



Идентификация параметров математической α -модели переноса радона в накопительной камере по данным пункта Карымшина на Камчатке

Д. А. Твёрдый^{*1}, Е. О. Макаров², Р. И. Паровик¹

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

² Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН», 683023, г. Петропавловск-Камчатский, ул. бульвар Пийпа, д. 9, Россия

Аннотация. Радон — инертный радиоактивный газ, исследования вариаций которого в сопоставлении с сейсмичностью считаются перспективными для целей разработки методик прогноза землетрясений. На полуострове Камчатка развернута сеть пунктов наблюдения, в которых с помощью накопительных камер с газоразрядными счетчиками ведется мониторинг объемной активности радона (RVA). Анализ данных RVA в рамках радонового мониторинга является одним из методов поиска предвестников сейсмических событий. Это связано с тем, что изменения напряженно-деформированного состояния геосреды, через которую протекает газ, влияют на RVA. Изменение интенсивности переноса радона вследствие изменения напряженно-деформированного состояния геосреды описывается с помощью оператора дробного дифференцирования постоянного вещественного порядка α , который связан с проницаемостью геосреды. Известно, что на RVA в накопительной емкости с датчиками влияет также кратность воздухообмена λ_0 , эффект которого необходимо учитывать в изучение процесса переноса радона. Целью исследования является изучение накопления радона в камере, которое заключается в идентификации значений параметров λ_0 и α с помощью решения соответствующей обратной задачи. В результате исследований было показано, что для эрдитарной α -модели переноса радона методом Левенберга-Марквардта с привлечением экспериментальных данных RVA можно определить оптимальные значения ее параметров λ_0 и α . Полученные модельные кривые хорошо согласуются с данными RVA, полученными в рамках хорошо известной классической модели переноса радона в накопительной камере.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамические процессы, объёмная активность радона, Камчатка, предвестники землетрясений, дробные производные Герасимова-Капуто, эффект памяти, нелокальность, нелинейные уравнения, обратные задачи, безусловная оптимизация, алгоритм Левенберга-Марквардта, C, Gnuplot.

Получение: 27.09.2024; Исправление: 30.09.2024; Принятие: 20.10.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Идентификация параметров математической α -модели переноса радона в накопительной камере по данным пункта Карымшина на Камчатке // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 95-119. EDN: AUYJMD. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-95-119>.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00064, <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>. Частично выполнена при поддержке Минобрнауки России (в рамках государственного задания № 075-00682-24) и частично за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050, <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** ✉ E-mail: tverdyy@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License



© Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Identification of Parameters of the Mathematical α -Model of Radon Transport in the Accumulation Chamber Based on Data from the Karymshina Site in Kamchatka

*D. A. Tverdyi^{*1}, E. O. Makarov², R. I. Parovik¹*

¹ Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

² Kamchatka Branch of the Federal Research Center «Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences», 683023, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piipa Boulevard st., 9, Russia

Abstract. Radon is an inert radioactive gas, and studies of its variations in relation to seismicity are considered promising for the development of earthquake prognosis methods. A network of observation points has been deployed on the Kamchatka peninsula, where radon volumetric activity (RVA) is monitored using accumulation chambers with gas-discharge counters. Analysis of RVA data within the framework of radon monitoring is one of the methods of searching for precursors of seismic events. This is due to the fact that changes in the stress-strain state of the geo-environment, through which the gas flows, affect the RVA. The change in radon transport intensity due to changes in the stress-strain state of the geosphere is described by a fractional differentiation operator of constant real order α , which is related to the permeability of the geosphere. It is known that the RVA in the storage tank with sensors is also affected by the air exchange rate λ_0 , the effect of which should be taken into account in the study of the radon transport process. The aim of the research is to study the accumulation of radon in the chamber, which consists in the identification of the values of the parameters λ_0 and α by solving the corresponding inverse problem. As a result of the research it was shown that for the hereditary α -model of radon transport by the Levenberg-Mackwardt method with the involvement of experimental data of RVA it is possible to determine the optimal values of its parameters λ_0 and α . The obtained model curves agree well with the RVA data obtained within the framework of the well-known classical model of radon transport in an accumulation chamber.

Key words: mathematical modeling, dynamic processes, radon volume activity, Kamchatka, earthquake precursors, fractional derivatives, Gerasimov-Caputo, memory effect, nonlocality, nonlinear equations, inverse problems, unconditional optimization, Levenberg-Marquardt algorithm, C, Gnuplot.

Received: 27.09.2024; Revised: 30.09.2024; Accepted: 20.10.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Identification of parameters of the mathematical α -model of radon transport in the accumulation chamber based on data from the Karymshina site in Kamchatka. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 95-119. EDN: AUYJMD. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-95-119>.

Funding. The research was funded by a grant from the Russian Science Foundation, project number 22-11-00064, which can be found at <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>. The work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (075-00682-24). The research was funded by a grant from the Russian Science Foundation, project number 23-71-01050, which can be found at <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: tverdyi@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Известно, что в земной коре постоянно содержится радиоактивный элемент ^{226}Ra , в ходе распада которого образуется ^{222}Rn (радон) — инертный радиоактивный газ с периодом полураспада 3.85 суток. ^{222}Rn является инертным газом, способным за счет основных механизмов массопереноса диффузии и конвекции распространяться по градиенту концентрации. За счет его радиоактивности возможна регистрация радона метрологически простыми методами, в том числе непрерывно и автоматизировано в режиме мониторинга [1, 2].

На этой основе на полуострове Камчатка развернута сеть пунктов наблюдения, где с помощью накопительных камер с газоразрядными счетчиками ведется радоновый мониторинг [3]. Расположение пунктов сети мониторинга подпочвенных газов на Камчатке приурочено к речным долинам, которые следуют вдоль разломных зон. Зоны динамического влияния разломов обладают повышенной проницаемостью, что способствует выходу подпочвенных газов в атмосферу [4]. Газоразрядные счетчики, как правило, самые распространенные детекторы γ/β -излучения. С их помощью возможна реализация простого и надежного способа регистрации ^{222}Rn по излучению его короткоживущих продуктов распада. Количество зарегистрированных импульсов β -излучения в минуту пропорционально объемной активности радона (RVA), вычисляемой по эмпирической формуле: $A(t) = 9 \cdot M$ (Бк/м³), где M — число зарегистрированных импульсов за минуту [5].

Замечание 1. Анализ данных, полученных в ходе непрерывного мониторинга RVA, является одним из методов поиска предвестников сейсмических событий. Это связано с тем, что на вариации RVA влияют изменения напряженно-деформированного состояния геосреды, через которую протекает газ. Таким образом, радон можно считать индикатором реакции геосреды на воздействие тектонических напряжений, возникающих при подготовке очага землетрясения [6, 7]. Радоновый (эманационный) метод поиска предвестников сейсмических событий во всём мире хорошо себя зарекомендовал за последние годы [8, 9], особенно с целью выявления краткосрочных предвестников (до 15 суток) [10, 11].

Замечание 2. Стоит отметить то, что вариации RVA связаны с таким показателем, как плотность потока радона (RFD) с поверхности, т. к. на основе кривых накопления радона в накопительной камере можно оценить RFD [12] с поверхности под ней. Поэтому моделирование изменения RVA в камере имеет прикладное значение при организации пунктов мониторинга подпочвенного радона с целью расширения сети мониторинга, т. к. необходимо знать величину RFD в выбранной точке, где будет устанавливаться накопительная камера со счётчиками.

Целью исследования является изучение накопления радона в подземных камерах с избыточным объемом с помощью методов математического моделирования.

Замечание 3. Рассматривается классическая математическая модель изменения RVA во времени $A(t)$ в накопительной камере на основе уравнения с обыкновенной производной 1-го порядка (ODE-модель RVA), а также понятия и величины, связанные с этим процессом [12–14].

Оператор обыкновенной производной 1-го порядка означает, что в классической модели изменения напряженно-деформированного состояния геосреды не учитываются, а процесс переноса радона рассматривается в однородной среде.

Замечание 4. ODE-модель RVA в простейшем случае предполагает стационарный режим накопления в камере, а значит, модель должна учитывать как минимум λ_0 – постоянный коэффициент кратности воздухообмена (AER) в ней.

Чтобы учесть влияние на поток ^{222}Rn изменений напряженно-деформированного состояния геосреды, вводится обобщение ODE-модели RVA с помощью аппарата дробных производных (FD) [15–17]. Основанием к такому обобщению является то, что под действием тектонических напряжений происходит изменение вертикальной скорости газового потока радона [18], вариации напряженно-деформированного состояния геосреды приводят к изменениям таких ее характеристик, как пористость, проницаемость и трещиноватость [19], а процесс переноса радона происходит в такой проницаемой геосреде [20]. Поэтому в исследовании используется эредитарная α -модель RVA, позволяющая учесть изменение интенсивности переноса радона в процессе накопления, разработанная в ходе цикла исследований [19, 21, 22].

