МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-9-21
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.956.6

Посвящается 80-ию академика АН РУз Ш.А. Алимова и 70-ию профессора Р.Р. Ашурова

О гладкости одной полупериодической краевой задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченной области

***С. З. Джамалов*[1], *Б. К. Сипатдинова*[2]**

[1] Институт математики имени В.И. Романовского АН РУЗ., 100125, г. Ташкент, улица Университет, 9, Узбекистан
[2] Ташкентский государственный транспортный университет, 1000167, г. Ташкент, ул. Темирйулчилар 1, Республика Узбекистан.

Аннотация. В работе А.В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И. Франкля. Как близкие по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа второго рода в ограниченных областях исследованы в работе С. Джамалова. Для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях полупериодические краевые задачи в трёхмерном случае практически не исследованы. В данной работе исследуется единственность, существование и гладкость обобщенного решения полупериодической краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в неограниченной области. В предлагаемой статье методом интегралов энергии доказывается единственность обобщенного решения задачи. Для доказательства существования и гладкости обобщенного решения задачи использованы методы «ε-регуляризации» и априорные оценки с применением преобразования Фурье

Ключевые слова: уравнение смешанного типа второго рода, полупериодическая краевая задача, преобразование Фурье, анизотропное пространство Соболева, интеграл энергии, единственность решения, методы «ε-регуляризации», априорные оценки, существование и гладкость обобщённого решения.

Получение: 31.03.2025; Исправление: 14.04.2025; Принятие: 17.04.2025; Публикация онлайн: 18.04.2025

Для цитирования. Джамалов С. З., Сипатдинова Б. К. О гладкости одной полупериодической краевой задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2025. Т. 50. № 1. С. 9-21. EDN: DBEEJG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-9-21.

Финансирование. Работа поддержана грантом Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан № Ф-ФА-2021-424.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: sbiybinaz@mail.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-9-21
Research Article
Full text in Russian
MSC 35M10, 35M12

Dedicated to the 80th anniversary of Academician AS RUz Sh.A. Alimov and the 70th anniversary of Professor R.R. Ashurov

On the Smoothness of a Semi-Periodic Boundary Value Problem For a Three-Dimensional Equation of the Second Kind, Second Order Mixed Type in an Unbounded Domain

S. Z. Djamalov[1], B. K. Sipatdinova[2]

[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University street, 9, Uzbekistan

[2] Tashkent State Transport University, 1000167, str. Temiryulchilar, 1. Tashkent, Uzbekistan

Abstract. In the work of A.V.Bitsadze it is shown that the Dirichlet problem for a mixedtype equation is incorrect. The question naturally arises: is it possible to replace the conditions of the Dirichlet problem with other conditions covering the entire boundary, which ensure the correctness of the problem? For the first time such boundary value problems (non-local boundary value problems) for a mixed-type equation were proposed and studied in the works of F.I. Frankl. As problems for mixed-type equations of the second kind in bounded domains, which are close in formulation to those under study, are investigated in the work of S. Dzhamalov. For mixed-type equations of the second kind of the second order in unbounded domains, semi-periodic boundary value problems in the three-dimensional case have been practically not investigated. In this paper, we investigate the uniqueness, existence and smoothness of a generalized solution to a semi-periodic boundary value problem for a mixed-type equation of the second kind, second order in an unbounded domain. In this paper, we prove the uniqueness of a generalized solution to the problem using the energy integral method. To prove the existence and smoothness of a generalized solution to the problem, the methods of "ε-regularization" and a priori estimates using the Fourier transform were used.

Key words: mixed-type equation of the second kind, semi-periodic boundary value problem, Fourier transform, anisotropic Sobolev space, energy integral, uniqueness of solution, "ε-regularization"methods, a priori estimates, existence and smoothness of a generalized solution.

Received: 31.03.2025; Revised: 14.04.2025; Accepted: 17.04.2025; First online: 18.04.2025

For citation. Djamalov S. Z., Sipatdinova B. K. On the smoothness of a semi-periodic boundary value problem for a three-dimensional equation of the second kind, second order mixed type in an unbounded domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2025, **50**: 1, 9-21. EDN: DBEEJG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2025-50-1-9-21.

