ФИЗИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 519.21, 517.9, 539.1, 539.3, 544.015, 544.034, 550.34

Аномальная диффузия с памятью в теории критичности

Б. М. Шевцов*, О. В. Шереметьева

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

Аннотация. Рассматривается применение эредитарной аномальной диффузии в теории критических явлений. Режимы процесса исследуются в зависимости от параметров дробности производных исходного диффузионного уравнения. Критические индексы, определяющие смену режимов процесса, находятся из условий обращения в бесконечность статистических моментов степенного пространственно-временного распределения диффузионного процесса. Смену режимов процесса в зависимости от критических индексов можно рассматривать как последовательность фазовых переходов. Показана связь дробных производных и критических индексов процесса с его фрактальной размерностью, которой определяются эволюция моментов и связанная с ней классификация типов эредитарной и аномальной диффузии. Сделано заключение о том, что особенности аномальных явлений обусловлены пространственно-временной дисперсией и резонансными эффектами, определяемыми свойствами степенных пространственно-временных распределений диффузионного процесса. С этим связана и структурная перестройка процесса, и перенормировка его источников. Обсуждаются смены режимов диффузионного процесса, при которых дробная диффузия переходит в адвекцию или волной процесс. Предложено обобщение эредитарной аномальной диффузии на случай степенной нестационарности и пространственной неоднородности процесса. Представленную модель дробной диффузии можно использовать для описания режимов активизации и замирания деформационных процессов, сопровождаемых генерацией акустической и электромагнитной эмиссии.

Ключевые слова: эредитарная аномальная диффузия, теория критичности, случайные процессы, дробные производные, критические индексы, резонансы, перенормировка заряда, фазовые переходы, аномальные явления.

Получение: 09.11.2024; Исправление: 18.11.2024; Принятие: 26.11.2024; Публикация онлайн: 28.11.2024

Для цитирования. Шевцов Б. М., Шереметьева О. В. Аномальная диффузия с памятью в теории критичности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 49. № 4. С. 220-230. EDN: PVYICK. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230.

Финансирование. Работа выполнена за счёт Гос. задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2)

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: E-mail: bshev@ikir.ru

PHYSICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230
Research Article
Full text in Russian
MSC 60K50

Anomalous Diffusion with Memory in Criticality Theory

B. M. Shevtsov*, ***O. V. Sheremetyeva***

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS
684034, Kamchatka Krai, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

Abstract. The application of the hereditarian anomalous diffusion in the theory of critical phenomena is considered. The process modes are investigated depending on the fractional parameters of the derivatives of the initial diffusion equation. The critical indices determining the changes of the process modes are found from the conditions of circulation to infinity of the statistical moments of the power-law space-time distribution of the diffusion process. The changes of process modes depending on the critical indices can be considered as a sequence of phase transitions. The relationship of fractional derivatives and critical indices of the process with its fractal dimension is shown, which determines the evolution of moments and the associated classification of types of hereditarian anomalous diffusion. It is concluded that the features of anomalous phenomena are due to spatiotemporal dispersion and resonant effects determined by the properties of power-law spatiotemporal distributions of the diffusion process. This is connected with the structural restructuring of the process and the renormalization of its sources. The changes in the modes of the diffusion process, in which fractional diffusion turns into advection or wave process, are discussed. A generalization of the hereditarian anomalous diffusion is proposed for the case of power-law nonstationarity and spatial heterogeneity of the process. The presented fractional diffusion model can be used to describe the modes of activation and fading of deformation processes accompanied by the generation of acoustic and electromagnetic emissions.

Key words: hereditarian anomalous diffusion, criticality theory, random processes, fractional derivatives, critical indices, resonances, charge renormalization, phase transitions, anomalous phenomena.

Received: 09.11.2024; Revised: 18.11.2024; Accepted: 26.11.2024; First online: 28.11.2024

For citation. Shevtsov B. M., Sheremetyeva O. V. Anomalous diffusion with memory in criticality theory. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **49**: 4, 220-230. EDN: PVYICK. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-220-230.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration No. 124012300245-2)

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence: E-mail: bshev@ikir.ru

Введение

Понятие критических явлений как аномалий, наблюдаемых в фазовых переходах, стало использоваться в исследованиях процессов пластических деформаций, разрушений, турбулентности, распространения волн в резонансных средах и т.д., общие свойства которых – нелинейность, резонансный характер и скейлинг (масштабная инвариантность, свойственная фрактальным средам). Понятие аномалий используется также в теории катастроф и физике предвестников землетрясений, в которых внезапные изменения состояний очень похожи на фазовые переходы. В связи с расширением понятия критических явлений, их методы исследования требуют обобщений и развития.

