2\lambda q + sh^2\lambda q}\,\sin(\pi m p\theta_0 + \nu_0), \tag{37}$$

2) при $m \in N$

$$\Delta_m(p,q) = \sqrt{ch^2\rho_m q + sh^2\rho_m q}\,\sin(\pi m p\theta_m + \nu_m), \tag{38}$$

где $\theta_m = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi m}\right)^2}$, $\nu_m = \arcsin\frac{sh\rho_m q}{\sqrt{ch^2\rho_m q + sh^2\rho_m q}}$, $\rho_m^2 = \lambda^2 + \mu_m^2$.

Следствие 1. $\Delta_m(p,q) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$p = \frac{n}{\lambda} - \frac{\nu_0}{\lambda} \qquad m = 0, \quad n \in N; \tag{39}$$

$$p = \frac{n}{m\theta_m} - \frac{\nu_m}{m\pi\theta_m}, \quad m, n \in N. \tag{40}$$

Если при некоторых p, q и $n = m \in N_0$ нарушено условие (29), т.е.$\Delta_m(p,q) = 0$, то однородная задача (2) – (6) (где $g(x) = \psi(x) \equiv 0$, $\varphi(y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_m(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2}C_m sh\,\rho_m(q-y)\cos\mu_m x, & 0 < y < q, \\ \sqrt{2}C_m\Delta_m(-y,q)\cos\mu_m x, & -p < y < 0. \end{cases} \tag{41}$$

$C_m \neq 0$ — произвольная постоянная.

Легко установить, что построенная функция (45) удовлетворяет (2), (3) и однородными условиями (4)-(6). □

Существование решения задачи

Решение задачи C при условии (29) получено формально в виде сумм ортогональных рядов (31) и (32). Поскольку $\Delta_n(p,q)$ входит в знаменатель коэффициентов этих рядов, то для обоснования существования решения задачи C необходимо показать существование чисел p и q таких, что при больших n выражение $\Delta_n(p,q)$ отделено от нуля. В противном случае может возникнуть проблема малых знаменателей [20], [21].

Лемма 1. *Если* $\lambda = 0$, $p \in N$, *то при любом* $q > 0$ *существуют постоянные* $C_1 = C_1(q) > 0$, *такая, что при всех* $n_0 \in N$, *справедлива оценка*

$$\begin{array}{l} |\Delta_0(p,q)| \geq C_1 > 0\,, \quad n = 0, \\ |\Delta_n(p,q)| \geq C_1 e^{\pi n q} > 0\,,\ C_1 = const > 0, \quad n \in N. \end{array} \tag{42}$$

Лемма 2. *Пусть* $\lambda > 0$ *и* p — *любое рациональное число, т.е.* $p = \frac{\sigma}{\omega}$, $(\sigma,\omega) = 1$, $\frac{\sigma}{\omega} \notin N_0$, $(\omega,4) = 1$. *Тогда существуют положительные постоянные* $q_0 = q_0(p)$, $C_2 = C_2(q) > 0$, *такие что при всех* $q > q_0$ *и* $n \in N_0$, *справедлива оценка*

$$|\Delta_n(p,q)| \geq C_2 e^{\pi n q} > 0\,. \tag{43}$$

Лемма 3. *Если* $p > 0$ *является любым иррациональным алгебраическим числом степени* $m \geq 2$, *то существует положительные постоянные* q_1 *и* C_3, *такие, что при всех* $q > q_1$ *и* $n \in N_0$, *справедливы оценки*

$$\begin{cases} |\Delta_n(p,q)| \geq C_3 e^{\pi n q}/n^{\delta+1} & m > 2, \\ |\Delta_n(p,q)| \geq C_3 e^{\pi n q}/n & m = 2, \end{cases} \tag{44}$$

где $\delta > 0$ — *достаточно малое число.*

Лемма 1- 3 доказываются точно также как в работах [22], [26]. Если выполнены условия (29), (46)-(48), то на основании частных решений (16), (19), (20), (21) с учетом (30) решение задачи C можно представить в виде

$$u(x,y) = \varphi(y)\, e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c}\upsilon_0(y)\left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n(y)\cdot\int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)}\cos\mu_n t\,dt =$$

$$= \varphi(y)\, e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c}\upsilon_0(y)\left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right) + \upsilon(x,y)\,, \tag{45}$$

где

$$\upsilon(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon_n(y)\cdot\int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)}\cos\mu_n t\,dt\,, \tag{46}$$

$$\upsilon_n(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}\Delta_n(p,y) + \psi_{1n}sh\lambda_n(q-y)\right], & 0 < y < q, \\ \frac{1}{\Delta_n(p,q)}\left[g_{1n}sin\lambda_n(p+y) + \psi_{1n}\Delta_n(-y,q)\right], & -p < y < 0, \quad n \in N_0. \end{cases} \tag{47}$$

здесь $\Delta_n(p,y)$ и $\Delta_n(-y,q)$ определяется из (33).