Funding. The work was supported by a grant from the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan No. F-FA-2021-424.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: sbiybinaz@mail.ru

Введение

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф. И. Франкля при решении газодинамической задачи [2]. Как близкие по постановке к изучаемым, задачи для уравнения смешанного типа второго рода в ограниченных областях исследованы в работах [3–7], [15].

Такие задачи для уравнения смешанного типа первого рода в трехмерном случае (в частности, для уравнения Трикоми) в неограниченной области изучен в работе [8].

Для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях полупериодические краевые задачи в трёхмерном случае практически не исследованы.

С этой целью в данной работе изучается однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной полупериодической краевой задачи для трёхмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченной области.

Пусть Ω-область из пространства $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$, с достаточно гладкой границе $\partial\Omega$. В области

$$G = \Omega \times (0, T) \times \mathbb{R} = Q \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in \Omega, 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

$$Q = \Omega \times (0, T),\ \ S = \partial Q.$$

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода второго порядка:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a(x, t)u_t + c(x, t)u = f(x, t, z), \tag{1}$$

где $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + u_{zz}$ – оператор Лапласа. Пусть $k(0) = k(T) = 0$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [7].

Пусть все коэффициенты уравнения (1) – достаточно гладкие функции в области $\overline{Q}$, а именно $k(t) \in C^2[0, T]$, $a(x, t), c(x, t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C(\overline{Q})$.

В дальнейшем для решения поставленной задачи нам необходимо ввести определения нескольких функциональных пространств и обозначений.

Обозначим через

$$\hat{u}(x, t, \lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x, t, z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$, а через

$$u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda)\, e^{i\lambda z} d\lambda$$

– обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим пространство $W_2^{2,3}(G)$ с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda, \tag{2}$$

а норма в пространстве Соболева $W_2^2(Q)$ определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2\, dxdt,$$

где α – мультииндекс, D^α – обобщенная производная по переменным x и t, здесь $u_x^2 = \sum\limits_{i=1}^n u^2_{x_i}$, $u^2_{xx} = \sum\limits_{i=1}^n u^2_{x_i x_i}$.

Очевидно, что пространство $W_2^{2,3}(G)$ с нормой (2) является гильбертовым пространством [10–13].

Постановка задачи и основной результат

Постановка задачи. Найти обобщённое решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим полупериодическим краевым условиям

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{3}$$

$$u|_S = 0. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$u(x,t,z) \text{ и } \quad u_y(x,t,z) \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{5}$$

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, с условиями (3),(5).

Теорема 1. *(Основной результат). Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (1), *кроме того, пусть:* $2a(x,t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \ge \delta_1 > 0$, $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \ge \delta_2 > 0$, *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu > 0$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда для любой функции* $f(x,t,z) \in W_2^{1,3}(G)$, *такой, что* $f(x,0,z) = f(x,T,z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи* (1)-(5) *из пространства* $W_2^{2,3}(G)$ *и для решения задачи* (1)-(5) *справедливы следующие оценки:*

$$\text{I}).\ \|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} \le c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)},$$

$$\text{II}).\ \|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} \le c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}.$$

В дальнейшем через c_i – обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля.

Единственность решения задачи, связанной с преобразованием Фурье

Применяя для задачи (1)-(5) преобразование Фурье по переменным z, получим в области $Q = \Omega \times (0, T)$ следующую задачу

$$L\hat{u} = k(t)\hat{u}_{tt} - \Delta\hat{u} + a(x,t)\,\hat{u}_t + \left(c(x,t) + \lambda^2\right)\hat{u} = \hat{f}(x,t,\lambda), \tag{6}$$

$$\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}|_{t=T}, \tag{7}$$

$$\hat{u}|_S = 0, \tag{8}$$

где $\lambda \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$; $\hat{f}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$ – преобразование Фурье по переменной z функции $f(x,t,z)$.