Критические явления в квантовых системах имеют многочисленные классические аналоги. Для их описания с учетом масштабной инвариантности используются статистические, дробные и фрактальные подходы. Исследуется роль эффектов памяти, пространственной дисперсии, нестационарности и неоднородности процессов. Большое внимание уделяется резонансным эффектам.

Скейлинг играет очень важную роль в формировании критических явлений. Но, как было показано на примере процесса Пуассона [1], не менее важную роль играют свойства памяти процесса. На ряду с этим представляет интерес исследовать роль пространственных эффектов, т.е. пространственной дисперсии (нелокальности). Это можно сделать на примере аномальной диффузии [2, 3], которая обладает пространственной дисперсией, а в более общем случае и свойствами памяти.

Аномальная диффузия используется для статистического писания систем вблизи фазового перехода [4] и адвекции частиц в конвективных течениях [5]. В [6] вместо термина аномальной диффузии используется понятие "странная кинетика особенности которой, называемые полетами Леви, рассматривались в [7–10]. Целью наших исследований будут критические режимы и индексы этого процесса, ответственные за возникновение аномальных явлений.

Аномальная диффузия с памятью

Уравнение эредитарной и аномальной диффузии [2] для функции плотности вероятности $P(x,t)$ записывается в дробных производных Римана-Лиувилля следующим образом:

$$\frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta} = D\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial x^\alpha}, \quad P(x,t)|_{t=0} = \delta(x), \quad 0<\beta\leq 1, \quad 1<\alpha\leq 2, \qquad (1)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, D – коэффициент диффузии.

При $0<\alpha\leq 1$ уравнение (1) переходит в уравнение адвекции. Предполагая смену типа волновых движений при значении параметра дробности $\alpha=1$, будем полагать $0<\alpha\leq 2$. Этот случай интересен тем, что значение $\alpha=1$ является критическим. Другой случай, когда имеют место одновременно диффузия и адвекция, будет рассмотрен отдельно.

Не менее интересен случай, когда параметр β, увеличиваясь в пределах $0 < \beta \leq 2$, переходит через значение $\beta = 1$. При этом уравнение диффузии переходит в волновое уравнение, а затухающие решения уравнения (1) приобретают еще и колебательный характер. Значение $\beta = 1$ также можно рассматривать как критическое, а переход через него можно учесть в конечных решениях.

Решим уравнение (1) с помощью преобразования Фурье

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-iqx} P(q,t) \tag{2}$$

где $P(q,t)$ – характеристическая функция распределения $P(x,t)$. С учетом начального условия $P(x,t)|_{t=0} = \delta(x)$ начальным условием для $P(q,t)$ будет $P(q,t)|_{t=0} = 1)$.

Согласно (1) и (2), уравнением для характеристической функции будет:

$$\frac{\partial^{\beta} P(q,t)}{\partial t^{\beta}} = D\,(-iq)^{\alpha} P(q,t), \quad P(q,t)|_{t=0} = 1, \tag{3}$$

решением которого будет:

$$P(q,t) = E_{\beta}\left((-iq)^{\alpha/\beta} D^{1/\beta} t\right), \tag{4}$$

где $E_{\rho}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\rho k)}$ – функция Миттаг-Леффлера, $0 \leq \rho < \infty$, $\Gamma(x)$ – Гамма-функция.

С учётом (2) и (4) для функции плотности вероятности получаем:

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-iqx} E_{\beta}\left((-iq)^{\alpha/\beta} D^{1/\beta} t\right). \tag{5}$$

Найденное решение для процесса аномальной диффузии $P(x,t)$ – это обратное преобразование Фурье сложной функции Миттаг-Леффлера от степенного аргумента $(-iq)^{\alpha/\beta}$ с безразмерным масштабным множителем $D^{1/\beta}t$.