Замечание 5. Обобщение до эредитарной α -модели RVA заключается в замене обыкновенной производной 1-го порядка на FD Капуто (Герасимова-Капуто) [23, 24] постоянного $0 < \alpha < 1$ порядка.

Для апробирования модели оптимально на первом этапе использовать данные о накоплении RVA в камере в условиях, когда отсутствуют воздействующие экзогенные факторы (изменения атмосферного давления, сильный ветер, увлажнение почвы вследствие дождей или таяния снежного покрова). Как известно из работы [12], максимальные аномальные отклики в данных радоновых наблюдений на метеовоздействие связаны с резким падением атмосферного давления в момент прихода циклона.

Замечание 6. Использование данных, когда кривая накопления ^{222}Rn четко визуально просматривается и не зашумлена, позволит строить модельные кривые, максимально близкие по форме к реальным данным и с максимальной корреляцией. Поэтому для работы отбирались данные в периоды, когда отсутствуют резкие изменения атмосферного давления, связанные с циклонической активностью.

Замечание 7. Научная новизна данного исследования заключается в применении методов решения обратных задач [25, 26] по новым известным экспериментальным данным RVA накопительного характера с целью восстановить значения постоянных параметров λ_0 и α в эредитарной α -модели RVA.

Обратные задачи – довольно молодой раздел математики, начавший активное развитие только в XIX–XX веках в связи с бурным развитием математического моделирования и возможностей вычислительной техники. Последние открывают перед исследователями новые, ранее не доступные, возможности для более глубокого понимания явлений природы. Например, если взглянуть на небо, представляется множество объектов для исследований в области астрономии и астрофизики, где применимы обратные задачи. От методов восстановления изображений удаленных объектов на основе данных радиоастрономии до солнечной сейсмологии [27], позволяющей получить информацию о внутреннем устройстве Солнца на основе наблюдаемых свойств солнечных колебаний. Идея последнего не нова, так как такой подход часто возникает здесь, на Земле, при работе с геологическими данными [28]. Особенно остро этот вопрос стоит для геофизики и сейсмологии [29], так как здесь тоже невозможно провести прямые измерения изучаемого объекта.

Статья имеет следующую структуру: раздел 1 представляет собой введение, описывая: область, объект, цель и методы исследования; в разделе 2 представлены экспериментальные данные по накоплению RVA, некоторые сведения о пунктах наблюдения где данные были получены и предпосылки к использованию именно данных по накоплению; в разделе 3 приводятся классическая математическая модель RVA, а также понятия и величины связанные с этим процессом; в разделе 4 описывается эредитарная α -модель RVA как обобщение классической модели, формулируется прямая задача и метод её решения, проводится верификация модели на различных экспериментальных данных RVA; в разделе 5 формулируется обратная задача по восстановлению значений нескольких параметров λ_0 и α , описывается метод её решения; в разделе 6 приводятся результаты решения обратных задач для λ_0 и α на основе различных экспериментальных данных RVA; в разделе 7 подводятся итоги исследования и указывается дальнейшее возможное направление их развития.

Экспериментальные данные RVA

В работе были использованы экспериментальные данные, полученные на пункте KRMR в разные периоды времени в течении 2020 года.

Пункт KRMR организован на базе пункта комплексных геофизических наблюдений «Карымшина» Камчатского филиала «Единой геофизической службы РАН» и одноименной сейсмостанции (пойма реки Карымшина, притока реки Паратунка).

Регистрация RVA с частотой 6 цикл./час выполняется в воздухе сухой скважины глубиной 3 м с помощью скважинного радиометра BMC2 (ALGADE Barisol, Франция). На всю глубину скважина обсажена трубой из нержавеющей стали с перфорацией по всей длине.

Над скважиной организованно укрытие и установлены солнечные панели для обеспечения питания радиометра (рис. 1).

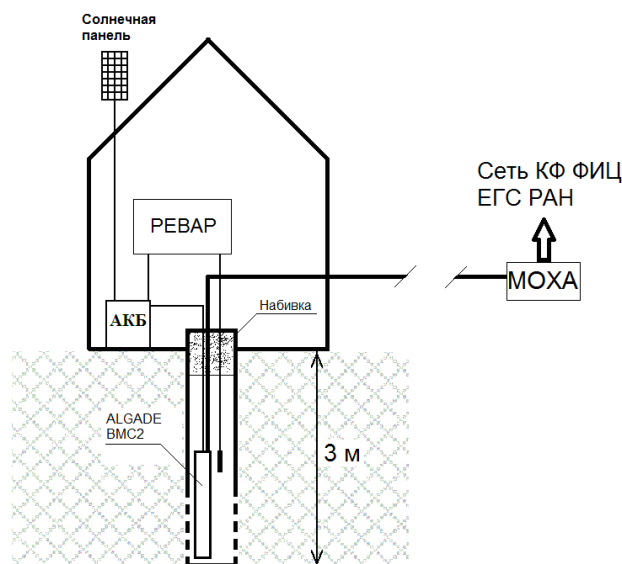


Рис. 1. Схема размещения датчика СБМ-19 и радиометра BMC2 для наблюдений за вариациями ОАР на пункте KRMR

[Figure 1. Scheme of placement of the SBM-19 sensor and BMC2 radiometer for observations of OAR variations at the KRMR station]

Кроме этого в скважину помещен газоразрядный счетчик СБМ-19, с которого ведется регистрация концентрации подпочвенного радона с частотой 2 цикл./час с помощью радиометра РЕВАР [12]. Оголовок скважины закрыт плотной набивкой для уменьшения конвективной составляющей движения воздуха в стволе скважины. С помощью преобразователя интерфейсов МОХА (RS232-Ethernet) радиометр BMC2, имеющий выходной разъем для связи стандарта RS232 соединен с сетью Ethernet Камчатского филиала «Единой геофизической службы РАН».

С некоторыми допущениями внутренний объем обсадной трубы представляет собой накопительную камеру, а отверстия перфорации обеспечивают поток и накопление радона в ней. Избыточный объем камеры составляет $\sim 0.02 \text{ [м}^3\text{]}$.

На рис.2-7 приведены данные RVA за различные периоды 2020 г.

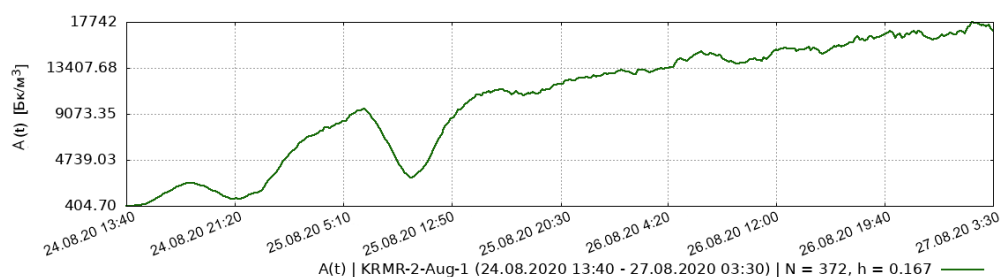


Рис. 2. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 24 августа 2020 г. (13:40) – 27 августа 2020 г. (03:30)

[Figure 2. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: August 24, 2020 (13:40) – August 27, 2020 (03:30)]

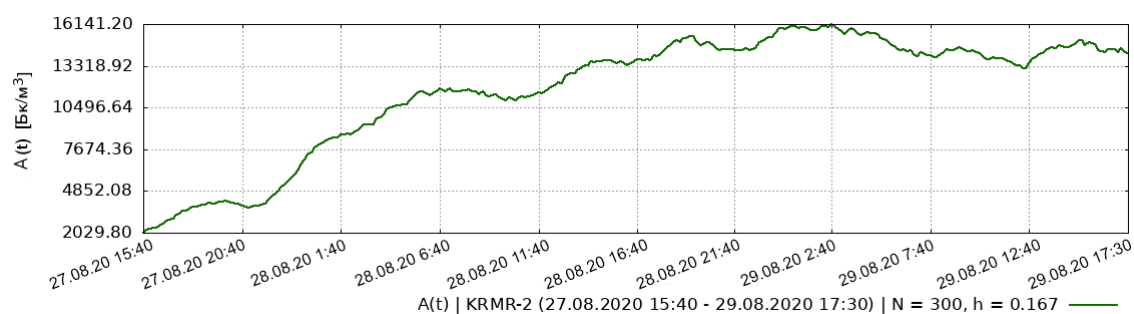


Рис. 3. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 27 августа 2020 г. (15:40) – 29 августа 2020 г. (17:30)

[Figure 3. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: August 27, 2020 (15:40) – August 29, 2020 (17:30)]