В работах [5–8] в случае, когда $\lambda = 0$ изучена однозначная разрешимость обобщённого решения задачи (6)-(8) в многомерных пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q), m = 0, 1, 2, ...$.

В случае, когда $\lambda \neq 0$ решение задачи (6)-(8) $\hat{u}(x,t,\lambda)$ и правая часть уравнения (6) зависят от параметра λ. С возрастанием $|\lambda| \to \pm\infty$ может расти правая часть уравнения (6). Поэтому возникает вопрос как в этом случае можно получить априорные оценки, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (6)-(8)?

Сначала при фиксированном $\lambda \in R$, используя результаты работы [5–7], получим необходимые оценки для решения задачи (6)-(8).

В дальнейшем эти результаты используем для исследования задачи (1)-(5) в неограниченных областях.

Теорема 2. *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (1), *кроме того, пусть:* $2a(x,t) - k_t(t) + \mu k(t) \ge \delta_1 > 0$, $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \ge \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = const > 0$, $c(x,0) \le c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$ *Тогда, если для любой функции* $\hat{f}(x,t,\lambda) \in L_2(Q)$ *существует решение задачи* (6)-(8) *из пространства* $W_2^2(Q)$, *то оно единственное.*

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (6)-(8) с помощью метода интеграла энергии.

Пусть существует решение задачи (6)-(8) из $W_2^2(Q)$.

Рассмотрим тождество

$$\left(L\hat{u}, (2\hat{u}_t + \mu\hat{u})\right)_0 = \left(\hat{f}, (2\hat{u}_t + \mu\hat{u})\right)_0, \tag{9}$$

где $\mu \in (0, 1)$.

В силу условий теоремы 2 и интегрируя по частям тождество (9), легко получить следующее неравенство

$$
\begin{gathered}
\int\limits_{Q} L\hat{u}\cdot\,(2\hat{u}_t+\mu\hat{u})dxdt \;\geq\; \int\limits_{Q}\{(2a(x,t)-k_t(t)+\mu k(t))\cdot\hat{u}_t^2+\mu\;\hat{u}_x^2+\\
+(\mu\, c(x,t)-c_t(x,t)+\mu\,\lambda^2)\cdot\hat{u}^2\}\,dQ-2\sigma\|\hat{u}_t\|_0^2-\mu^2\sigma^{-1}\|k_t\|^2_{C[0,T]}\|\hat{u}\|_0^2-\\
-\mu^2\sigma^{-1}\|a\|^2_{C(Q)}\|\hat{u}\|_0^2+\int\limits_{\partial Q}\{k(t)\hat{u}_t^2e_t-\hat{u}_x\hat{u}_te_x+\hat{u}_x^2e_t+(c+\lambda^2)\hat{u}^2e_t\}dS\geq\\
\geq\delta_0\int\limits_{Q}\{\hat{u}_t^2+\;\hat{u}_x^2+\hat{u}^2\}dxdt,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где $\vec{e}=(e_t=\cos(\vec{e},t);e_{x_i}=\cos(\vec{e},x_i))$, $\vec{e}$ – единичный вектор внешней нормали к ∂Q. Условия теоремы 2 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Так как решение задачи (6)-(8) удовлетворяет краевым условиям (7), (8), то граничные интегралы обратятся в нуль. В правой части неравенства (10), используя неравенство Коши, с σ [14], учитывая условия теоремы 2 и выбирая коэффициенты $\delta_1-4\sigma\geq\delta_{10}>0$, $\delta_2-\mu^2\sigma^{-1}K\geq\delta_{20}>0$, $K=max\{\|k_t\|^2_{C[0,T]},\|a\|^2_{C(Q)}\}$, $\delta_0=min\{\delta_{10},\mu,\delta_{20},\lambda=0\}$, получим из неравенства (10) необходимую первую априорную оценку

$$
\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)}\leq c_1\left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}, \tag{11}
$$

из которой следует единственность решения задачи (6)-(8) из $W_2^2(Q)$.