Параметр β задает память процесса, α определяет его пространственную дисперсию, а $D^{1/\beta}$ – скорость диффузии или адвекции в зависимости от значения α. Вместе они задают дисперсионное соотношение процесса $(-i\omega)^{\beta} = (-iq)^{\alpha} D$, которое можно получить преобразованием Фурье выражения (3) по времени.

Распределение $P(x,t)$ – это расплывающийся "колокол"при $0 \leq t$ и сжимающийся при $t \leq 0$ (второй случай предполагает реверс процесса диффузии во времени). Первое дает описание диффузии в равновесной среде, а второе представляет процесс обратной диффузии, самоорганизации или консолидации в инвертированной среде, например, в деформированной энергонасыщенной, в которой возникает последовательность форшоков, завершающаяся главным ударом при $t = 0$. При $0 \leq t$ распределение $P(x,t)$ представляет аномальную дробную диффузию последовательности афтершоков. Начальным при $0 \le t$ и конечным при $t \le 0$ условием для $P(x,t)$ в момент $t = 0$ будет $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

При $\beta = 1$ распределение $P(x,t)$ становится распределением Леви [2–5], которое переходит при $\alpha = 2$ в распределение Гаусса, при $\alpha = 1.5$ в распределение Леви-Смирнова $p(x) = exp(-1/2x)/(2\pi)^{1/2}x^{3/2}$, а при $\alpha = 1$ в распределение Коши (у физиков – это распределение Лоренца).

Критические индексы

Особенность распределения $P(x,t)$ в том, что оно имеют степенные крылья, благодаря которым обращаются в бесконечность статистические моменты степени выше некоего критического значения, определенного соотношением параметров $\alpha = 2$ и $\beta = 1$. Такое поведение статистических моментов можно использовать для классификации критических режимов процесса $P(x,t)$.

За поведение $P(x,t)$ при больших x отвечают малые значения q. В связи с этим, согласно соотношению $qx << 1$, можно в асимптотическом разложении (4) и (5) оставить только два первых слагаемых, положить $e^{-iqx} \approx 1$ и ограничить пределы интегрирования величиной $1/x$. В результате получим:

$$P(x,t) \sim \delta(x) + \frac{D^{1/\beta}t}{2\pi\Gamma(1+\beta)} \int\limits_{-1/x}^{1/x} dq\,(-iq)^{\alpha/\beta} + ..., \qquad x \to \infty, \tag{6}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Для крыльев распределения $P(x,t)$, вычисляя интеграл в (6), находим асимптотику:

$$P(x,t) \sim \frac{D^{1/\beta}t}{\pi\Gamma(1+\beta)} \frac{\cos(\pi\alpha/2\beta)}{1+\alpha/\beta} \frac{1}{x^{1+\alpha/\beta}} + \ldots, \qquad |x| \to \infty. \tag{7}$$

Согласно асимптотике $1/x^{1+\alpha/\beta}$ (7), моменты $< x^{\mu} >$ распределения $P(x,t)$ при $\mu > \alpha/\beta$ обращаются в бесконечность. Отсутствие второго момента у распределения указывает на сильные флуктуации в системе, отсутствие первого момента соответствует неограниченному значению статистического среднего изменений в системе, что можно интерпретировать как катастрофические разрушения, а бесконечность нулевого момента может указывать на ненормируемость распределения $P(x,t)$, которое можно понимать лишь в смысле обобщенных функций. Такая исключительная ситуация в системе может указывать на ее неустойчивостью, однако катастрофа такого типа не наступает, поскольку для критических значений индексов мы получаем $K = \alpha/\beta = 0,\ 1,\ 2$, но α не может принимать значение $\alpha = 0$ по определению. Эти свойства аномального диффузионного процесса можно использовать для классификации его критических режимов, под сменой которых можно понимать фазовые переходы первого и второго типа, когда $K = \alpha/\beta = 1,\ 2$.

Смена режимов процесса зависит от α/β – отношения параметров дисперсий, временной и пространственной (или частотной и волновой). Это можно рассматривать как конкуренцию дисперсий: параметр пространственной нелокальности процесса α играет на повышение критического индекса, а параметр памяти β на понижение. При этом может происходить смена типа волнового движения, если параметры α и β переходят значения $\alpha = 1$ и $\beta = 1$.