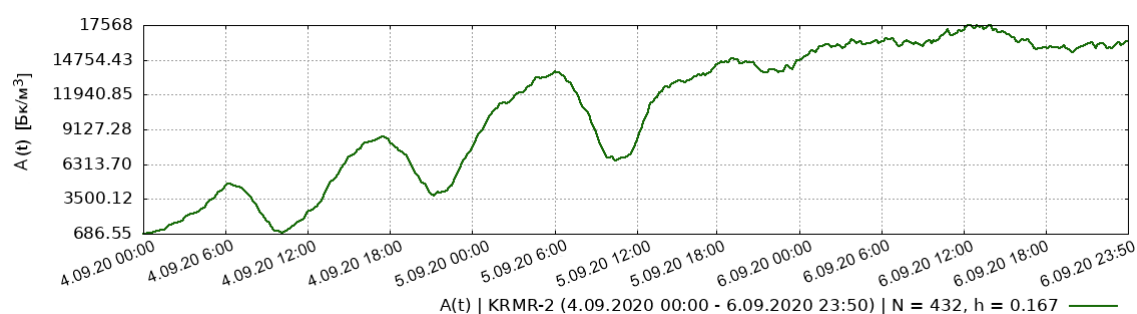


Рис. 4. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 4 сентября 2020 г. (00:00) – 6 сентября 2020 г. (23:50)

[Figure 4. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: September 4, 2020 (00:00) – September 6, 2020 (23:50)]

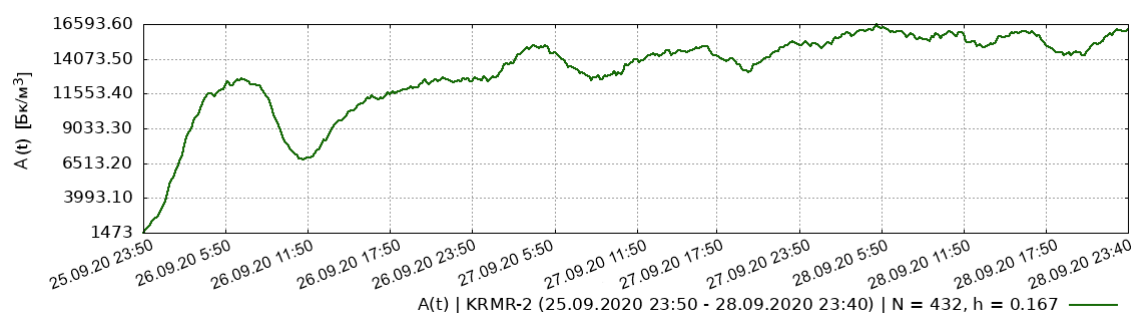


Рис. 5. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 25 сентября 2020 г. (23:50) – 28 сентября 2020 г. (23:40)

[Figure 5. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: September 4, 2020 (23:50) – September 6, 2020 (23:40)]

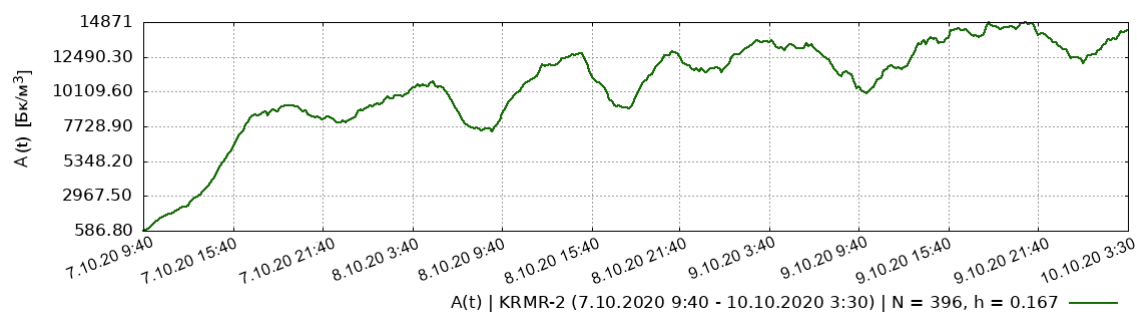


Рис. 6. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 7 октября 2020 г. (9:40) – 10 октября 2020 г. (3:30)

[Figure 6. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: Oktober 7, 2020 (9:40) – Oktober 10, 2020 (3:30)]

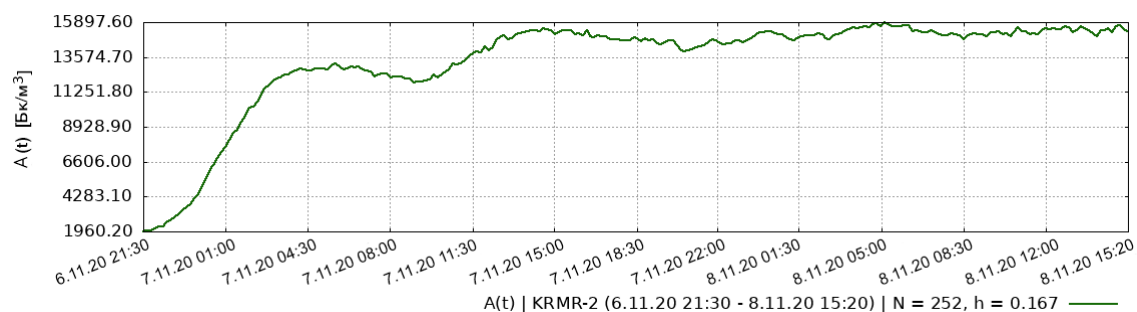


Рис. 7. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 6 ноября 2020 г. (21:30) – 8 ноября 2020 г. (15:20)

[Figure 7. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: November 6, 2020 (21:30) – November 8, 2020 (15:20)]

Классическая математическая модель накопления радона

Для описания механизма переноса радона в геологических средах в рамках эманационного метода [31] разработаны многие математические модели процесса: физико–химическая [32], гидротермальной системы [33], модель «геогаза» в грунте с полным влагонасыщением [34, 35]. Но в данном исследовании интерес представляют механические представления и модели, на них основанные. Механические представления – это выделение радона из кристаллических решеток под действием ультразвуковых колебаний [36], десорбции радона под воздействием упругих колебаний [37], увеличение коэффициента эманирования радона вследствие деформаций горных пород [13], подмешивание радона в подземные воды в активных зонах [38] а также изменение скорости газового потока радона вследствие изменения пористости и трещиноватости под действием тектонических напряжений [18]. Последнее представляет наибольший интерес, так как может помочь с введением в модель параметров, отвечающих за изменение интенсивности процесса переноса радона.

В исследовании будем отталкиваться от хорошо изученной математической модели накопления RVA в накопительной камере [12–14], т.к. она достаточно неплохо описывает накопительные режимы RVA. Модель в основе своей представляет линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ODE) вида:

$$\frac{dA(t)}{dt} = S(t) - (A(t) - A_{Rn}^{atm}) \lambda_v(t) - (A(t) - A_{Rn}^{atm}) \lambda_{Rn}, \quad (1)$$

где,

- $A(t) \in C^1[0, T]$ – временная зависимость RVA в камере, [Бк/м³];
- $C^1[0, T]$ – класс непрерывно-дифференцируемых функций;
- A_{Rn}^{atm} – RVA в наружном воздухе, [Бк/м³].
- $t \in [0, T]$ – текущее время симуляции RVA, [с].
- $T > 0$ – общее время симуляции, [с].
- $S(t)$ – некоторая функция, которая описывает скорость поступления радона, т.е. суммарное удельное поступление на единицу объёма камеры, [Бк/м³с].
- $\lambda_v(t)$ – функция, описывающая зависимость кратности воздухообмена (AER) в камере от времени, [с⁻¹].
- $\lambda_{Rn} = 2.1 \cdot 10^{-6}$ – постоянная распада радона, [с⁻¹].

Согласно работам [12, 14], модель (1) можно существенно упростить в ряде случаев. Например, членом при λ_{Rn} уравнения (1) можно пренебречь, т. к. даже полностью закрытое помещение с датчиками имеет $\lambda_v(t) \geq 0.05$ [ч] (т.е. $\approx 1.3889 \cdot 10^{-5}$ [с]), что как минимум порядок больше чем λ_{Rn} , а значит, влияние на расчеты по данной модели 3-го члена (1) невелико.

Известно, что за перенос радона в вертикальном направлении могут отвечать тепложидкостная конвекция, турбулентные эффекты при изменении метеорологических факторов, эффузия за счет градиента давления в земной коре, диффузия за счет градиента концентрации радона и др. [39].

Определение 1. Моделируемый процесс накопления радона называется стационарным, когда RFD с поверхности под накопительной камерой постоянна, а также когда нет резких изменений AER, а значит, $\lambda_v(t) = \lambda_0$ и $S(t) = S$ являются постоянными величинами. Тогда RVA будет иметь накопительный характер с выходом на насыщение: $A_{max} = S/\lambda_0$, [Бк/м³] [12]. Откуда получаем, что величина $S = A_{max}\lambda_0$.

