



## Об одной системе связанных линейных осцилляторов с дробным трением и непостоянными коэффициентами для описания геоакустической эмиссии

Д. Ф. Сергиенко<sup>\*1,2</sup>, Р. И. Паровик<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д.4, Россия

<sup>2</sup> Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

**Аннотация.** В работе предложено обобщение ранее полученной математической модели геоакустической эмиссии, согласно которому в модели учитываются эффекты наследственности в диссипативных членах. Модель представляет систему из двух связанных линейных осцилляторов с непостоянными коэффициентами и с производными дробных порядков Герасимова-Капуто, которые описывают вязкое трение (дробное трение). Математическая модель исследуется численно с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности, которая была реализована в среде компьютерной символьной математики Maple 2022. В этой компьютерной среде была произведена визуализация результатов моделирования: построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Дана интерпретация результатов моделирования. Показано, что дробное трение может влиять на процесс взаимодействия источников геоакустической эмиссии.

*Ключевые слова:* геоакустическая эмиссия, дробная производная Герасимова-Капуто, модель, осциллограммы, фазовая траектория, Maple 2022

Получение: 21.10.2024; Исправление: 12.11.2024; Принятие: 22.11.2024; Публикация онлайн: 27.11.2024

**Для цитирования.** Сергиенко Д.Ф., Паровик Р.И. Об одной системе связанных линейных осцилляторов с дробным трением и непостоянными коэффициентами для описания геоакустической эмиссии // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 49. № 4. С. 36-49. EDN: MKTALS. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-36-49>.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 22-11-0064 «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности» <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>).

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

\*Корреспонденция: ✉ E-mail: [darya@ikir.ru](mailto:darya@ikir.ru)

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Сергиенко Д. Ф., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





## On a System of Coupled Linear Oscillators with Fractional Friction and Non-Constant Coefficients for Describing Geoacoustic Emission

*D. F. Sergienko*<sup>\*1,2</sup>, *R. I. Parovik*<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogradnaya str., 4, Russia

<sup>2</sup> Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 684034, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

**Abstract.** The paper proposes a generalization of the previously obtained mathematical model of geoacoustic emission, according to which the model takes into account the effects of heredity in dissipative terms. The model is a system of two coupled linear oscillators with non-constant coefficients and with fractional derivatives of Gerasimov-Caputo orders, which describe viscous friction (fractional friction). The mathematical model is studied numerically using a non-local explicit finite-difference scheme of the first order of accuracy, which was implemented in the Maple 2022 computer symbolic mathematics environment. In this computer environment, the modeling results were visualized: oscillograms and phase trajectories were constructed for different values of the model parameters. The interpretation of the modeling results is given. It is shown that fractional friction can affect the process of interaction of geoacoustic emission sources.

*Key words:* geoacoustic emission, Gerasimov-Caputo fractional derivative, model, oscillograms, phase trajectory, Maple 2022.

Received: 21.10.2024; Revised: 12.11.2024; Accepted: 22.11.2024; First online: 27.11.2024

**For citation.** Sergienko D. F., Parovik R. I. On a system of coupled linear oscillators with fractional friction and non-constant coefficients for describing geoacoustic emission. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 49: 4, 36-49. EDN: MKTALS. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-49-4-36-49>.

**Funding.** The work was funded by Russian Science Foundation [grant number 22-11-00064 «Modeling dynamic processes in geospheres taking into account heredity»]. <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>

**Competing interests.** The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

\*Correspondence:  E-mail: darya@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Sergienko D. F., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



## Введение

Высокочастотная геоакустическая эмиссия (ГЭ) представляет собой важный и актуальный объект исследования в области геофизики и геоэкологии. Этот феномен включает в себя акустические волны, возникающие в результате различных геологических процессов, таких как деформация горных пород, землетрясения, обвалы, а также антропогенные воздействия, включая строительство и добычу полезных ископаемых. Высокочастотные сигналы, часто превышающие 100 кГц, предоставляют ценную информацию о микро- и макроструктурах земной коры, а также о динамике процессов, происходящих в подземной среде [1–7].

Акустические волны, генерируемые в результате геологических процессов, могут служить индикаторами изменений в состоянии горных пород и предсказывать потенциальные риски, связанные с геодинамическими явлениями. Например, анализ ГЭ позволяет выявлять зоны повышенной активности, что может быть критически важным для предотвращения катастроф, связанных с обвалами или землетрясениями [1, 3, 6, 7]. В этом контексте высокочастотная ГЭ становится не только объектом научного интереса, но и инструментом для обеспечения безопасности и устойчивости инфраструктуры.

Современные технологии регистрации и обработки сигналов, такие как массивы микрофонов и цифровые системы обработки данных, значительно расширяют возможности исследования высокочастотной ГЭ [2, 4–6]. Эти технологии позволяют не только фиксировать сигналы с высокой временной и пространственной разрешающей способностью, но и проводить их анализ с использованием методов машинного обучения и статистической обработки данных. Это создает новые перспективы для понимания сложных геодинамических процессов и их взаимосвязей.

Другой подход в исследовании высокочастотной ГЭ связан с математическим моделированием [1]. Этот подход является актуальным так как математических моделей высокочастотной ГЭ очень мало представлено в научной литературе. Преимущество такого подхода заключается в том, что можно с точки зрения математики описать динамический процесс высокочастотной ГЭ, получить его некоторые закономерности, которые потом можно использовать в решении прикладных задач.