Аномальная диффузия с памятью и адвекцией

Уравнение аномальной диффузии с адвекцией и памятью запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^{\beta} P(x,t)}{\partial t^{\beta}} = V\frac{\partial^{\gamma} P(x,t)}{\partial x^{\gamma}} + D\frac{\partial^{\alpha} P(x,t)}{\partial x^{\alpha}}, \quad P(x,t)|_{t=0} = \delta(x), \tag{8}$$

где $0 < \beta \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad V$ и D – скорость адвекции и коэффициент диффузии.

С помощью преобразования Фурье (2) и уравнения (8) получаем уравнением для характеристической функции:

$$\frac{\partial^{\beta} P(q,t)}{\partial t^{\beta}} = [(-iq)^{\gamma} V + (-iq)^{\alpha} D] P(q,t), \quad P(q,t)|_{t=0} = 1, \tag{9}$$

решением которого будет

$$P(q,t) = E_{\beta}\left([(-iq)^{\gamma} V + (-iq)^{\alpha} D]^{1/\beta} t\right). \tag{10}$$

Из этого выражения с помощью обратного преобразования Фурье получаем решение уравнения (8):

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-iqx} E_{\beta}\left([(-iq)^{\gamma} V + (-iq)^{\alpha} D]^{1/\beta} t\right). \tag{11}$$

Асимптотики для этого выражения получаются точно так же, как и для выражения (5). В зависимости от того, что будет преобладать, диффузия или адвекция, мы должны удерживать соответствующее слагаемое в квадратных скобках выражения (11). В связи с этим, и результат анализа критических индексов будет такой же, как и в предыдущем разделе. Преимущество более общего уравнения (8) перед уравнением (1) в том, что в диффузии с адвекцией (8) появляется два дополнительных параметра γ и V, которые позволяют более подробно описать процесс. Однако при нахождении асимптотик и определении критических индексов приходится выбирать и оставлять только тот процесс, диффузии или адвекции, который преобладает, поэтому можно воспользоваться результатами предыдущего раздела.

Благодаря адвекции дисперсионное уравнение аномальной диффузии приобретает более сложный вид: $(-i\omega)^{\beta} = (-iq)^{\gamma} V + (-iq)^{\alpha} D$. Это уравнение получается преобразованием Фурье выражения (9) по времени.

Резонансные явления

До сих пор мы рассматривали уравнения диффузии (1) и (8), решение которых с начальным условием $P(x,t)|_{t=0} = \delta(x)$ представляет собою функцию Грина, т.е. волновую функцию точечного источника. Далее мы будем предполагать наличие процесса, создающего источники $P_0(x,t)$ для поля $P(x,t)$, которое подчиняется неоднородному уравнению:

$$\frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta} = V\frac{\partial^\gamma P(x,t)}{\partial x^\gamma} + D\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial x^\alpha} + P_0(x,t), \tag{12}$$

где $0 < \beta \leq 1, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad V$ и D – скорости адвекции и коэффициент диффузии. Чтобы расширить возможности применения уравнения (12), можно воспользоваться более широким диапазоном определения параметра памяти процесса $0 < \beta \leq 2$, что позволяет рассматривать не только диффузионные, но и волновые процессы. Смена типа уравнения происходит при $\beta = 1$.

В качестве производящего процесса $P_0(x,t)$ можно использовать процесс Пуассона [11–16] определяющий поток случайных импульсов в различных областях пространства. А процесс $P(x,t)$ при этом будет определять диффузию каждого из таких импульсов. Прямое решение (расходящаяся волна) дает систему афтершоков, а инвертированное во времени решение (сходящаяся волна) дает систему форшоков. Первое – это процесс разрушений, а второе – это процесс консолидации (самоорганизации).

Решение уравнения (12) находится с помощью преобразования Фурье по времени и пространству:

$$P(q,\omega) = \frac{P_0(q,\omega)}{(-i\omega)^\beta - (-iq)^\gamma V - (-iq)^\alpha D}. \tag{13}$$

Выражение (13) определяет связь спектральной амплитуды диффузионного процесса $P(q,\omega)$ с амплитудой процесса производящего $P_0(q,\omega)$. Резонансный контур в выражении (13) определяется дисперсионными свойствами среды. Можно добавить слагаемое в левую часть уравнения (12) с более высокой дробной производной, что позволит на ряду с диффузионным рассмотреть и волновой процесс.