Теорема 2 доказана. $\square$

Уравнение составного типа с малым параметром

Разрешимость задачи (6)-(8) докажем методом "ε-регуляризации", а именно в области $Q=\Omega\times(0,T)$ рассмотрим семейство уравнений составного типа с малым параметром

$$
L_\varepsilon\hat{u}_\varepsilon=-\varepsilon\frac{\partial\triangle\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}+L\hat{u}_\varepsilon=\hat{f}(x,t,\lambda) \tag{12}
$$

и с полупериодическими краевыми условиями

$$
D_t^q\;\hat{u}_\varepsilon|_{t=0}=D_t^q\;\hat{u}_\varepsilon|_{t=T}\,;q=0,1,2, \tag{13}
$$

$$
\hat{u}_\varepsilon|_S=0, \tag{14}
$$

где ε – малое положительное число, $D_z^q w=\frac{\partial^q w}{\partial z^q},\ q=1,2;\ D_z^0 w=w$.

Ниже используем систему уравнений составного типа с малым параметром (12) в качестве "ε-регуляризирующего" уравнения для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (6) [6–9], [16].

Определим пространство функции

$$
W(Q)=\{\hat{u}_\varepsilon|\,;\hat{u}_\varepsilon\in W_2^2(Q),\ \frac{\partial\triangle\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\in L_2(Q)\},
$$

удовлетворяющее соответствующим условиям (13),(14) с конечной нормой

$$
|||\hat{u}_\varepsilon|||^2_W=\varepsilon\left\|\frac{\partial\triangle\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2+\|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2. \tag{15}
$$

Очевидно, что пространство $W(Q)$ с нормой (15) является гильбертовым пространством [13], [14].

Определение 2. Решением задачи (12)-(14) будем называть функцию $\{\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\} \in W(Q)$, удовлетворяющую уравнению (12).

Теорема 3. *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (12), *кроме того, пусть*
$2a(x,t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0,\ \mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0, a_t(x,t) \leq a_0 < 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu \in (0,1)$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда для любой функции* $\hat{f}(x,t,\lambda) \in W_2^1(Q)$, *такой, что* $\hat{f}(x,0,\lambda) = \hat{f}(x,T,\lambda)$, *существует единственное обобщенное решение задачи* (12)-(14) *из пространства* $W(Q)$ *и для него справедливы следующие оценки*
III). $\varepsilon\left(\|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|\hat{u}_{\varepsilon xt}\|_0^2\right)\|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 \leq c_3 \left\|\hat{f}\right\|_0^2$,
IV). $\varepsilon\left\|\frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_4 \left\|\hat{f}\right\|_1^2$.

Доказательство. Доказательство теоремы 3 осуществляется поэтапно, с использованием метода Галеркина и соответствующих априорных оценок [5–7]. *Сначала докажем* III)*—третью оценку.*

Рассмотрим тождество:

$$\int\limits_Q L_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon)dxdt = \int\limits_Q \hat{f} \cdot (2\hat{u}_{\varepsilon t} + \mu \hat{u}_\varepsilon)dxdt. \tag{16}$$

Интегрируя по частям тождество (16), учитывая условия теоремы 3 и краевые условия (13), (14), нетрудно получить III)-третью априорную оценку, аналогичную оценке (11), откуда следует единственность обобщенного решения задачи (12)-(14).

Теперь докажем справедливость IV)*—четвертой оценки.*

Для этого рассмотрим тождество:

$$-2\int\limits_Q L_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot P\hat{u}_\varepsilon dxdt = -2\int\limits_Q \hat{f} \cdot P\hat{u}_\varepsilon dxdt, \tag{17}$$

где $P\hat{u}_\varepsilon = (\frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} - \mu\, \hat{u}_{\varepsilon tt} + \frac{\mu}{2}\hat{u}_{\varepsilon xx})$.