В настоящей работе с помощью инструментов математического моделирования была предложена математическая модель высокочастотной ГЭ как система двух линейных связанных осцилляторов с непостоянными коэффициентами и эффектами наследственности в диссипативных членах по аналогии с со статьей [8]. Эффекты наследственности [9] указывают на то, что текущее состояние динамической системы зависит от предыдущих ее состояний, а их математическое описание дается в терминах дробных производных, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [10, 11]. Предложенная математическая модель обобщает ранее известную модель из работ авторов [12, 13], а настоящая статья является продолжением этих работ.

## Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую динамическую систему:

$$\begin{cases} \ddot{g}_1(t) = \left(\frac{a_1}{t} - \frac{a_1}{b_1}\right) \partial_{0t}^{\beta_1} g_1(t) - \left(\frac{a_1}{t^2} + c_1^2\right) g_1(t) + \\ \quad + \left(\frac{a_1}{t} - \frac{a_1}{b_1}\right) A_1 c_1 t^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t\right) \cos(c_1 t + \phi_{0,1}) + k g_2(t), \\ \ddot{g}_2(t) = \left(\frac{a_2}{t} - \frac{a_2}{b_2}\right) \partial_{0t}^{\beta_2} g_2(t) - \left(\frac{a_2}{t^2} + c_2^2\right) g_2(t) + \\ \quad + \left(\frac{a_2}{t} - \frac{a_2}{b_2}\right) A_2 c_2 t^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t\right) \cos(c_2 t + \phi_{0,2}) + k g_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $g_1(t), g_2(t) \in C^2[t_0, T]$  - функции решения,  $k$  - коэффициент линейной связи заданная константа,  $T$  - время моделирования процесса,  $t_0 \neq 0$ ,  $a_i, b_i, c_i, A_i, \phi_{0,i}$ ,  $i = 1, 2$  - заданные константы. Для системы (1) начальные условия можно задать в виде:

$$\begin{cases} g_1(t_0) = A_1 t_0^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t_0\right) \sin(c_1 t_0 + \phi_{0,1}), \\ \dot{g}_1(t_0) = \left(\frac{a_1}{t_0} - \frac{a_1}{b_1}\right) g_1(t_0) + A_1 c_1 t_0^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t_0\right) \cos(c_1 t_0 + \phi_{0,1}), \\ g_2(t_0) = A_2 t_0^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t_0\right) \sin(c_2 t_0 + \phi_{0,2}), \\ \dot{g}_2(t_0) = \left(\frac{a_2}{t_0} - \frac{a_2}{b_2}\right) g_2(t_0) + A_2 c_2 t_0^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t_0\right) \cos(c_2 t_0 + \phi_{0,2}), \end{cases} \quad (2)$$

Дробные производные в правых частях динамической системы (1) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [14, 15]:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\beta_1} g_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta_1)} \int_0^t \frac{g_1(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta_1}}, \\ \partial_{0t}^{\beta_2} g_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta_2)} \int_0^t \frac{g_2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta_2}}, \quad \alpha < \beta_1, \beta_2 < 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера.

**Замечание 1.** Задача (1), (2) является задачей Коши для системы связанных линейных осцилляторов с дробным трением и непостоянными коэффициентами. В случае, когда  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , то мы получаем задачу Коши, которая была исследована в работах [12, 13].

**Замечание 2.** Необходимо отметить, что в статье [16] была предложена система связанных линейных осцилляторов с непостоянными коэффициентами для описания высокочастотной геоакустической эмиссии с дробной инерцией. Однако так как система является линейной и не описывает автоколебания, то дробная инерция приводит к быстро затухающим осцилляциям.

**Замечание 3.** Заметим, что непостоянные коэффициенты в системе (1) со временем убывают до некоторых постоянных значений. Это свойство системы (1) было использовано авторами статьи [12] для качественного анализа системы (1)

при  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . В том числе и вопросы существования и единственности решения. В настоящей работы мы не будем исследовать этот вопрос, его можно исследовать по аналогии с методикой работы [17].

Несмотря на то, что система (1) является линейной, но за счет наличия непостоянных коэффициентов, решение в аналитическом виде получить сложно. Поэтому мы применим численные методы для решения задачи (1), (2).

Построим нелокальную явную конечно-разностную схему. Для этой цели введем равномерную сетку с шагом  $\tau = T/N$ , где  $N$  — количество узлов сетки. Пусть функции  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  обладают необходимой гладкостью, тогда вводим сеточные функции  $g_1(t_j), g_2(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, N-1, t_j = j\tau$ . Аппроксимации целочисленных производных в правой части системы (1) и дробных операторов (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{g}_1(t) &\approx \frac{g_{1,j+1} - 2g_{1,j} + g_{1,j-1}}{\tau^2}, \ddot{g}_2(t) \approx \frac{g_{2,j+1} - 2g_{2,j} + g_{2,j-1}}{\tau^2} \\ \partial_{0t}^{\beta_1} g_1(t) &\approx \frac{\tau^{-\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)} \sum_{i=0}^{j-1} w_i^{\beta_1} (g_{1,j-i+1} - g_{1,j-i}), \\ \partial_{0t}^{\beta_2} g_2(t) &\approx \frac{\tau^{-\beta_2}}{\Gamma(2-\beta_2)} \sum_{i=0}^{j-1} w_i^{\beta_2} (g_{2,j-i+1} - g_{2,j-i}). \end{aligned} \quad (4)$$