Учитывая вышеизложенное, модель (1) можно упростить до ODE, задача Коши для которого примет вид:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + A_{max}\lambda_0, \quad A(0) = A_0,$$

где, A_0 – известная константа, значение RVA в момент времени $t = 0$.

Замечание 8. Далее, при работе с экспериментальными данными, необходимо будет сделать для временных рядов RVA нормировку на максимум, переходя таким образом для обозначения $A(t)$ к «относительным единицам» [отн.ед.].

Тогда, очевидно $A_{\max} = 1$, а значит ODE-модель примет вид:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + \lambda_0, \quad A(0) = A_0, \quad (2)$$

Замечание 9. Далее, стационарную модель RVA (2) для краткости будем называть ODE-моделью RVA.

Для задачи Коши (2) можно получить аналитическое решение:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} (1 - A_0), \quad A(0) = A_0, \quad (3)$$

причём из решения модели при $t \rightarrow \infty$ видно, что RVA $A(t) \rightarrow 1$, т. е. $A(t) = 1$ – горизонтальная асимптотика, которая определяет уровень насыщения RVA.

Эредитарная α -модель накопления радона

В модельных уравнениях (1) и (2) обыкновенная производная 1-го порядка не позволяет учесть изменение интенсивности переноса радона в процессе накопления, т. е. не позволяет учесть влияние на RVA изменений напряженно-деформированного состояния геосреды. Что сильно ограничивает гибкость ODE-модели RVA.

Поэтому авторами в работах [19, 21] предлагается модификация модели (2), состоящая в замене обыкновенной производной 1-го порядка на дробную производную (FD) [15–17] постоянного или переменного вещественного порядка. Основанием к такому обобщению является то, что процесс переноса радона происходит в проницаемой геосреде [20], а также упомянутым ранее представлениям об изменении скорости газового потока [18] и изменении интенсивности эманации [13].

Замечание 10. Полагается, что пористость среды обусловлена наличием изолированных пор, а проницаемость среды понимается как наличие каналов, проводящих газ между порами. Пористость среды может приводить к замедлению процесса переноса газа, т. е. субдиффузии, а проницаемость среды, наоборот, приводит к ускорению, т. е. супердиффузии [31]. Такие процессы относятся к явлениям аномальной диффузии [40].

Замечание 11. Аномальную диффузию можно связать со свойством системы или среды помнить некоторое время оказанное на нее воздействие – эредитарностью (эффектом памяти) [41].

Собственно, для описания эффекта памяти в математической модели RVA и вводятся FD Капуто (Герасимова-Капуто) [23, 24] постоянного порядка:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} A(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dA(\sigma)}{d\sigma} \frac{1}{(t-\sigma)^{\alpha}} d\sigma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

где, $\Gamma(\cdot)$ – известная гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(x) > 0,$$

Замечание 12. Следует отметить, что существуют и другие определения производной дробного порядка. Их можно найти, например, в научных трудах [42, 43].

Цикл работ авторов [19, 21, 22] посвящен исследованию вопросов, связанных с математическим моделированием RVA, где предполагается, что параметр α описывает фрактальность [44] геосреды и связан с такими её характеристиками, как пористость, проницаемость и трещиноватость. Эредитарная α -модель RVA представляется следующей задачей Коши:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} A(t) = -\lambda_0 A(t) + \lambda_0, \quad A(0) = A_0, \quad (5)$$

где, отличие от (1) важно отметить:

- $A(t) \in C^2[0, T]$ – функция решения, зависимость RVA от времени в камере;
- α – константа, порядок дробной производной (4);
- $C^2[0, T] = \mathbb{A}$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых функций.

Определение 2. Параметр α , согласно [19], дает возможность нам смоделировать изменения проницаемости геосреды, приводящей к изменению интенсивности процесса переноса радона. Предполагается, что постоянная $0 < \alpha < 1$ в относительных единицах описывает среднее по некоторому объёму (и во времени) значение проницаемости геосреды под накопительной камерой регистрирующей RVA. Причём, если $\alpha \rightarrow 0$, это характеризует довольно сильно проницаемую для радона среду, а если $\alpha \rightarrow 1$, это характеризует некую «среднестатистическую» по проницаемости среду.

Замечание 13. Эредитарная α -модель RVA (5) также является стационарной, согласно определению 1.

Для задачи (5) воспользуемся ранее разработанной нелокальной неявной конечно-разностной схемой (IFDS) [45], заданной в равномерной сеточной области:

$$h = T/N, \quad \hat{\Omega} = \{(t_i = ih) : 0 \leq i < N\}, \quad \hat{A} \in \hat{\Omega}, \quad (6)$$

$$A(t) = A_i, \quad 0 < A_i < 1.$$

Определение 3. Тогда разностная прямая задача:

$$A_i = 1 - \frac{\widehat{\partial_{0,ih}^{\alpha}} A_i}{\lambda_0}, \quad A_0 = \text{const}, \quad 1 \leq i < N, \quad (7)$$

$$\widehat{\partial_{0,ih}^{\alpha}} A_i = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) (A_{i-j} - A_{i-j-1}).$$

представляет собой задачу Коши, состоящую в поиске дискретной функции A_i , принадлежащей известному классу $\hat{A} \in \hat{\Omega}$, при известной постоянной α .

IFDS схема (7) и её обобщенные аналоги были апробированы в ряде тестовых и прикладных задач [45, 46]. Далее (7) решается модифицированным методом Ньютона (MNM), причём тогда разностная прямая задача на основе IFDS безусловно устойчива.

Замечание 14. Эредитарная α -модель RVA (5) решаемая по схеме (7) при значении $\alpha = 1$ перейдет в ODE-модель RVA (3), это продемонстрировано в работах [22, 46], что говорит о том, что обобщение (5) корректно.

Обратная задача на параметры λ_0 и α для эредитарной α -модели RVA

Ранее авторами [19, 21, 22] параметры моделей λ_0 и α были неизвестны и потому подбирались вручную по максимуму R^2 – коэффициента детерминации [47] и σ – коэффициента корреляции [48] с экспериментальными данными RVA. Такой подход является трудоемким, что неизбежно приводит нас к идеям различных способов автоматизации подбора оптимальных параметров.

Пусть $A_i \in \hat{A}$ (и соответственно $A(t) \in \hat{A}$) – функция зависит от набора параметров $\vec{X} = [X_0, \dots, X_{K-1}]$, где $K = 2$, а $X_0 = \alpha$, $X_1 = \lambda_0$. Пусть в области $\hat{\Omega} = [0, N]$ значения дискретной функции решения $A_i \in \hat{A}$ неизвестны, но известна дополнительная информация – экспериментальные данные RVA $A_i = \theta_i = \vec{\theta}$ о решении разностной прямой задачи Коши (7) для эредитарной α -модели RVA.

Определение 4. Тогда разностная обратная задача для (7) – это восстановление значений $\vec{X} = [X_0, X_1]$ по известным экспериментальным данным RVA имеет вид:

$$A_i = 1 - \frac{\widehat{\partial_{0,ih}^{X_0}} A_i}{X_1}, \quad A_i = \theta_i, \quad 1 \leq i < N, \quad (8)$$

$$\widehat{\partial_{0,ih}^{X_0}} A_i = \frac{h^{-X_0}}{\Gamma(2 - X_0)} \sum_{j=0}^{i-1} ((j+1)^{1-X_0} - j^{1-X_0}) (A_{i-j} - A_{i-j-1}).$$

Для решения (8) обратимся к теории безусловной оптимизации [49]. Для этого необходимо минимизировать функционал невязки:

$$\vec{\eta} = \vec{\theta} - \omega(\vec{X}), \quad \min(\Psi(\vec{X})) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\theta_i - \omega_i)^2, \quad (9)$$

где, $\vec{\eta}$ – вектор невязки размерности $N > K$, а вектор $\omega(\vec{X}) = [\omega_0, \dots, \omega_N]$ – вектор модельных данных, т. е. решение разностной прямой задачи (7) относительно некоторого приближения $\vec{X}$, получаемого в ходе решения обратной задачи.