Теперь покажем, что ряд (50) при определенных условиях относительно заданной функции $g(x)$ и $\psi(x)$ сходится абсолютно и равномерно на замкнутой

области $\bar{D}$ и допускает почленное дифференцирование по x и y дважды в замкнутых областях D_1 и D_2.

Предварительно на основании лемм 1-3 установим оценки для коэффициентов $\upsilon_n(y)$ и их производных до второго порядка включительно.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия одной из лемм 1-3. Тогда при всех* $n > n_0$ *имеют место оценки:*

$$|\upsilon_n(y)| \le M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \ |\upsilon_n'(y)| \le M_2 n (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, q], \tag{48}$$

$$|\upsilon_n''(y)| \le M_3 n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \ y \in [0, q], \ |\upsilon_n''(y)| \le M_4 n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \ y \in [-p, 0], \tag{49}$$

где $M_i \ (i = \overline{1,4})$ *— положительные постоянные.*

Доказательство. Учитывая оценку (46)-(47) с учетом (19), (30) из (51) имеем

$$|\upsilon_n(y)| \le \left|\frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| |\Delta_n(p,y)| + \left|\frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| |sh\lambda_n(q-y)| \le M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \ y \in [0,q],$$

$$|\upsilon_n(y)| \le \left|\frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| |sin\lambda_n(p+y)| + \left|\frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| |\Delta_n(-y,q)| \le$$
$$\le M_1 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \ y \in [-p, 0].$$

Из последнего следует справедливость первого неравенства (52).

Чтобы доказать вторую оценку (52) найдем производную функций (51)

$$\upsilon_n'(y) = \begin{cases} \frac{\lambda_n}{\Delta_n(p,q)} \left[g_{1n} \Delta_n^{(1)}(p,y) - \psi_{1n} ch\lambda_n (q-y) \right], & 0 < y < q, \\ \frac{\lambda_n}{\Delta_n(p,q)} \left[g_{1n} cos\lambda_n (p+y) - \psi_{1n} \Delta_n^{(1)}(-y,q) \right], & -p < y < 0, \end{cases} \tag{50}$$

где

$$\Delta_n^{(1)}(p,y) = sh\lambda_n y \, sin\lambda_n p + ch\lambda_n y cos\, \lambda_n p \ , \quad y > 0,$$
$$\Delta_n^{(1)}(-y,q) = sh\lambda_n q \, sin\, \lambda_n y + ch\lambda_n q \cos\, \lambda_n y \ , \ y < 0.$$

Учитывая оценку (47) из (50) находим

$$|\upsilon_n'(y)| \le \left|\frac{\lambda_n g_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| \cdot \left|\Delta_n^{(1)}(p,y)\right| + \left|\frac{\lambda_n \psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| |-ch\lambda_n(q-y)| \le$$
$$\le nM_2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [0,q],$$
$$|\upsilon_n'(y)| \le \left|\frac{g_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| \cdot |cos\lambda_n(p+y)| + \left|\frac{\psi_{1n}}{\Delta_n(p,q)}\right| \left|\Delta_n^{(1)}(-y,q)\right| \le$$
$$\le nM_2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, 0].$$

Тогда из формулы (50) на основании (46)-(47) получаем вторую оценку (52).

Заметим, что функции (51) удовлетворяют равенствам (4). Отсюда в силу (52) следует справедливость оценок (53). □

Лемма 5. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда при всех* $n > n_0$ *имеют место оценки:*

$$|\upsilon_n(y)| \le M_5 n^{\delta+1} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad |\upsilon_n'(y)| \le M_6 n^{\delta+2} (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|), \quad y \in [-p, q],$$

$|v_n''(y)| \le M_7 n^{\delta+3}(|g_{1n}| + |\psi_{1n}|)$, $y \in [0,q]$, $|v_n''(y)| \le M_8 n^{\delta+3}(|g_{1n}| + |\psi_{1n}|)$, $y \in [-p,0]$,

где M_i $(i = \overline{5,8})$ — *положительные постоянные.*

Доказательство леммы 5 аналогично доказательству леммы 4.