где весовые коэффициенты имеют вид:

$$w_i^{\beta_1} = (i+1)^{1-\beta_1} - i^{1-\beta_1}, w_i^{\beta_2} = (i+1)^{1-\beta_2} - i^{1-\beta_2}.$$

Подставляя аппроксимации дифференциальных операторов (4) в (1) с учетом сеточных функций и после некоторых преобразований мы приходим к следующей дискретной системе:

$$\begin{cases} g_{1,j+1} = \frac{1}{1-M_{1,j}} \left( (2-M_{1,j}-P_{1,j})g_{1,j} - g_{1,j-1} + F_{1,j} + Kg_{2,j} + M_{1,j} \sum_{i=1}^{j-1} w_i^{\beta_1} (g_{1,j-i+1} - g_{1,j-i}) \right), \\ g_{2,j+1} = \frac{1}{1-M_{2,j}} \left( (2-M_{2,j}-P_{2,j})g_{2,j} - g_{2,j-1} + F_{2,j} + Kg_{1,j} + M_{2,j} \sum_{i=1}^{j-1} w_i^{\beta_2} (g_{2,j-i+1} - g_{2,j-i}) \right), \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_{1,j} &= \left( \frac{a_1}{j\tau} - \frac{a_1}{b_1} \right) \frac{\tau^{2-\beta_1}}{\Gamma(2-\beta_1)}, M_{2,j} = \left( \frac{a_2}{j\tau} - \frac{a_2}{b_2} \right) \frac{\tau^{2-\beta_2}}{\Gamma(2-\beta_2)}, \\ P_{1,j} &= \tau^2 \left( \frac{a_1}{(j\tau)^2} + c_1^2 \right), P_{2,j} = \tau^2 \left( \frac{a_2}{(j\tau)^2} + c_2^2 \right), K = \tau^2 k, \\ F_{1,j} &= \tau^2 \left( \frac{a_1}{j\tau} - \frac{a_1}{b_1} \right) A_1 c_1 (j\tau)^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} j\tau\right) \cos(c_1 j\tau + \phi_{0,q}), \\ F_{2,j} &= \tau^2 \left( \frac{a_2}{j\tau} - \frac{a_2}{b_2} \right) A_2 c_2 (j\tau)^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} j\tau\right) \cos(c_2 j\tau + \phi_{0,q}). \end{aligned}$$

Начальные условия (2) для дискретной системы (5) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 g_{1,1} &= g_{1,0} + \tau\phi_1, g_{2,1} = g_{2,0} + \tau\phi_2, \\
 g_{1,0} &= A_1 t_0^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t_0\right) \sin(c_1 t_0 + \phi_{1,0}), g_{2,0} = A_2 t_0^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t_0\right) \sin(c_2 t_0 + \phi_{2,0}), \\
 \phi_1 &= \left(\frac{a_1}{t_0} - \frac{a_1}{b_1}\right) g_{1,0} + A_1 c_1 t_0^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t_0\right) \cos(c_1 t_0 + \phi_{0,1}), \\
 \phi_2 &= \left(\frac{a_2}{t_0} - \frac{a_2}{b_2}\right) g_{2,0} + A_2 c_2 t_0^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t_0\right) \cos(c_2 t_0 + \phi_{0,2}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

**Замечание 4.** Дискретная задача (5) и (6) является нелокальной явной конечно-разностной схемой. Ее нелокальность определяется наличием сумм в правых частях системы (5), в которых присутствуют компоненты решения на предыдущих шагах.

Следуя методике статьи [18], можно показать, что схема (5), (6) имеет первый порядок точности. Несмотря на то, что схема (5), (6) является условно устойчивой, мы всегда можем контролировать шаг сетки, путем увеличения ее узлов.

## Результаты моделирования

С помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы (5,6) были произведены расчеты осциллограмм и фазовых траекторий и их визуализация, которые мы осуществим в компьютерной среде символьной математики Maple 2022 [19].

В таблице приведены значения некоторых параметров модели (1), которые мы будем использовать в дальнейшем в моделировании [12].

*Таблица*

### Параметры задачи [Task parameters]

Параметры	Значения
$a_1$	1.3785
$b_1$	0.004
$c_1$	31416
$a_2$	3.1831
$b_1$	0.006
$c_1$	31416
$A_1$	0.5
$A_2$	0.7
$k$	$10^7$

**Пример 1.** (Случай  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ). Значения параметров для расчетов по численной схеме (5), (6) выберем следующими:  $t \in [10^{-5}, 5 \cdot 10^{-2}]$ ,  $N = 5000$ .