Разностная обратная задача решается методом безусловной оптимизации ньютоновского типа [50], а именно итерационным методом Левенберга-Марквардта [51, 52], представимого в виде:

$$\Delta X = (-H^{-1}) \times (J^T \times \vec{\eta}), \quad H = J^T \times J + \gamma E, \quad (10)$$

где,

- ΔX – оптимальное приращение $\vec{X}$ для следующей итерации;
- E – единичная матрица размерности $K \times K$;
- $J = J(\vec{X})$ – матрица Якоби размерности $N \times K$ с элементами вычисляемыми по формуле: $J_{i,k} = \frac{\partial \eta_i}{\partial X_k}$, $i = 0..N - 1$, $k = 0..K - 1$;
- производная $\frac{\partial \eta_i}{\partial X_k}$ аппроксимируется разностным оператором $J_{i,k} = \frac{\eta_i^{\delta} - \eta_i}{\delta X_k}$, где δX – заданное малое приращение $\vec{X}$;
- γ – параметр регуляризации метода. Если $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, а также матрица Гессе H положительно определена, то тогда ΔX является направлением спуска для оптимального шага метода;
- Стартовое значение: $\gamma^{(0)} = v \cdot \max_i \left(\text{diag} \left(J(X^{(0)})^T \times J(X^{(0)}) \right) \right)$, где v – заданная стартовая константа.

Замечание 15. Решение обратной задачи (8) методом Левенберга-Марквардта (10), далее (IP-LB), сводится к тому, чтобы в ходе цикла, начиная с заданных постоянных $X^{(0)}$, δX , v а также c – константы для пересчёта γ , многократно вычисляя решение разностной прямой задачи (7) при приближениях $\vec{X}$, получаемых в ходе решения обратной задачи, вычислить оптимальные значения $\vec{X}$.

Замечание 16. Критерием получения оптимального значения является $\varepsilon \leq \Sigma$, где Σ – заданная точность решения IP-LB, $\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [\eta_i^{\Delta}]^2$ – среднеквадратичная ошибка (MSE) между экспериментальными и модельными данными RVA.

Результаты моделирования

Далее будут представлены результаты решения IP-LB по восстановлению оптимальных значений $X_0 = \alpha$, $X_1 = \lambda_0$ стационарной эредитарной α -модели RVA (5) по известным экспериментальным данным RVA.

Алгоритмы, реализующие решения прямых задач по моделям (2) и (5), лежащих в основе алгоритма IP-LB, производят вычисления в величинах «метр/час». Это обоснованно тем, что фактический объём накопительной камеры (~ 0.02 [м³]) а частота регистрации RVA (6 цикл./час). Поэтому на рис. 8–13 значения параметров T, t, h в [ч], $X_1 = \lambda_0$ в [ч⁻¹]. Однако, ключевые параметры характеризующие полученные результаты, приведены к «метр/секунда» согласно международной системе единиц СИ и сведены в таблицу 1.

Замечание 17. На восстановление λ_0 сильно влияет выбор его управляющих параметров в алгоритме IP-LB, т. е. $X_1^{(0)}$ – начальное заданное приближение и δ_1 – начальное заданное приращение $X_0^{(0)}$.

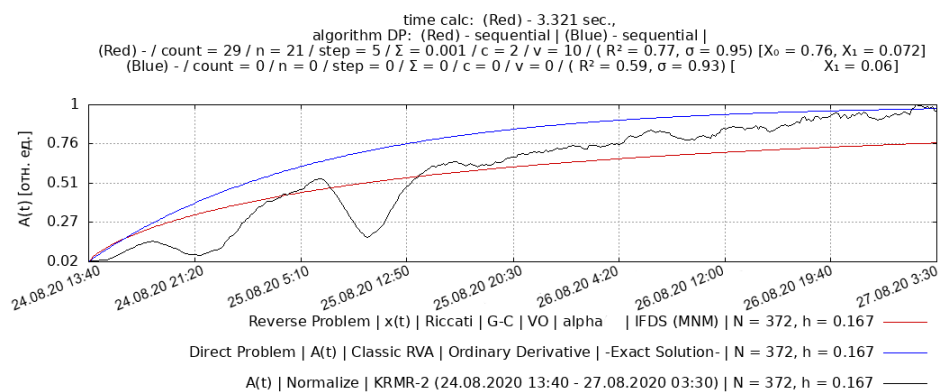


Рис. 8. Результат IP-LB по данным KRMR. Восстановлены: $\alpha = 0.76$, $\lambda_0 = 0.072$
 [Figure 8.Result IP-LB for the KRMR data. Restored: $\alpha = 0.76$, $\lambda_0 = 0.072$]

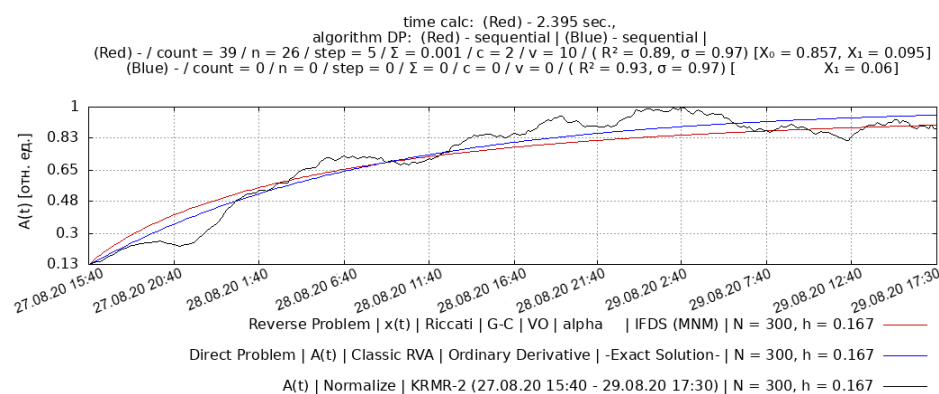


Рис. 9. Результат IP-LB по данным KRMR. Восстановлены: $\alpha = 0.857$, $\lambda_0 = 0.095$
 [Figure 9.Result IP-LB for the KRMR data. Restored: $\alpha = 0.857$, $\lambda_0 = 0.095$]

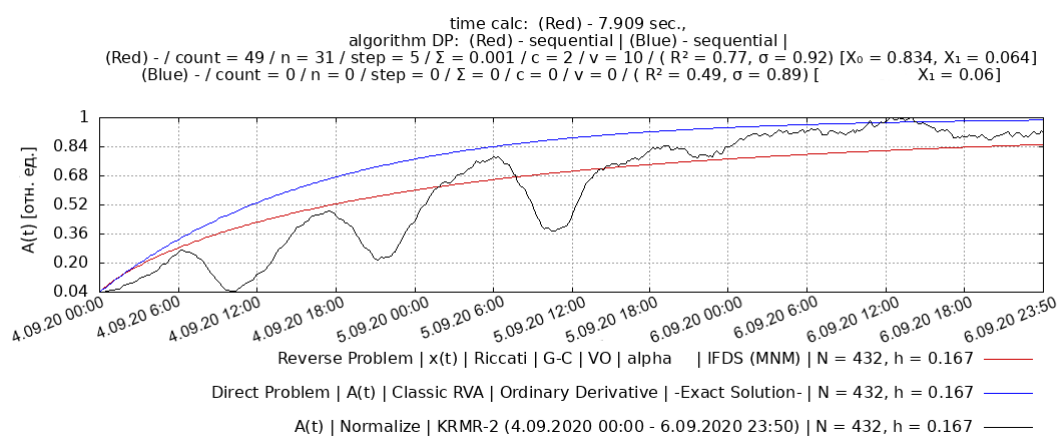


Рис. 10. Результат IP-LB по данным KRMR. Восстановлены: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.064$
 [Figure 10.Result IP-LB for the KRMR data. Restored: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.064$]

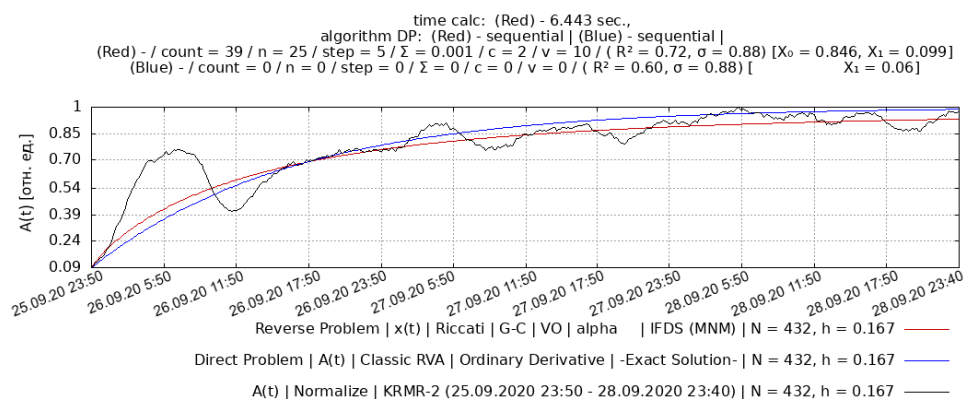


Рис. 11. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.846$, $\lambda_0 = 0.099$
 [Figure 11.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.846$, $\lambda_0 = 0.099$]