В силу леммы 4 ряд (50) и его производные первого и второго порядка при $(x, y) \in D$, мажорируется числовым рядом

$$M_9 = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^2 (|g_{1n}| + |\psi_{1n}|). \tag{51}$$

Лемма 6. *Пусть функции* $g_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi(y)$ *удовлетворяют условиям* $g_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(y) \in C^2[-p,q]$, $g_1(0) = \psi_1(0) = g_1''(0) = \psi_1''(0) = 0$, $g_1(1) = \psi_1(1) = g_1''(1) = \psi_1''(1) = 0$. *Тогда справедливо следующее представление:*

$$g_{1n} = g_{1n}^{(4)} \Big/ \mu_n^4, \quad \psi_{1n} = \psi_{1n}^{(4)} \Big/ \mu_n^4, \quad n \in N_0, \tag{52}$$

где $g_{1n}^4 = \sqrt{2}\int_0^1 g_1^4(x)\cos\mu_n x dx$, $\psi_{1n}^4 = \sqrt{2}\int_0^1 \psi_1^4(x)\cos\mu_n x dx$ *при этом*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|g_{1n}^{(4)}\right|^2 \le \left\|g_1^{(4)}(x)\right\|^2_{L_2[0,1]}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\psi_{1n}^{(4)}\right|^2 \le \left\|\psi_1^{(4)}(x)\right\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{53}$$

Доказательство. Проинтегрируем интеграл из формул (26), (27) по частям четырежды. Тогда, учитывая, что $g_1^{(i)}(k) = \psi_1^{(i)}(k) = 0$, $k = 0,1$; $i = 1,3$, получим

$$g_{1n} = \sqrt{2}\int_0^1 g_1(x)\cos\mu_n x dx = -\frac{\sqrt{2}}{\mu_n^4}\int_0^1 g_1^{(4)}(x)\cos\mu_n x dx = \frac{g_{1n}^{(4)}}{\mu_n^4},$$

$$\psi_{1n} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi_1(x)\cos\mu_n x dx = -\frac{\sqrt{2}}{\mu_n^4}\int_0^1 \psi_1^{(4)}(x)\cos\mu_n x dx = \frac{\psi_{1n}^{(4)}}{\mu_n^4},$$

где $g_1(x) = ag'(x) + cg(x)$, $\psi_1(x) = a\psi'(x) + c\psi(x)$.

Оценки (53) представляют собой неравенства Бесселя из теории рядов Фурье. □

В силу равенств (52) и оценок (53) ряд (51) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$M_{10} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\left|g_{1n}^{(4)}\right| + \left|\psi_{1n}^{(4)}\right|\right). \tag{54}$$

Тогда на основании сходимости ряда (54), в силу признака Вейерштрасса, абсолютно и равномерно сходится ряд (52) в замкнутой области $\bar{D}$. Этот ряд допускает почленное дифференцирование по x и y дважды в замкнутых областях $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$.

Непосредственной подстановкой (49) в уравнение (1) убеждаемся в том, что функция $u(x,y)$ определённая формулой (49), удовлетворяет (1), (4)-(7) и принадлежит классу (2).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(y) \in C^2[-p, q]$ *и функции* $g_1(x)$, $\psi_1(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 6 и выполнены условия одной из лемм 1 или 2. Тогда, если* $\Delta_k(p, q) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$, *то существует единственное решение задачи* C *и оно определяется по формуле* (49); *если* $\Delta_k(p, q) = 0$ *при* $k = m = k_1, k_1, \ldots, k_r \leq k_0$, $r \in N$, *то задача разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$g_{1k} = \sqrt{2}\int_0^1 g_1(x)\cos\mu_k x dx = 0, \qquad \psi_{1k} = \sqrt{2}\int_0^1 \psi_1(x)\cos\mu_k x dx = 0, \quad k = k_1, k_2, ..., k_r$$