Амплитуда колебаний $P(q,\omega)$ определяется произведением резонансного контура и спектра производящего процесса $P_0(q,\omega)$, который тоже может иметь свою масштабную инвариантность, благодаря которой возникнет дополнительная конкуренция скейлингов и изменение критических индексов.

Согласно выражению (13), формой резонансного контура определяется перенормировка амплитуды источников (зарядов) рассматриваемого процесса. В результате этой перенормировки возможны катастрофические ситуации вследствие расходимостей в интегралах обратного преобразования Фурье, что дает нам понимание механизмов возникновения диффузионных или волновых аномалий в средах с дробной дисперсией.

Степенная нестационарность и пространственная неоднородность процесса

В заключении мы рассмотрим еще два обобщения диффузионного процесса, которые могут оказывать влияние на его критические индексы. Суть этого обобщения в использовании степенных координат t^γ и x^δ. Первая замена делает процесс нестационарным, а вторая создает пространственную неоднородность степенного типа. При этом в уравнении (1) надо сделать следующие замены:

$$\frac{\partial^\beta P(x,t)}{\partial t^\beta} = D\frac{(\gamma t^{\gamma-1})^\beta}{(\delta x^{\delta-1})^\alpha}\frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial x^\alpha}, \quad P(x,t)|_{t=0} = \delta(x), \quad 0 < \beta \le 1, \quad 1 < \alpha \le 2. \quad (14)$$

Таким образом мы ввели степенную нестационарность и пространственную неоднородность процесса, с помощью которых можно моделировать кластеры форшоков и афтершоков. Примечательно то, что степенная замена координат не исключает возможности применение преобразования Фурье для получения решений, которые можно использовать для описания цепных реакций и пространственных неоднородностей степенного типа.

Критические индексы при переходе к степенным координатам будут определяться следующим образом: $K = \alpha\delta/\beta\gamma = 1,\ 2$.

Асимптотики эволюции моментов и фрактальная размерность процесса

Асимптотики эволюции моментов $<|x^\alpha|>= const\cdot t^\beta$ дробного диффузионного процесса рассматривались в [17]. Используя эти асимптотики, можно найти фрактальную размерность процесса $d = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\epsilon)}$. Принимая в качестве меры процесса дробный аналог среднеквадратического $<|x^\alpha|>^{1/\alpha}= (const)^{1/\alpha}\, t^{\beta/\alpha} = N_\epsilon$ и выбирая в качестве диаметра покрытия $t = \varepsilon$, получим $d = \beta/\alpha$. Очевидно, что параметр α может принимать только те значения, при которых соответствующая мера процесса существует.

А с учетом степенной нестационарности и пространственной неоднородности процесса при переходе к степенным координатам его фрактальная размерность будет $d = \beta\gamma/\alpha\delta$.

Принимая во внимание, что фрактальная размерность процесса равна обратным индексам критичности $d = 1/K = \beta/\alpha = 1,\ 1/2$, мы можем определить дробный аналог дисперсии процесса $< |x^\alpha| >^{2/\alpha}= (const)^{2/\alpha}\ t^{2\beta/\alpha}$. В случае, когда второй момент конечный и $d = 1/K = \beta/\alpha = 1/2$, получается нормальная диффузия. В случае, когда существуют моменты больше второго порядка, то получается субдиффузия, а когда существуют моменты меньше второго порядка, то получается супердиффузия. Последнее соответствует полетам Леви, времена ожидания которых рассмотрены в [18], а в сопоставлении с сейсмическими данными исследованы в [1].

Надо отметить, что структурная перестройка процесса, связанная с изменением его фрактальной размерности, происходит при тех же значениях критических индексов, что и изменения в режимах процесса, связанные с обращением его моментов в бесконечность. При этих же значениях критических индексов происходят изменения в дисперсионных соотношениях и резонансных эффектах. Таким образом свойства процесса и среды связаны и согласованы между собой через значения критических индексов.