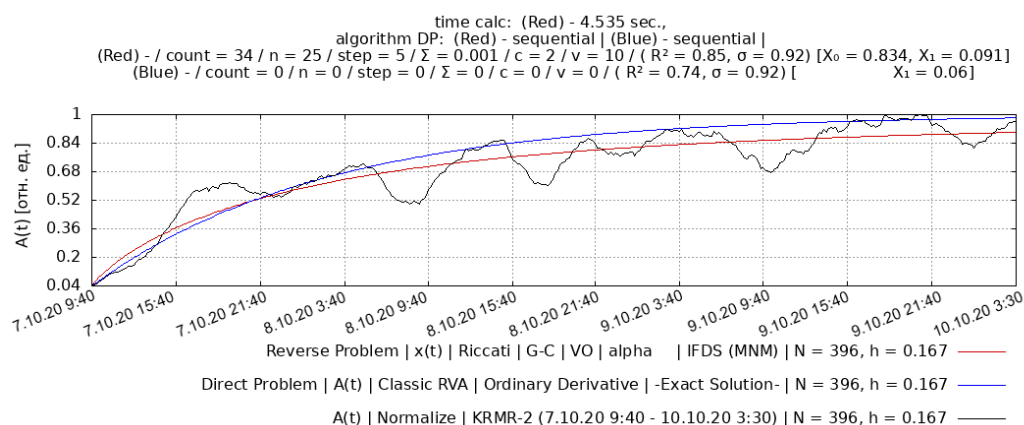


Рис. 12. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.091$
 [Figure 12.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.091$]

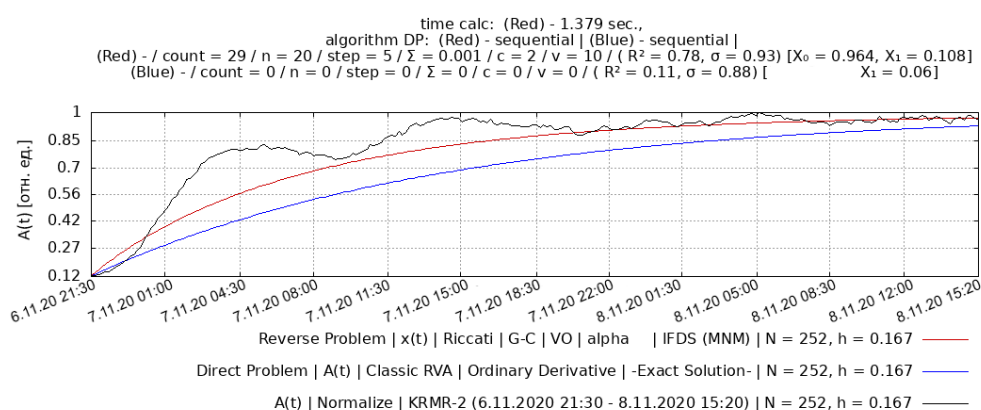


Рис. 13. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.964$, $\lambda_0 = 0.108$
 [Figure 13.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.964$, $\lambda_0 = 0.108$]

Было замечено, что если начальное приближение и его приращение задавать $\pm 1\%$ от оценки максимального значения восстанавливаемого параметра, то эффективность и точность работы IP-LB будет наивысшей (исходя из оценок R^2 и σ) для представленных данных KRMR.

Результаты на рис. 8–13 полученные при следующих значениях управляющих параметров: $[X_0^{(0)}, \delta_0] = [0.05, 0.01]$ для показателя α ; а также $[X_1^{(0)}, \delta_1] = [0.0025, 0.0005]$ для коэффициента λ_0 . Значения управляющих параметров c , v , Σ для алгоритма IP-LB, указаны на рисунках.

Замечание 18. Из рис. 8–13 замечено, что чем больший период по времени охватывают данные RVA (т.е. чем больше T), тем точнее описанные методы решения прямой и обратной задач восстанавливают связку из двух параметров α и λ_0 . Особенно это проявляется при восстановлении λ_0 , тогда значения этого параметра ближе к приблизительным оценкам λ_0 которые может дать эксперт, изучив данные и учитывая иные факторы на пункте наблюдения.

Таблица 1

Параметры математических моделей: классической ODE (2), эредитарной α -модели RVA (5) решаемой методами обратных задач, а также коэффициенты подобия модельных кривых и данных. Значения приведены к международной системе единиц СИ. [Parameters of mathematical models: classical ODE (2), hereditary α -model RVA (5) solved by methods of inverse problems, as well as similarity coefficients of model curves and data. Values are given in the SI international system of units.]

Даты выборки данных KRMR	заданное λ_0 для классич.	восств. λ_0 для эредит.	восст. α для эредит.	R^2 для классич.	R^2 для эредит.
24.08.20 - - 27.08.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	0.76	59 %	77 %
27.08.20 - - 29.08.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.638 \cdot 10^{-5}$	0.857	93 %	89 %
4.09.20 - - 6.09.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	0.834	49 %	77 %
25.09.20 - - 28.09.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.75 \cdot 10^{-5}$	0.846	60 %	72 %
7.10.20 - - 10.10.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.527 \cdot 10^{-5}$	0.834	74 %	85 %
6.11.20 - - 8.11.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	0.964	11 %	78 %

Финансирование и вклад в исследования

Данные с пункта KRMR предоставлены Макаровым Е. О. старшим научным сотрудником лаборатории акустического и радонового мониторинга Камчатского филиала федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН» г. Петропавловск-Камчатский, Россия.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (в рамках государственного задания № 075-00682-24) и с использованием данных, полученных на уникальной научной установке «Сейсмоинфразвуковой комплекс мониторинга арктической криолитозоны и комплекс непрерывного сейсмического мониторинга Российской Федерации, сопредельных территорий и мира».

Все расчёты, связанные с решением прямых и обратных задач по моделям RVA, а также расчёты по обработке данных, были выполнены в программном комплексе PRPHMM 1.0 на языке MATLAB [53] версии R2023b для GNU/Linux Ubuntu Desktop 22.04. Программой комплекс PRPHMM 1.0 разрабатывается в рамках проекта "Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности" за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00064 (рук. Паровик Р.И.) исполняемого на базе Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия.

Визуализация в данной статье была выполнена Твёрдым Д.А. с помощью программного комплекса FEVO 1.0, разрабатываемого в том числе на скриптовом языке Gnuplot 6.0 [54] для GNU/Linux Ubuntu Desktop 22.04. Программой комплекс FEVO 1.0 разрабатывается в рамках проекта "Разработка программного комплекса для моделирования и анализа объемной активности радона как предвестника сильных землетрясений Камчатки" за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050 (рук. Твёрдый Д.А.) исполняемого на базе Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия.

Заключение

В работе продемонстрировано, что с помощью методов математической безусловной оптимизации, в частности итерационного метода Левенберга-Марквардта, можно решать обратные задачи с использованием экспериментальных данных накопления ^{222}Rn в камере.

На примерах показано, что можно восстанавливать близкие к оптимальным значения: α – степень дробной производной, характеризующей интенсивность процесса переноса радона, λ_0 – постоянная кратность воздухообмена для стационарной эредитарной α -модели RVA. Из результатов моделирования видно, что эредитарная α -модель RVA с параметрами, восстанавливаемыми решением обратной задачи, в сравнении с ODE-моделью RVA при $\lambda_0 = 1.66 \cdot 10^{-5}$ дает более точный результат за счет обобщения до дробной производной, а модельные кривые лучше согласуются с данными накопления, о чем говорят значения коэффициента детерминации R^2 с данными по RVA выше в среднем на 22%.

Продолжение работы может быть связано с применением более обобщенной эредитарной $\alpha(t)$ -модели и методов многомерной оптимизации для моделирования процессов накопления радона по осложненным экспериментальным данным. Усложненность данных накопительного процесса состоит в том, что данные искажены эффектами динамического влияния атмосферного давления и переменной проницаемостью геосреды.