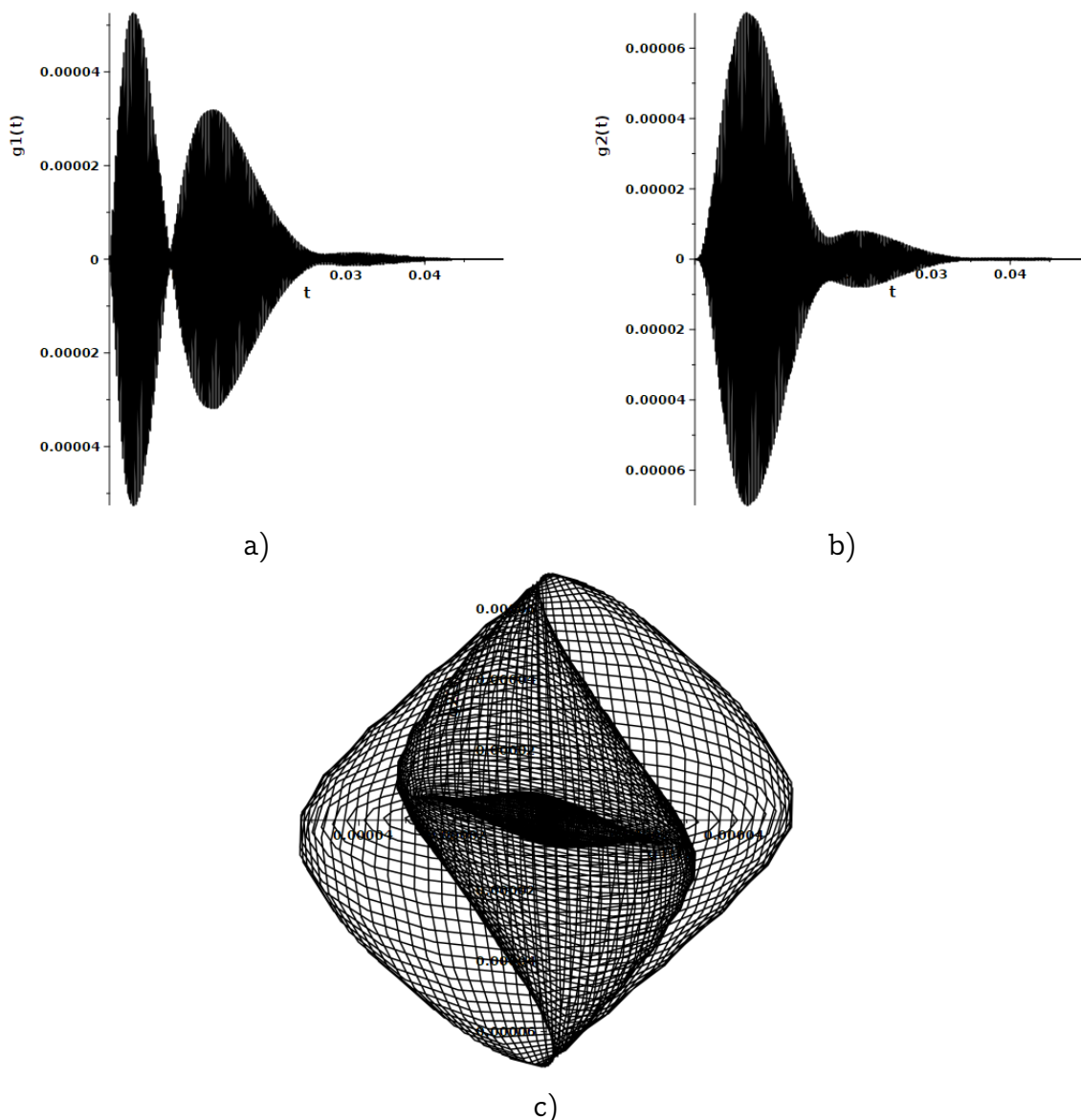


Рис. 1. Осциллограммы и фазовая траектория для Примера 1.  
 [Figure 1. Oscillograms and phase trajectory for Example 1.]

На рис. 1 приведен пример, который рассматривался в статьях авторов [12, 13]. Здесь мы наблюдаем взаимодействие источников: второй источник, который соответствует второму осциллятору в системе (1) больше, чем первый источник. Поэтому при отдаче энергии от второго источника, на осциллограмме (рис. 1a) мы видим возникновение трех последовательных затухающих импульсов различной формы, а на осциллограмме (рис. 1b) мы четко видим всего два импульса, а третий прослеживается не четко из-за меньшей энергии. Фазовая траектория (рис. 1c) представляет собой замкнутую фигуру, в которой отражена динамика на осциллограммах (три импульса различной формы).

**Пример 2.** (Случай  $\beta_1 = \beta_2 \neq 1$ ). Значение параметров:  $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$  и  $t \in [10^{-5}, 10^{-1}]$ , остальные значения параметров возьмем из Примера 1.