и решение в этом случае определяется в виде

$$u(x, y) = \varphi(y)\, e^{-\frac{c}{a}x} + \frac{1}{c}v_0(y)\left(1 - e^{-\frac{c}{a}x}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{a}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + ... + \sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r-1} + \sum_{k=k_r+1}^{+\infty}\right) v_k(y)\int_0^x e^{\frac{c}{a}(t-x)}\cos\mu_k t\, dt + \sum_m H_m u_m(x, y), \quad (55)$$

в последней сумме переменная m *принимает значения* $k_1, k_2, ..., k_r$. *Если в конечных суммах* (55) *верхний предел меньше нижнего, такие суммы считаются равными нулю, здесь* H_m — *произвольные постоянные,* $u_m(x, y)$ *и* $v_k(y)$ *соответственно определяется из* (45) *и* (51). *Функция* $u(x, y)$ *принадлежит классу* (2).

Теорема 3 (устойчивость). *Пусть выполнены условии теоремы 2, тогда для решения задачи* C *(см.*(51)*) справедливы оценки:*

$$\|u(x, y)\|_{L_2[0,1]} \leq M_{11}\left(\|\varphi(y)\|_{L_2[0,q]} + \|g_1(x)\|_{L_2[0,1]} + \|\psi_1(x)\|_{L_2[0,1]}\right),$$

$$\|u(x, y)\|_{C(\bar{D})} \leq M_{12}\left(\|\varphi(y)\|_{C[0,1]} + \|g_1'(x)\|_{C[0,1]} + \|\psi_1'(x)\|_{C[0,1]}\right),$$

где $M_j (j = 11, 12)$ — *положительные постоянные.*

Теорема 3 доказывается аналогично как в работе [26] с использованием неравенств Коши-Буняковского и Бесселя.

Заключение

В последние годы возник интерес исследованию краевых задач методом спектрального анализа [17], [18]. Однозначная разрешимость прямых и обратных задач для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов второго порядка в прямоугольной области были изучены в работах [19–22]. Как известно, что исследования по краевым задачам для уравнения эллиптико-гиперболического типа дробного порядка не проводились ранее. Исходя из этого, в данной работе мы исследовали задачи граничным условием второго рода для уравнения эллиптико-гиперболического типа третьего порядка в прямоугольной области. При обосновании равномерной

сходимости ряда Фурье установлены оценки малых знаменателей об удаленности от нуля с соответствующей асимптотикой, установлен критерий единственности.

Список литературы

1. Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа // *Сибирский математический журнал*, 1961, С. 7-19.
2. Салахитдинов М. С. *Уравнение смешанно-составного типа.* Узбекистан. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
3. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа.* Узбекистан. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.
4. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Узбекистан. Ташкент: Фан, 1986. 240 с.
5. Джохадзе О. М. Влияние младших членов на корректность постановки характеристических задач для гиперболических уравнений третьего порядка // *Мат. заметки*, 2003. Т. 74, №4, С. 517–528.
6. Кожанов А. И. Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка // *Матем. Сборник*, 1982. Т. 118(160), №4(8), С. 504-522.
7. Chen S.X. Mixed type equations in gas dynamics // *Quart. Appl. Math*, 2010. vol. LVXIII, no. 3, pp. 487–511.
8. Елеев В. А., Кумыкова С. К. Внутренне краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2010. Т. 5, №37, С. 5–14.
9. Islomov B. I, Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type // *Labachevskii Journal of Mathematics*, 2020. vol. 41, no. 1, pp. 32–38.
10. Islomov B., Usmonov B. Nonlocal Boundary Value Problems for a Third Order Equation of Elliptic-Hyperbolic Type // *AIP Conference Proceedings*, 2024. Т. 3004, №040016-1-040016-10.
11. Кожанов А. И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, не разрешенных относительно старшей производной // *Дифференциальные уравнения*, 1994. Т. 35, №2, С. 359–376.
12. Михайлов В. П. О первой краевой задаче для одного класса гипоэллиптических уравнений // *Мат. сборник*, 1964. Т. 63, №105, С. 238-264.
13. Zikirov O. S. A nonlocal boundary value problem for third order linear partial differential equation of composite type // *Math. Model. and Anal.*, 2009. vol. 14, no. 3, pp. 407–421.
14. Islomov B. I, Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic hyperbolic equation with variable coefficients // *Electron. J. Diff. Equ.*, 2015. no. 221, pp. 1–10.
15. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K. Boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic equatons in infinite three dimensional domains third order // *Lobachevckii Journal of Mathematics*, 2020. vol. 41, no. 5, pp. 926–944.
16. Абдуллаев О. Х., Юлдашев Т. К. Обратные задачи для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с участием оператора Римана–Лиувилля // *Лобачевский мат. журнал*, 2023. Т. 44, №3, С. 1080–1090.
17. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // *Дифференциальные уравнения*, 1999. Т. 38, №8, С. 1094–1100.
18. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // *Доклады РАН*, 2007. Т. 413, №1, С. 23–26.
19. Хачев М. М. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев-Бицадзе в прямоугольной области // *Дифференциальные уравнения*, 1978. Т. 14, №1, С. 136-139.
20. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2010. №4, С. 55–62.
21. Удалова Г. Ю. Обратная задача для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // *Вестник СамГУ*, 2010. Т. 78, №4, С. 23–26.
22. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа // *Изв. Вузов. Математика*, 2011. №2, С. 71–85.