Аббревиатуры

RVA	Radon Volumetric Activity
RFD	Radon Flux Density
FD	Fractional derivative
AER	Air Exchange Rate
ODE	Ordinary differential equation
MNM	Modified Newton's Nethod
IP-LB	Inverse problem by method Levenberg-Marquardt
MSE	Mean Squared Error

Список литературы

1. Рудаков В.П. *Эманиационный мониторинг геосред и процессов*. Москва: Научный мир, 2009. 175 с. ISBN 978-5-91522-102-3.
2. Zuzel G., Simgen H. High sensitivity radon emanation measurements, *Applied radiation and isotopes*, 2009. vol. 67, no. 5, pp. 889–893 DOI: 10.1016/j.apradiso.2009.01.052.
3. Makarov E. O. Firstov P. P., Voloshin V. N. Hardware complex for recording soil gas concentrations and searching for precursor anomalies before strong earthquakes in South Kamchatka, *Seismic instruments*, 2013. vol. 49, no. 1, pp. 46–52 DOI: 10.3103/S0747923913010064.
4. Фирстов П. П., Рудаков В. П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне, *Вулканология и сейсмология*, 2003. № 1, С. 26–41.
5. Фирстов П. П. и др. Поиск предвестниковых аномалий сильных землетрясений по данным мониторинга подпочвенных газов на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне, *Геосистемы переходных зон*, 2018. Т. 2, № 1, С. 16–32 DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032.
6. Barberio M. D. et al. Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon (^{222}Rn) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy, *Water*, 2018. vol. 10, no. 9:1276 DOI: 10.3390/w10091276.
7. Neri M. et al. Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy), *Journal of Environmental Radioactivity*, 2011. vol. 102, no. 9, pp. 863–870 DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002.
8. Petraki E. et al. Radon-222: A Potential Short-Term Earthquake Precursor, *Earth Science & Climatic Change*, 2015. vol. 6, no. 6 DOI: 10.4172/2157-7617.1000282.
9. Hauksson E. Radon content of groundwater as an earthquake precursor: evaluation of worldwide data and physical basis, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1981. vol. 86, no. B10, pp. 9397–9410 DOI: 10.1029/JB086iB10p09397.
10. Inan S. et al. Geochemical monitoring in the Marmara region (NW Turkey): A search for precursors of seismic activity, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2008. vol. 113, no. B3, pp. 1–15 DOI: 10.1029/2007JB005206.
11. Бирюлин С. В., Козлова И. А., Юрков А. К. Исследование информативности объемной активности почвенного радона при подготовке и реализации тектонических землетрясений на примере Южно-Курильского региона, *Вестник Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»*. Серия: Науки о Земле, 2019. Т. 4, № 44, С. 73–83 DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.

12. Фирстов П. П., Макаров Е. О. *Динамика почвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения*. Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018. 148 с. ISBN 978-5-7968-0691-3.
13. Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes, *Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions*, 1993, pp. 9–22.
14. Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room, *Journal of Environmental Radioactivity*, 2013. vol. 124, pp. 185–190 DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006. 540 pp. ISBN 9780444518323.
16. Podlubny I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. New York: Academic Press, 1999. 340 pp. ISBN 9780125588409.
17. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с. ISBN 5-9221-0440-3.
18. King C. Y. Gas-geochemical approaches to earthquake prediction, *Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions*, 1993, pp. 22–36.
19. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 4, pp. 850 DOI: 10.3390/math11040850.
20. Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transfer processes in fractional structure medium, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010. vol. 2, pp. 180–185 DOI: 10.1134/S2070048210020055.
21. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, *E3S Web Conference*, 2020. vol. 196, no. 02027, pp. 1–6 DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
22. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Research of Stress-Strain State of Geo-Environment by Emanation Methods on the Example of $\alpha(t)$ -Model of Radon Transport, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2023. vol. 44, no. 3, pp. 86–104 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104.
23. Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 12, pp. 529–539.
24. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, no. 5, pp. 529–539 DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
25. Mueller J. L., Siltanen S. *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. 372 pp. ISBN 978-1611972337.
26. Tarantola A. *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Amsterdam and New York: Elsevier Science Pub. Co., 1987. 613 pp. ISBN 0444427651.
27. Arregui I. Inversion of Physical Parameters in Solar Atmospheric Seismology, *Multi-scale Dynamical Processes in Space and Astrophysical Plasmas*, 2012, pp. 159–169 DOI: 10.1007/978-3-642-30442-2_18.
28. Tahmasebi P., Javadpour F., Sahimi M. Stochastic shale permeability matching: Three-dimensional characterization and modeling, *International Journal of Coal Geology*, 2016. vol. 165, pp. 231–242 DOI: 10.1016/j.coal.2016.08.024.
29. Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, *Conference on Inverse Scattering, Theory and application*, 1983, pp. 206–220.
30. Utkin V. I., Yurkov A. K. Radon as a tracer of tectonic movements, *Russian Geology and geophysics*, 2010. vol. 51, no. 2, pp. 220–227 DOI: 10.1016/j.rgg.2009.12.022.
31. Паровик Р. И. *Математические модели неклассической теории эманационного метода*. Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2014. 80 с. ISBN 978-5-7968-0450-6.
32. Понамарев А. С. Фракционирование в гидротерме как потенциальная возможность формирования предвестников землетрясений, *Геотхимия*, 1989. № 5, С. 714–724.
33. Барсуков В. Л., Варшал Г. М., Гаранин А. В., Замокина Н. С. Значение гидрогеохимических методов для краткосрочного прогноза землетрясений / *Гидрогеохимические предвестники землетрясений*. Москва, Наука, 1985, С. 3–16.

34. Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2002. vol. 129, no. 3–4, pp. 185–204 DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00292-8.
35. Varhegyi A., Baranyi I., Somogyi G. A. Model for the vertical subsurface radon transport in «geogas» microbubbles, *Geophysical Transactions*, 1986. vol. 32, no. 3, pp. 235–253.
36. Горбушина Л. В., Рябоштан Ю. С. Эманиационный метод индикации геодинамических процессов при инженерно-геологических изысканиях, *Советская геология*, 1975. № 4, С. 106–112.
37. Козлова И. А., Юрков А. К. Отражение последовательных сейсмических событий в поле объемной активности радона, *Уральский геофизический вестник*, 2016. № 1(27), С. 35–39.
38. Гудзенко В. В., Дубинчук В. Т. *Изотопы радия и радон в природных водах*. Москва: Наука, 1987. 156 с.
39. Новиков Г. Ф. *Радиометрическая разведка*. Ленинград: Недра, 1989. 406 с. ISBN 5-247-00832-4.
40. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2013. 373 pp. ISBN 978-3-642-33911-0 DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
41. Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications, *Acta Mathematica*, 1912. vol. 35, no. 1, pp. 295–356 DOI: 10.1007/BF02418820.
42. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020. vol. 476, no. 2234, pp. 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
43. Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der Physik*, 2003. vol. 515, no. 11–12, pp. 692–703 DOI: 10.1002/andp.200351511-1203.
44. Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Co., 1982. 468 pp.
45. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 1, pp. 23 DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
46. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 3, pp. 163 DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
47. Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Science*, 2021. vol. 299, pp. e623 DOI: 10.7717/peerj-cs.623.
48. Cox D. R. Hinkley D. V. *Theoretical Statistics, 1st edition*. New York: Chapman and Hall/CRC, 1974. 528 pp. ISBN 9780429170218.
49. Dennis J. E., Moré J. J., Schnabel B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia: SIAM, 1996. 394 pp. ISBN 9781611971200.
50. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical Optimization*. Philadelphia: SIAM, 2019. 421 pp.
51. Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly of applied mathematics*, 1944. vol. 2, no. 2, pp. 164–168 DOI: 10.1090/qam/10666.
52. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 1963. vol. 11, no. 2, pp. 431–441 DOI: 10.1137/0111030.
53. Ford W. *Numerical linear algebra with applications: Using MATLAB, 1st edition*. Massachusetts: Academic Press, 2014. 628 pp. ISBN 978-0123944351 DOI: 10.1016/C2011-0-07533-6.
54. Janert P. K. *Gnuplot in Action: Understanding Data with Graphs, 2nd Edition*. New-York: Manning, 2016. 400 pp. ISBN 1633430189.

Информация об авторах



Твёрдый Дмитрий Александрович ✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-6983-5258.



Макаров Евгений Олегович ✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории акустического и радонового мониторинга, Камчатский филиал федерального исследовательского центра "Единая геофизическая служба РАН г. Петропавловск-Камчатский, Россия,  ORCID 0000-0002-0462-3657.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