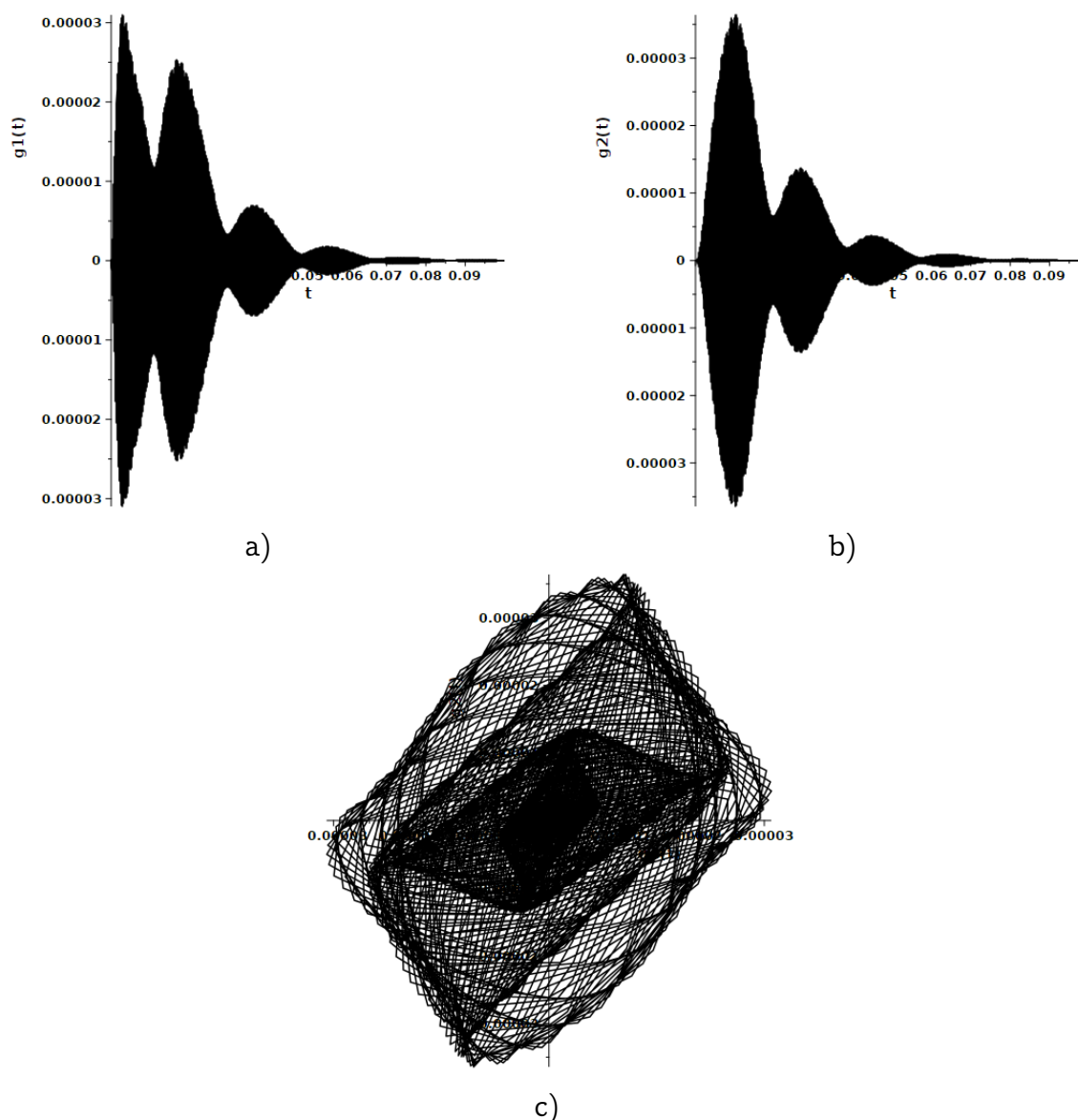


Рис. 2. Осциллограммы и фазовая траектория для Примера 2.  
 [Figure 2. Oscillograms and phase trajectory for Example 2.]

На рис.2 мы видим, что число импульсов стало большим по сравнению с рис.1, однако количество импульсов как на рис.2а, так и на рис.2b одинаково. Заметим, что амплитуда первого импульса на осциллограмме (рис.2b) больше, чем амплитуда аналогичного импульса на рис.2а. Амплитуда второго импульса рис.2а наоборот больше амплитуды аналогичного импульса на рис.2b и далее динамика сохраняется. Число импульсов увеличилось в силу того, что значения параметров и меньше единицы, что уменьшает эффект от диссипации энергии. Фазовая траектория (рис.2с) также имеет замкнутую траекторию, как и на рис.1с. Также можно четко заметить на фазовой траектории области, отвечающие за тот или иной импульс. Таких ярко выраженных областей четыре.

**Пример 3.** (Случай  $\beta_1 > \beta_2$ ). Значение параметров:  $\beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.1$  и  $t \in [10^{-5}, 10^{-1}]$ , остальные значения параметров возьмем из Примера 1.