Интегрируя по частям (17), с учетом условий теоремы 3 и краевых условий (13),(14), получим следующее неравенство

$$\begin{gathered} c_4\left(\left\|\hat{f}_t\right\|_0^2 + \left\|\hat{f}\right\|_0^2\right) \geq \varepsilon\left\|\frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2 + \int\limits_Q \{(2a(x,t) - k_t(t) + \mu k(t)) \cdot \hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + \\ +(2a(x,t) - k_t(t) + \mu k(t)) \cdot \hat{u}_{\varepsilon xt}^2 + \mu\, \hat{u}_{\varepsilon xx}^2 + (\mu\, c(x,t) - c_t(x,t))\hat{u}_{\varepsilon t}^2 + \\ +2\mu\, \lambda^2 \hat{u}_{\varepsilon t}^2 + 2\mu\, \lambda^2 \hat{u}_{\varepsilon x}^2\}dQ + \\ + \int\limits_{\partial Q} \{(k(t)\hat{u}_{\varepsilon tt}^2 + k(t)\hat{u}_{\varepsilon xt}^2 + 2\hat{u}_{\varepsilon xx}\hat{u}_{\varepsilon tt} - 2a(x,t)\hat{u}_{\varepsilon t}\hat{u}_{\varepsilon tt} + \hat{u}_{\varepsilon xx}^2 - \hat{u}_{\varepsilon xt}^2 + \\ +2c(x,t)\hat{u}_\varepsilon\,(\hat{u}_{\varepsilon tt} + \hat{u}_{\varepsilon xt}))e_t + (-2k(t)\hat{u}_{\varepsilon tt}\hat{u}_{\varepsilon xt} - 2\hat{u}_{\varepsilon tt}\hat{u}_{\varepsilon xt} + 2a(x,t)\hat{u}_{\varepsilon t}\hat{u}_{\varepsilon xt})e_x\}dS - \\ -7\sigma^{-1}\mu^2 K \|\hat{u}_{\varepsilon xx}\|_0^2 - \sigma\|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 = \sum_{i=1}^{3} J_i, \end{gathered} \tag{18}$$

где σ, σ^{-1} – коэффициенты неравенства Коши с σ, $J_i (i = 1,3)$ – интегралы по области, J_2 – интеграл по границе. Учитывая условия теоремы 3, краевые условия (13), (14), что $J_i > 0$ и $J_2 = 0$. Теперь выбирая коэффициенты $\mu - 7\mu^2 K\sigma^{-1} \geq \mu_0 > 0$, $\delta_1 - \sigma \geq \delta_{10} > 0$, $\delta_0 = min\{\delta_{10}, \mu_0, \delta_2, \lambda = 0\}$ и применяя неравенство Коши с σ в правую часть неравенства (18), получим необходимую четвертую априорную оценку:

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \right\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_4 \left\|\hat{f}\right\|_1^2. \tag{19}$$

Из доказанных оценок получаем однозначную разрешимость задачи (12)-(14) из пространства $W(Q)$. ***Теорема 3 доказана.*** □

Разрешимость задачи (6) - (8)

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теорем 2,3. Тогда обобщенное решение задачи* (6) - (8) *существует и оно единственно в* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (6) - (8) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 2. Теперь докажем существование решения задачи (6) - (8) в $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (12) и краевые условия (13), (14) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 3, то существует единственное обобщенное решение задачи (12)-(14) в $W(Q)$ при $\varepsilon > 0$ и для него справедливы третья и четвертая оценки. Отсюда следует, по известной теореме о компактности [15], что из множества функций $\{\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\} \to \hat{u}(x,t,\lambda)$ при $\varepsilon_i \to 0$ в $W(Q)$. Покажем, что предельная функция $\hat{u}(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $L\hat{u} = \hat{f}$ (6) почти всюду в $W_2^2(Q)$. В самом деле, так как подпоследовательность $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\}$ слабо сходится в $W(Q)$, а подпоследовательность $\{\sqrt{\varepsilon_i}\frac{\partial \triangle \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t}(x,t,\lambda)\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$ и оператор L линейный, то имеем

$$L\hat{u} - \hat{f} = L\hat{u} - L\hat{u}_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i \frac{\partial \triangle \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i \frac{\partial \triangle \hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{20}$$

Из равенства (20), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное обобщенное решение задачи (6)-(8) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ [5–9]. Таким образом, ***теорема 4 доказана.*** □

Доказательство теоремы 1

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1 об однозначной разрешимости обобщенного решения задачи (1)-(5) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.
Для доказательства теоремы 1 необходима следующая лемма.