Результаты

Рассмотрена возможность использования аномальной диффузии с адвекцией и памятью в теориях критичности и фазовых переходов. Получена зависимость критических индексов процесса от параметров дробности аномальной эредитарной диффузии. Показана возможность возникновения резонансов в процессах аномальной диффузии и адвекции с памятью. Предложено обобщение полученных результатов на дробный волновой процесс. Сделан вывод о том, что диффузионный или волновой резонансы являются причиной перенормировки источников (зарядов) процесса и возникновения аномалий. Предложена модель нестационарной и неоднородной аномальной диффузии и адвекции с памятью для описания цепных реакций, взрывных процессов, форшоковых и афтершоковых последовательностей, а также пространственных неоднородностей процесса степенного типа, которые возникают в преддверии активизации процесса. Установлена связь фрактальной размерности диффузионного процесса с его критическими индексами, дисперсионными и резонансными свойствами среды и перенормировкой источников процесса.

Заключение

Представленная многопараметрическая модель дробной диффузии была разработана в развитие идей, предложенных в статье [1], для описания аномальных явлений, возникающих в сложных деформационных процессах, сопровождающихся генерацией акустической и электромагнитной эмиссии. Особое внимание было уделено роли критических индексов, пространственной дисперсии и резонансных эффектов в структурных изменениях процесса и его взаимодействия со средой. Обладая определенной универсальностью, основанной на свойствах степенных законов, эта модель может найти широкое применение в различных областях физики для описания критических явлений.

Список литературы

1. Shevtsov B. M., Sheremetyeva O. V. Fractional Criticality Theory and Its Application in Seismology // *Fractal Fract.*, 2023. vol. 7, pp. 890 DOI: 10.3390/fractalfract7120890.
2. Заславский Г. М. *Физика хаоса в гамильтоновых системах.* Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 288 с.
3. Le'vy P. *Theorie de l'Addition des Variables Aletoires.* Paris: Guathier-Villiers, 1937. 328 pp.

4. Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamic critical phenomena // *Rev. Mod. Phys.*, 1977. vol. 49, no. 3, pp. 435 DOI: 10.1103/RevModPhys.49.435.
5. Young W., Pumir A., Pomeau Y. Anomalous diffusion of tracer in convection rolls // *Phys. Fluids*, 1989. vol. A1, no. 3, pp. 462–469 DOI: 10.1063/1.857415.
6. Shlesinger M. F, Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // *Nature*, 1993. T. 363, C. 31–37 DOI: 10.1038/363031a0.
7. Montroll E. W., Shlesinger M. F. Asymptotic behavior of densities in diffusion dominated two-particle reactions / *Stadies in Statistical Mechanics Vol. 11*, ed. Lebowitz J., Montroll M.. Amsterdam, North-Holland, 1984, pp. 1.
8. Fogedby H. C. Lévy Flights in Random Environments // *Phys. Rev. Lett.*, 1994. vol. 73, pp. 2517 DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.2517.
9. Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U. *Le'vy Flight and Related Topics in Physics*. Heidelberg: Springer, 1995. 347 pp.
10. Kahane J. P. Definition of stable laws, infinitely divisible laws, and Lévy processes / *In Le'vy Flight and Related Topics in Physics*, ed. Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U.. New York, Springer, 1995, pp. 97-109.
11. X. Wang and Z. Wen Poisson fractional processes // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003. vol. 18, no. 1, pp. 169–177 DOI: 10.1016/s0960-0779(02)00579-9.
12. Wang X., Wen Z., Zhang S. Fractional Poisson process (II) // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006. vol. 28, no. 1, pp. 143–147 DOI: 10.1016/j.chaos.2005.05.019.
13. Uchaikin V. V., Cahoy D. O., Sibatov R. T. Fractional processes: from Poisson to branching one // *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2008. vol. 18, pp. 1–9.
14. Beghin, L.; Orsingher, E. Fractional Poisson processes and related planar random motions // *Electron. Journ. Prob.*, 2009. vol. 14, pp. 1790–1826.
15. Scalas E. A Class of CTRWs: Compound Fractional Poisson Processes / *Fractional Dynamics, Chapter 15*, ed. Lim S. C., Klafter J., Metzler R.. Singapore, World Scientific, 2012, pp. 353–374.
16. Gorenflo R., Mainardi F. On the Fractional Poisson Process and the Discretized Stable Subordinator // *Axioms*, 2015. vol. 4(3), pp. 321-344 DOI: 10.3390/axioms4030321.
17. Saichev A. I., Zaslavky G. M. Fractional kinetic equation: solutions and applications // *Chaos*, 1997. vol. 7, no. 4, pp. 753 DOI: 10.1063/1.166272.
18. Hilfer H., Anton L. Fractional master equations and fractal time random walks // *Phys. Rev. E*, 1995. vol. 51, pp. R848–R851 DOI: 10.1103/PhysRevE.51.R848.