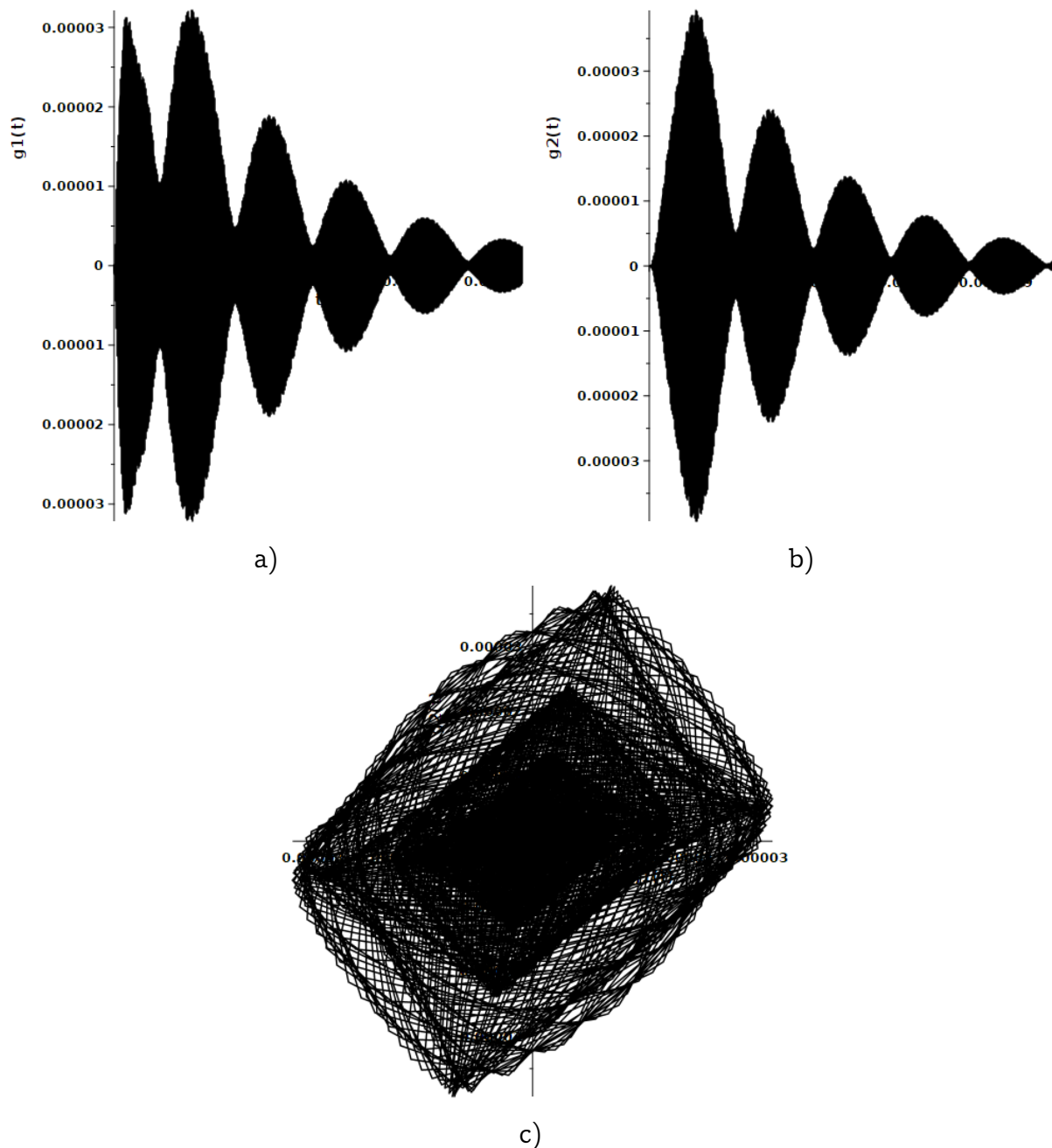


Рис. 3. Осциллограммы и фазовая траектория для Примера 3.

[Figure 3. Oscillograms and phase trajectory for Example 3.]

На рис. 3 приведен пример, когда эффект от диссипации энергии для второго осциллятора минимален ( $\beta_2 = 0.1$ ). Мы видим, что первый импульс на осциллограмме (рис. 3b) обладает большей амплитудой не только по сравнению с аналогичным импульсом на рис. 3a, но и по сравнению с первым импульсом на рис. 2b. Кроме того, следующие импульсы на осциллограмме (рис. 3b) имеют большие амплитуды, чем на рис. 2b из Примера 2. Аналогично, мы видим похожую динамику и на рис. 3a. Такая динамика обусловлена тем, что для второго осциллятора диссипативный член играет меньшую роль и значит второй осциллятор отдает больше своей энергии первому осциллятору. Это также можно

увидеть на рис 3а, здесь у второго импульса амплитуда даже больше чем у первого. На фазовой траектории (рис. 3с) мы видим динамику процесса, которая отражает множество импульсов на осциллограммах.

Отметим также, что амплитуда первого импульса на рис.3а имеет примерно такую же амплитуду, как и на первом импульсе осциллограммы (рис.2а) из Примера 2. Посмотрим, как этот эффект измениться, если мы выберем значения параметров  $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.9$ , т.е. наоборот.