23. Сабитов К. Б. Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // *Дифференциальные уравнения*, 2011. Т. 47, №5, С. 705–713.

24. Islomov B. I., Kilishbaeva G. K. Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain // *Science and Education in Karakalpakstan*, 2022. Т. 1/2, №24, С. 32–41.

25. Salakhitdinov M. S., Karimov E. T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation // *Euroasian Mathematical Journal*, 2016. no. 1, pp. 74–83.

26. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области // *Изв. вузов. Матем.*, 2021. №3, С. 29–46.

27. Yuldashev T. K., Islomov B. I., Ubaydullaev U. Sh. ValueProblems for a Mixed Type Fractional Differential Equation with Caputo Operator // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, 2021. Т. 101, №1, С. 127–137.

Информация об авторах

Исломов Бозор Исломович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры "Дифференциальных уравнений и математической физики" Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, ORCID 0000-0002-3060-3019.

Кылышбаева Гулназ Калбаевна – аспирант кафедры "Дифференциальных уравнений и математической физики" Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, ORCID 0009-0005-9225-2508.

References

[1] Bitsadze A. V., Salaxitdinov M. S. K teorii uravneniy smeshanno-sostavnogo tipa. [On the theory of equations of mixed - composite type]. Siberian Mathematical Journal. Novosibirsk, 1998, vol. 2. No. 1. pp. 7–19.(In Russian).

[2] Salakhitdinov M. S. Uravnenie smešanno-sostavnogo tipa [Equation of mixed-composite type]. Uzbekistan. Tashkent: Fan, 1974. 156 p.(In Russian).

[3] Dzhuraev T. D. Kraevye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipa. [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite type] Tashkent, 1979, 240 p. (In Russian).

[4] Dzhuraev T. D., Sopuyev A., Mamajonov M. Krayevi zadachi dlya uzravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations.] Tashkent, 1986, 220 p. (In Russian).

[5] Djoxadze O. M. Vliyanie mladshix chlenov na korrektnost postanovki xarakteristicheskix zadach dlya giperbolicheskix uravneniy tretego poryadka. [The influence of minor terms on the correctness of the formulation of characteristic problems for third-order hyperbolic equations] Mat. zametki, 2003, vol. 74, no. 4. pp. 517—528.(In Russian).

[6] Kozhanov A. I. Smeshannaya zadacha dlya nekotorix klassov nelineynix uravneniy tretego poryadka [Mixed problem for some classes of third-order nonlinear equations] Matem. Sbornik, 1982, vol. 118(116), no. 4(8). pp. 504—522. (In Russian).

[7] Chen S. X. Mixed type equations in gas dynamics. Quart. Appl. Math., 2010, vol LVXIII, no. 3. pp. 487—511.

[8] Eleev V. A., Kumykova S. K. Vnutrenne kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa tretego poryadka s kratnimi xarakteristikami. [Interior boundary value problem for a third-order mixed-type equation with multiple characteristics] 2010, vol. 5, no. 37. pp. 5—14.(In Russian).

[9] Islomov B. I., Usmonov B. Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. Labachevskii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 1. pp. 32-38.(In Russian).

[10] Islomov B. I., Usmonov B. Nonlocal Boundary Value Problems for a Third Order Equation of Elliptic-Hyperbolic Type. AIP Conference Proceedings, 2024, vol 3004. 040016-1 - 040016-10.