Информация об авторах

Шевцов Борис Михайлович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории электромагнитного излучения ИКИР ДВО РАН, Камчатский край, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0003-0625-0361.

Шереметьева Ольга Владимировна✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов ИКИР ДВО РАН, Камчатский край, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-9417-9731.

References

[1] Shevtsov B. M., Sheremetyeva O. V. Fractional Criticality Theory and Its Application in Seismology, Fractal Fract., 2023, vol. 7, pp. 890. DOI: 10.3390/fractalfract7120890

[2] Zaslavsky G. M. Fizika haosa v gamil'tonovyh sistemah [Physics of chaos in Hamiltonian systems]. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Research, 2004, 288 p. (In Russian).

[3] Le'vy P. Theorie de l'Addition des Variables Aletoires. Paris, Guathier-Villiers, 1937, 328 p.

[4] Hohenberg P. C., Halperin B. I. Theory of dynamic critical phenomena, Rev. Mod. Phys., 1977, vol. 49, no. 3, pp. 435. DOI: 10.1103/RevModPhys.49.435

[5] Young W., Pumir A., Pomeau Y. Anomalous diffusion of tracer in convection rolls, Phys. Fluids A, 1989, vol. 1, no. 3, pp. 462–469. DOI: 10.1063/1.857415

[6] Shlesinger M. F, Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics, Nature, 1993, vol. 363, pp. 31–37. DOI: 10.1038/363031a0

[7] Montroll E. W., Shlesinger M. F. Asymptotic behavior of densities in diffusion dominated two-particle reactions. In Studies in Statistical Mechanics Vol. 11, ed. Lebowitz J., Montroll M., Amsterdam, North-Holland, 1984, pp. 1.

[8] Fogedby H. C. Lévy Flights in Random Environments, Phys. Rev. Lett., 1994, vol. 73, pp. 2517. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.2517

[9] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U. ed. Le'vy Flight and Related Topics in Physics. Heidelberg, Springer, 1995, 347 p.

[10] Kahane J. P. Definition of stable laws, infinitely divisible laws, and Lévy processes. In Le'vy Flight and Related Topics in Physics, ed. Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U., New York, Springer, 1995, pp. 97–109.

[11] Wang X., Wen Z. Poisson fractional processes, Chaos, Solitons and Fractals, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 169–177. DOI: 10.1016/s0960-0779(02)00579-9

[12] Wang X., Wen Z., Zhang S. Fractional Poisson process (II), Chaos, Solitons and Fractals, 2006, vol. 28, no. 1, pp. 143–147. DOI: 10.1016/j.chaos.2005.05.019

[13] Uchaikin V. V., Cahoy D. O., Sibatov R. T., Fractional processes: from Poisson to branching one, Int. J. Bifurcation Chaos, 2008, vol. 18, pp. 1–9.

[14] Beghin L., Orsingher E. Fractional Poisson processes and related planar random motions, Electron. Journ. Prob., 2009, vol. 14, pp. 1790–1826.

[15] Scalas E., A Class of CTRWs: Compound Fractional Poisson Processes, in S.C. Lim , J. Klafter and R. Metzler (Editors), Fractional Dynamics, Chapter 15, pp. 353–374, World Scientific, Singapore, 2012.

[16] Gorenflo R., Mainardi F. On the Fractional Poisson Process and the Discretized Stable Subordinator. Axioms, 2015, vol. 4(3), pp. 321–344. DOI: 10.3390/axioms4030321

[17] Saichev A. I., Zaslavky G. M. Fractional kinetic equation: solutions and applications. Chaos, 1997, vol. 7, no. 4, pp. 753. DOI: 10.1063/1.166272

[18] Hilfer H., Anton L. Fractional master equations and fractal time random walks. Phys. Rev. E, 1995, vol. 51, pp. R848–R851. DOI: 10.1103/PhysRevE.51.R848

Information about the authors

Shevtsov Boris Mikhailovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Major Researcher, Electromagnetic Radiation Laboratory, IKIR FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0003-0625-0361.

Sheremetyeva Olga Vladimirovna – Ph. D. (Tech.), Research Scientist, Laboratory of Physical Process Modeling, IKIR FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0001-9417-9731.