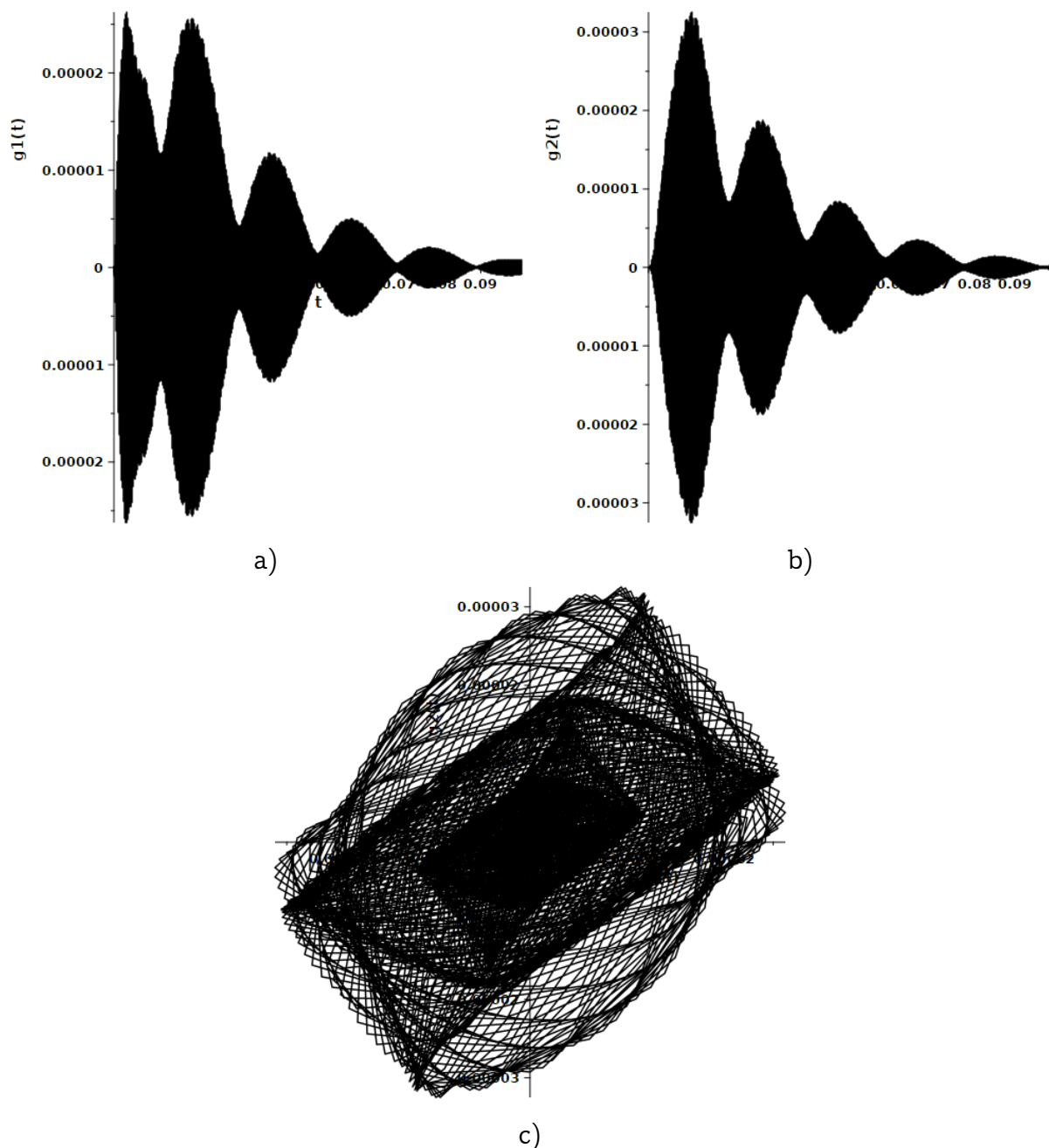


Рис. 4. Осциллограммы и фазовая траектория для Примера 4.

[Figure 4. Oscillograms and phase trajectory for Example 4.]

**Пример 4.** (Случай  $\beta_1 < \beta_2$ ). Значение параметров:  $\beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0.9$  и  $t \in [10^{-5}, 10^{-1}]$ , остальные значения параметров возьмем из Примера 1.

На рис. 4а мы видим, что амплитуда первого импульса стала меньшей по сравнению с аналогичным импульсом на рис. 3а. Далее первый импульс на рис. 4а обладает меньшей амплитудой, чем первый импульс на рис. 4б, т.е. для первого импульса сохраняется динамика как из предыдущих примеров. Второй импульс на рис. 4а имеет меньшую амплитуду по сравнению с первым, но большую по сравнению со вторым импульсом на рис. 4б. Фазовая траектория на рис. 4с имеет схожую форму с фазовой траекторией на рис. 3с.

## Заключение

В статье предложена новая математическая модель геоакустической эмиссии, которая обобщает ранее известную модель [12, 13]. Особенность модели – наличие эффекта наследственности, который учитывается в модельных уравнениях по средствам производных дробных порядков в диссипативных членах. Порядки дробных производных указывают на степень влияния диссипации (трения) на рассматриваемый процесс. При уменьшении значений порядков дробных производных влияние диссипации падает, что дает возможность больше энергии передавать между источниками. В работе на конкретных примерах это было показано.

Дальнейшее продолжение работы может быть связано с исследованием качественных свойств предложенной модели, а также сопоставление полученных результатов с реальными сигналами высокочастотной геоакустической эмиссии. В целом результаты статьи показали, что имеет смысл учитывать эффекты наследственности при моделировании высокочастотной геоакустической эмиссии.

**Благодарность.** Авторы благодарны рецензенту за тщательное прочтение статьи и ценные предложения и комментарии.


## Список литературы

1. Водинчар Г. М., Пережогин А. С., Сагитова Р. Н., Шевцов В. М. Моделирование зон геоакустической эмиссии // *Математическое моделирование*, 2007. Т. 19, № 11, С. 59–63.
2. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals // *IEEE*, pp. 256–260 DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.
3. Marapulets Y., Rulenko O. Joint anomalies of high-frequency geoacoustic emission and atmospheric electric field by the ground–atmosphere boundary in a seismically active region (Kamchatka) // *Atmosphere*, 2019. vol. 10, no. 5, pp. 267.
4. Marapulets Y. V., Lukovenkova O. O. Time-frequency analysis of geoacoustic data using adaptive matching pursuit // *Acoustical Physics*, 2021. vol. 67, pp. 312–319.
5. Lukovenkova O., Marapulets Y., Solodchuk A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks // *Sensors*, 2022. vol. 22, no. 24, pp. 9798.
6. Marapulets Y. et al. Sound range AE as a tool for diagnostics of large technical and natural objects // *Sensors*, 2023. vol. 23, no. 3, pp. 1269.
7. Fa L. et al. Progress in acoustic measurements and geoacoustic applications // *AAPPS Bulletin*, 2024. vol. 34, no. 1, pp. 23.
8. Крылов В. В., Ланда П. С., Робсман В. А. Модель развития акустической эмиссии как хаотизация переходных процессов в связанных нелинейных осцилляторах // *Акустический журнал*, 1993. Т. 39, № 1, С. 108–122.
9. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.


10. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
11. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
12. Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2023. Т. 42, № 1, С. 191–206 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206.
13. Гапеев М. И., Солодчук А. А., Паровик Р. И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2022. Т. 40, № 3, С. 88–100 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.
14. Герасимов А. Н. Обобщение законов линейной деформации и их применение к задачам внутреннего трения // *Академия наук СССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, № 6, С. 62–78.
15. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent // *II. Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529–539.
16. Паровик Р. И. Дробная модель геоакустической эмиссии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 45, № 4, С. 24–35 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-24-35.
17. Паровик Р. И. Существование и единственность задачи Коши для уравнения фрактального нелинейного осциллятора // *Узбекский математический журнал*, 2017. Т. 4, С. 110–118.
18. Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation // *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547–557.
19. Gerhard J. What's new in Maple 2022: Formal power series // *Maple Transactions*, 2023. vol. 3, no. 1, pp. 547–557 DOI: 10.5206/mt.v3i1.15944.

### Информация об авторах



*Сергиенко Дарья Фаритовна* ✉ – аспирант кафедры информатики и математики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия; программист лаборатории акустических исследований, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия  
 ORCID 0009-0008-6512-4537.




*Паровик Роман Иванович* ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространений радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия  
 ORCID 0000-0002-1576-1860.

## References


- [1] Vodinchar G. M., Perezhogin A. S., Sagitova R. N., Shevtsov B. M. Modeling of geoacoustic emission zones. *Mathematical modeling*, 2007. vol. 19. no. 11. pp. 59–63. (In Russian).
- [2] Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals / *Conf. proc. of SPA-2019. Poznan, IEEE*, pp. 256–260. DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817
- [3] Marapulets Y., Rulenko O. Joint anomalies of high-frequency geoacoustic emission and atmospheric electric field by the ground–atmosphere boundary in a seismically active region (Kamchatka). *Atmosphere*. 2019. vol. 10. no. 5. 267.
- [4] Marapulets Y. V., Lukovenkova O. O. Time-frequency analysis of geoacoustic data using adaptive matching pursuit. *Acoustical Physics*. 2021. vol. 67. pp. 312–319.
- [5] Lukovenkova O., Marapulets Y., Solodchuk A. Adaptive Approach to Time-Frequency Analysis of AE Signals of Rocks. *Sensors*. 2022. vol. 22. no. 24. 9798.
- [6] Marapulets Y. et al. Sound range AE as a tool for diagnostics of large technical and natural objects. *Sensors*. 2023. vol. 23. no. 3. 1269.
- [7] Fa L. et al. Progress in acoustic measurements and geoacoustic applications. *AAPPS Bulletin*. 2024. vol. 34. no. 1. P. 23.
- [8] Krylov V. V., Landa P. S., Robsman V. A. A model for the development of acoustic emission as the chaoticization of transients in coupled nonlinear oscillators, *Acoustic Journal*, 1993. vol. 39, no. 1. pp. 108–122. (In Russian).
- [9] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 p.
- [10] Nakhushev A.M. *Fractional calculus and its application*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p.(In Russian).
- [11] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
- [12] Mingazova D.F., Parovik R.I. Some aspects of the qualitative analysis of the high-frequency geoacoustic emission model. *Vestnik KRAUNTS. Physical and mathematical sciences*. 2023. vol. 42. no. 1. pp. 191-206. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206(In Russian).
- [13] Gapeev M.I., Solodchuk A.A., Parovik R.I. Coupled oscillators as a model of high-frequency geoacoustic emission. *Vestnik KRAUNTS. Physical and mathematical sciences*. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 88-100. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100hep-th/0501074(In Russian).
- [14] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. *Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 44. no. 6, pp. 62-78. (In Russian).
- [15] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II. *Geophysical Journal International*. 1967. vol. 13. pp. 529-539.
- [16] Parovik R.I. Fractional model of geoacoustic emission. *Vestnik KRAUNTS. Physical and mathematical sciences*. 2023. vol. 45. no. 4. pp. 24-35. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-24-35 (In Russian).
- [17] Parovik R. I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation. *Uzbek Mathematical Journal*. 2017. no. 4. P. 110-118. (In Russian).
- [18] Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. vol. 253. no. 4. P. 547-557.
- [19] Gerhard J. What’s new in Maple 2022: Formal power series. *Maple Transactions*. 2023. vol. 3. no. 1. DOI: 10.5206/mt.v3i1.15944.

## Information about the authors



*Sergienko Darya Faritovna*✉ – aspirant of the Department of Mathematics and Computer Science, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia; programmer of the Laboratory of Acoustic Research, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia  
 ORCID 0009-0008-6512-4537.



*Parovik Roman Ivanovich*✉ – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher at the Laboratory of Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, S. Paratunka, Russia  
 ORCID 0000-0002-1576-1860.