В теореме 2 для решения задачи (6)-(8) доказана справедливость оценки (11), то есть следующее неравенство

$$\|\hat{u}\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c_1 \left\|\hat{f}\right\|_{L_2(Q)}^2.$$

Чтобы доказать, что $u_z \in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (11) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)}\, d\lambda \le$$

$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)} d\lambda = c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)},$$

откуда следуют выполнение первой априорной оценки теоремы 1 и единственность регулярного обобщенного решения задачи (1)-(5) из $W_2^{2,3}(G)$.

Так же, используя условия теоремы-3,4 при фиксированном λ, с предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, в четвертой априорной оценке нетрудно получить для решения задачи (6)-(8) выполнение следующей оценки

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)} \le c_2 \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{21}$$

Чтобы доказать, что $u_{zz} \in L_2(G)$, умножим неравенство (21) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ и, интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda$$

$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)} d\lambda = c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}.$$

Откуда следуют справедливость второй оценки теоремы 1 и существование обобщенного решения задачи (1)-(5) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.
Теорема 1 доказана.

Гладкость обобщенного решения задачи (1)-(5)

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1)-(5) в пространствах $W_2^{m+2,s}(G)$, где m, s – целые конечные числа, такие, что $m \ge 0, \quad s \ge 3$.

Ниже для простоты будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) – достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того, пусть*

$$D_t^q\, a\,|_{t=0} = D_t^q\, a\,|_{t=T},\ D_t^q\, c\,|_{t=0} = D_t^q\, c\,|_{t=T}.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{m+1,s}(G)$, *такой, что* $D_t^q\, f|_{t=0} = D_t^q\, f|_{t=T}$ $(q = 0,1,2,3,...,m)$, *существует, и причем единственное, обобщенное* *решение задачи* (1)-(5) *из пространства* $W_2^{m+2,s}(G)$, *где* s, m *– любые целые конечные положительные числа такие, что* $s \geq m+3, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Отметим, что в работе [5–7] для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (6) исследована гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи периодического типа (7),(8) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ и доказаны соответствующие оценки

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} \leq c_{m+1} \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} (m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots). \tag{22}$$

Чтобы доказать, что $D_z^{s-1}u \in L_2(Q)$,где $s \geq m+3, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, и применить теорему вложения Соболева, нам необходимо умножить неравенство (22) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^s$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2,s}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} \, d\lambda \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_{m+1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} d\lambda = c_{m+1} \|f\|^2_{W_2^{m+1,s}(G)}.$$

Отсюда получим существование единственного обобщенного решения задачи (1)-(5) из пространства $W_2^{m+2,s}(G)$.

Теорема 5 доказана. □

Заключение

В статье исследована методами ε-регуляризации и априорных оценок, с применением преобразования Фурье, однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной полупериодической краевой задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченной области.

Список литературы

1. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа // *ДАН СССР*, 1953. Т. 122, № 2, С. 167-170.
2. Франкль Ф. И. *Избранные труды по газовой динамике.* М., 1973. 711 с.
3. Терехов А. Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа / *Неклассические уравнения математической физики.* Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1985, С. 148-158.
4. Глазатов С. Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике // *Сиб. мат. журн.*, 1985. Т. 26, № 6, С. 162-164.
5. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве // *Мат. заметки СВФУ*, 2017. № 4, С. 17-28.
6. Джамалов С. З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве // *Журнал Средневолжского математического общества*, 2019. Т. 21, № 1, С. 24-33.
7. Джамалов С. З. *Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.* Ташкент, 2021. 176 с.

8. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R., Turakulov Sh. Kh. On a nonlocal boundary value problem of periodic type for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded prismatic domain // *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2021. vol. 4, no. 3, pp. 52-59.
9. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983.
10. Лионс Ж. Л., Мадженес Е. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* М.: Мир, 1971.
11. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* М.: Мир, 1965.
12. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.
13. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1988. 335 с.
14. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М., 1973. 407 с.
15. Каратопраклиева М. Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*, 1991. Т. 27, № 1, С. 68-79.
16. Кожанов А. И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: НГУ, 1990.

Информация об авторах

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0001-9392-5464.

Сипатдинова Бийбиназ Кенесбайевна – кандидат физико-математических наук, Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан, ORCID 0000-0002-7833-6992.

References

[1] Bitsadze A. V. Ill-posedness of the Dirichlet problem for equations of mixed type. Reports of the USSR Academy of Sciences, 1953. V. 122, No 2, pp. 167–170. (In Russian).

[2] Frankl F. I. Izbrannyye trudy po gazovoy dinamike [Selected works on gas dynamics]. Moscow. 1973. 711 p. (In Russian).

[3] Terekhov A.N. Nelokal'nyye krayevyye zadachi dlya uravneniy peremennogo tipa [Nonlocal boundary value problems for equations of variable type]. Nonclassical equations of mathematical physics. Novosibirsk: IM SO AN SSSR, 1985. pp.148–158. (In Russian).

[4] Glazatov S. N. Nonlocal Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations in a Rectangle. Siberian Math. J., 1985. Vol. 26, No 6, pp. 162-164. (In Russian).

[5] Dzhamalov S. Z. On well-posedness of a nonlocal boundary value problem with constant coefficients for a mixed type equation of the second kind of the second order in space. Mathematical notes of NEFU, 2017. No 4, pp. 17-28. (In Russian).

[6] Dzhamalov S. Z. On the smoothness of a nonlocal boundary value problem for a multidimensional mixed-type equation of the second kind in space. Journal of the Middle Volga Mathematics Society, 2019. Vol.21, No 1, pp. 24-33. (In Russian).

[7] Dzhamalov S.Z. Nelokal'nyye krayevyye i obratnyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa [Nonlocal boundary value and inverse problems for equations of mixed type]. Tashkent. 2021, 176 p. (In Russian).

[8] Dzhamalov S.Z., Ashurov R.R., Turakulov Sh.Kh. On a nonlocal boundary value problem of periodic type for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded prismatic domain. Bulletin of the Institute of Mathematics. 4(3). 2021. pp. 52-59.

[9] Vragov V.N. Krayevyye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, NGU, 1983. (In Russian).

[10] Lyons J.L., Magenes E. Neodnorodnyye granichnyye zadachi i ikh prilozheniya [Inhomogeneous boundary value problems and their applications]. Moscow. Mir, 1971. (In Russian).

[11] Hermander L. Lineynyye differentsial'nyye operatory s chastnymi proizvodnymi [Linear partial differential operators]. Moscow. Mir, 1965. (In Russian).

[12] Nikolsky S.M. Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. Moscow. Nauka, 1977. (In Russian).

[13] Sobolev S.L. Nekotoryye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike [Some applications of functional analysis in mathematical physics]. Moscow. Nauka. 1988. 335 p. (In Russian).

[14] Ladyzhenskaya O.A. Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow, 1973. (In Russian).

[15] Karatopraklieva M. G. On a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type. Differential Equations. 1991. vol. 27, No 1, pp. 68-79. (In Russian).

[16] Kozhanov A.I. Krayevyye zadachi dlya opredeleniya matematicheskoy fiziki nechetnogo poryadka [Boundary Value Problems for Odd-Order Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk], NSU, 1990. (In Russian).

Information about the authors

Dzhamalov Sirojiddin Zuxriddinovich 🖂 – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Chief Researcher of the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-3925-5129.

Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna 🖂 – Ph.D. (Phys. & Math.) Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-7833-6992.