[11] Kozhanov A. I. O Kraevix zadachax dlya nekotorix klassov uravneniy visokogo poryadka, ne razreshennix otnositelno starshey proizvodnoy. [On boundary value problems for some classes of high-order equations that are not solved with respect to the highest derivative] Sib. mat. jurnal, 1994, vol. 35, no. 2. pp. 359—376.(In Russian).

[12] Mikhailov V. P. O pervoy kraevoy zadache dlya odnogo klassa gipoellipticheskix uravneniy [On the first boundary value problem for one class of hypoelliptic equations] Mat. sbornik, 1964, vol. 63, no. 2. pp. 238—264.(In Russian).

[13] Zikirov O. S. A nonlocal boundary value problem for third order linear partial differential equation of composite type. Math. Model.and Anal., 2009, vol. 14, no. 3. pp. 407—421.

[14] Islomov B. I, Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic hyperbolic equation with variable coefficients. Electron. J. Diff. Equ, 2015, vol. 2015, no. 221. pp. 1—10.(In Russian).

[15] Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K. Boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic equations in infinite three dimensional domains third order. Lobachevckii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 5. pp. 926—944.(In Russian).

[16] Abdullaev O. Kh., Yuldashev T. K. Inverse problems for a loaded parabolic-hyperbolic equation involving the Riemann–Liouville operator. Lobachevskii Mat. Journal. 2023, vol. 44, no 3. pp. 32—41. (In Russian).

[17] Moiseev E. I. O reshenii spektralnim metodom odnoy nelokalnoy zadachi. [On the solution of one non-local problem by the spectral method] Differential Equations, 1999, vol. 35, no. 8. pp. 1094-1100.(In Russian).

[18] Sabitov K. B. Zadacha Dirixle dlya uravneniy smeshannogo tipa v pryamougolnoy oblasti. [Dirichlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain] Dokladi RAN, 2007, vol. 413, no. 1. pp. 23—26.(In Russian).

[19] Xachev M. M. Zadacha Dirixle dlya obobshennogo uravneniya Lavrentev — Bitsadze v pryamougolnoy oblasti. [Dirichlet problem for the generalized Lavrentiev-Bitsadze equation in a rectangular domain] Differential Equations, 1978, vol. 14, no. 1. pp. 136—139.(In Russian).

[20] Sabitov K. B., Safin E. M. Obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa v pryamougolnoy oblasti. [Inverse problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain] Izv. vuzov. Matem., 2010, no. 4. pp. 55—62.(In Russian).

[21] Udalova G. YU. Obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa. [Inverse problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type] Vestnik SamGU - Estestvenno-nauchnaya seriya. 2010, vol. 78, no. 4. pp. 116—122.(In Russian).

[22] Sabitov K. B., Martemyanova N. V. Nelokalnaya obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa. [Nonlocal inverse problem for a mixed type equation] Izv. Vuzov. Matematika, 2011, no. 2. pp. 71—85.(In Russian).

[23] Sabitov K. B. Kraevaya zadacha dlya uravneniy smeshanongo tipa tretego poryadka v pryamougolnoy oblasti. [Boundary value problem for third order mixed type equations in a rectangular domain] Differential Equations, 2011, vol. 47, no. 5. pp. 705—713.(In Russian).

[24] Islomov B. I., Kilishbaeva G. K. Boundary value problems for third-order mixed equations in the rectangular domain. Science and education in Karakalpakstan. 2022, vol. 101, no. 1. pp. 32—41.

[25] Salakhitdinov M. S., Karimov E. T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation. Euroasian Mathematical Journal, 2016, no. 1. pp. 74—83.

[26] Islomov B.I., Ubaydullaev U.SH. Obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s operatorom drobnogo poryadka v pryamougolnoy oblasti. Izv. vuzov. Matematika, 2021, no. 3. pp. 29—46.(In Russian).

[27] Yuldashev T. K., Islomov B. I., Ubaydullaev U. Sh. On Boundary value problems for a mixed type fractional differential equation with Caputo Operator. Bulletin of the Karaganda University Mathematics series, 2021, vol. 101, no. 1. pp. 127—137.

Information about the authors

Islomov Bozor Islomovich – DSc (Phys. & Math.), Professor of the Department of "Differential Equations and Mathematical Physics" of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-3060-3019.

Kilishbaeva Gulnaz Kalbayevna – doctoral student (PhD) of the Department of "Differential Equations and Mathematical Physics" of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Uzbekistan, ORCID 0009-0005-9225-2508.