- [1] Rudakov V. P. Emanacionnyj monitoring geosred i processov [Emanational monitoring of geoenvironments and processes]. Moscow: Science World, 2009, 175 pp., isbn: 978-5-91522-102-3 (In Russian)
- [2] Zuzel G., Simgen H. High sensitivity radon emanation measurements, Applied radiation and isotopes, 2009, vol. 67, no. 5, pp. 889–893. DOI: 10.1016/j.apradiso.2009.01.052.
- [3] Makarov E. O. Firstov P. P., Voloshin V. N. Hardware complex for recording soil gas concentrations and searching for precursor anomalies before strong earthquakes in South Kamchatka, Seismic instruments, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 46–52. DOI: 10.3103/S0747923913010064
- [4] Firstov P. P., Rudakov V. P. Results from observations of subsurface radon in 1997–2000 at the Petropavlovsk-Kamchatskii geodynamic site. Journal of Volcanology and Seismology, 2003, no. 1, pp. 26–41 (In Russian)
- [5] Firstov P. P. et al. Search for predictive anomalies of strong earthquakes according to monitoring of subsoil gases at Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic test site. Geosystems of Transition Zones, 2018, vol. 2, no. 1, pp. 16–32, DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032, (In Russian)
- [6] Barberio M. et al. Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon (^{222}Rn) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy. Water, 2018, vol. 10, no. 9:1276. DOI: 10.3390/w10091276.
- [7] Neri M., Giammanco S., Ferrera E., Patane G., Zanon V. Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy), Journal of Environmental Radioactivity, 2011, vol. 102, no. 9, pp. 863–870. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002.
- [8] Petraki E., et al. Radon-222: A Potential Short-Term Earthquake Precursor, Earth Science & Climatic Change, 2015, vol. 6, no. 6. DOI: 10.4172/2157-7617.1000282.
- [9] Hauksson E. Radon content of groundwater as an earthquake precursor: evaluation of worldwide data and physical basis, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1981, vol. 86, no. B10, pp. 9397–9410. DOI: 10.1029/JB086iB10p09397.
- [10] Inan S., Akgul T., Seyis C., Saatcilar R., Baykut S., Ergintav S., Bas M. Geochemical monitoring in the Marmara region (NW Turkey): A search for precursors of seismic activity, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2008, vol. 113, no. B3, pp. 1–15. DOI: 10.1029/2007JB005206.
- [11] Biryulin S. V., Kozlova I. A., Yurkov A. K. Investigation of informative value of volume radon activity in soil during both the stress build up and tectonic earthquakes in the South Kuril region, Bulletin of Kamchatka Regional Association «Educational-Scientific Center» Earth Sciences, 2019, vol. 4, no. 44, pp. 73–83. DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.
- [12] Firstov P. P., Makarov E. O. Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitus Bering Kamchatka State University, 2018, 148 pp., isbn: 978-5-7968-0691-3 (In Russian)
- [13] Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes, Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions, 1993, pp. 9–22.
- [14] Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room, Journal of Environmental Radioactivity, 2013, vol. 124, pp. 185–190. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
- [15] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Elsevier, 2006, 540 pp., isbn: 9780444518323.

- [16] Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. New York, Academic Press, 1999, 340 pp., isbn: 9780125588409.
- [17] Nakhushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp., isbn: 5-9221-0440-3 (In Russian)
- [18] King C. Y. Gas-geochemical approaches to earthquake prediction, Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions, 1993, pp. 22–36.
- [19] Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 4:850, pp. 1–20. DOI: 10.3390/math11040850.
- [20] Parovik R.I., Shevtsov B.M. Radon transfer processes in fractional structure medium, Mathematical Models and Computer Simulation, 2010, vol. 2, pp. 180–185. DOI: 10.1134/S2070048210020055.
- [21] Tverdyi D.A., Parovik R.I., Makarov E.O., Firstov P.P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, E3S Web Conference, 2020, vol. 196, no. 02027, pp. 1–6. DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
- [22] Tverdyi D.A., Makarov E.O., Parovik R.I. Research of Stress-Strain State of Geo-Environment by Emanation Methods on the Example of $\alpha(t)$ -Model of Radon Transport, Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2023, vol. 44, no. 3, pp. 86–104. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104. (In Russian)
- [23] Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems, Applied Mathematics and Mechanics, 1948, vol. 12, pp. 529–539.
- [24] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, Geophysical Journal International, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
- [25] Mueller J.L., Siltanen S. Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012, 372 pp.
- [26] Tarantola A. Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation, Amsterdam and New York: Elsevier Science Pub. Co., 1987, 613 pp.
- [27] Arregui I. Inversion of Physical Parameters in Solar Atmospheric Seismology, Multi-scale Dynamical Processes in Space and Astrophysical Plasmas, 2012, pp. 159–169. DOI: 10.1007/978-3-642-30442-2_18
- [28] Tahmasebi P., Javadpour F., Sahimi M. Stochastic shale permeability matching: Three-dimensional characterization and modeling, International Journal of Coal Geology, 2016, pp. 231–242, vol. 165, DOI: 10.1016/j.coal.2016.08.024.
- [29] Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, Conference on Inverse Scattering, Theory and application, 1983, pp. 206–220.
- [30] Utkin V.I., Yurkov A.K. Radon as a tracer of tectonic movements, Russian Geology and geophysics, 2010, vol. 51, no. 2, pp. 220–227. DOI: 10.1016/j.rgg.2009.12.022
- [31] Parovik R.I. Matematicheskie modeli neklassicheskoy teorii emanacionnogo metoda [Mathematical models of the neoclassical theory of the emanation method]. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitus Bering Kamchatka State University, 2014, 80 pp., isbn: 978-5-7968-0450-6 (In Russian)
- [32] Ponamarev A.S. Frakcionirovaniye v gidroterme kak potencial'naya vozmozhnost' formirovaniya predvestnikov zemletryaseniy [Fractionation in hydrothermal fluid as a potential opportunity for the formation of earthquake precursors]. Geokhimiya [Geochemistry], 1989, no. 5, pp. 714–724 (In Russian)

- [33] Barsukov V. L., Varshal G. M., Garanin A. V., Zamokina N. S. *Znachenie gidrogeohimicheskikh metodov dlya kratkosrochnogo prognoza zemletryasenij* [Significance of hydrogeochemical methods for short-term earthquake prediction], In book: *Gidrogeohimicheskie predvestniki zemletryasenij* [Hydrogeochemical precursors of earthquakes], 1985, Moscow: Science, pp. 3–16.
- [34] Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2002, vol. 129, no. 3–4, pp. 185–204. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00292-8.
- [35] Varhegyi A., Baranyi I., Somogyi G. A. Model for the vertical subsurface radon transport in «geogas» microbubbles, *Geophysical Transactions*, 1986, vol. 32, no. 3, pp. 235–253.
- [36] Gorbushina L. V., Ryaboshtan YU. S. *Emanacionnyj metod indikacii geodinamicheskikh processov pri inzhenerno-geologicheskikh izyskaniyah* [Emanation method of indication of geodynamic processes in engineering-geological surveys]. *Sovetskaya geologiya* [Soviet geology], 1975, pp. 106–112 (In Russian)
- [37] Kozlova I. A., Yurkov A. K. Reflection consecutive seismic events in the field of radon volume activity. *Ural'skij geofizicheskij vestnik* [Ural Geophysical Bulletin], 1975, no. 1(27), pp. 35–39 (In Russian)
- [38] Gudzenko V. V., Dubinchuk V. T. *Izotopy radiya i radon v prirodnyh vodah* [Isotopes of radium and radon in natural waters]. Moscow: Science, 1987, 156 pp. (In Russian)
- [39] Novikov G. F. *Radiometricheskaya razvedka* [Radiometric intelligence]. Leningrad: Nedra, 1989, 406 pp., isbn: 5-247-00832-4. (In Russian)
- [40] Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Berlin/Heidelberg, Springer, 2013, 373 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
- [41] Volterra V. *Sur les équations intégrales-différentielles et leurs applications*, *Acta Mathematica*, 1912, vol. 35, no. 1, pp. 295–356. DOI: 10.1007/BF02418820.
- [42] Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020, vol. 476, no. 2234, pp. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
- [43] Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der Physik*, 2003, vol. 515, no. 11-12, pp. 692–703. DOI: 10.1002/andp.200351511-1203.
- [44] Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. New York, W.H. Freeman and Co., 1982, 468 pp.
- [45] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 1, pp. 23. DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
- [46] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 3, pp. 163. DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
- [47] Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Science*, 2021, no. 299, pp. e623. DOI: 10.7717/peerj-cs.623.
- [48] Cox D. R., Hinkley D. V. *Theoretical Statistics*, 1st edition. New York, Chapman and Hall/CRC, 1974, 528 pp., isbn: 9780429170218.
- [49] Dennis J. E., Moré J. J., Schnabel B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia, SIAM, 1996, 394 pp., isbn: 9781611971200
- [50] Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical Optimization*. Philadelphia, SIAM, 2019, 421 pp.

- [51] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, Quarterly of applied mathematics, 1944, vol. 2, no. 2, pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
- [52] Marquardt D.W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.
- [53] Ford W. Numerical linear algebra with applications: Using MATLAB, 1st edition. Massachusetts, Academic Press, 2014, 628 pp., DOI: 10.1016/C2011-0-07533-6
- [54] Janert P.K. Gnuplot in Action: Understanding Data with Graphs, 2nd Edition. New-York: Manning, 2016, 400 pp., isbn: 1633430189.

Information about the authors



Tverdyi Dmitrii Aleksandrovich ✉ – PhD (Phys. & Math.), Researcher, Electromagnetic Radiation Laboratory, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka village, Russia,
ORCID 0000-0001-6983-5258.



Makarov Evgeny Olegovich ✉ – PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher, Acoustic and Radon Monitoring Laboratory, Kamchatka Branch of the Federal Research Centre "Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia,
ORCID 0000-0002-0462-3657.



Parovik Roman Ivanovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading Researcher, Physical Process Modeling Laboratory, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka village, Russia,
ORCID 0000-0002-1576-1860.