



## Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений

Г. С. Исраилжанова<sup>\*1</sup>, Ш. Т. Каримов<sup>1</sup>, Р. И. Паровик<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, д. 19, Узбекистан

<sup>2</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улутбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4, Узбекистан

<sup>3</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683009, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4. Россия

**Аннотация.** В статье предлагается принципиально новое обобщение ранее известной математической модели Зимана сердечных сокращений за счет электрохимического воздействия. Это обобщение обусловлено наличием эффектов наследственности в колебательной системе, которые указывают на то, что она может сохранять информацию о своих предыдущих состояниях. С точки зрения математики свойство наследственности можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа со степенными разностными ядрами или с помощью производных дробных порядков. В статье были введены в модельные уравнения Зимана операторы дробного дифференцирования в смысле Герасимова-Капуто, а также характерное время для согласования размерностей в модельных уравнениях. Полученная математическая дробная модель Зимана исследовалась в силу ее нелинейности с помощью численных методов – нелокальной конечно-разностной схемы. Численный алгоритм был реализован на языке Python в среде PyCharm 2024.1, в которой была реализована возможность визуализации расчетов с помощью осциллограмм и фазовых траекторий. Проведена интерпретация результатов моделирования.

**Ключевые слова:** сердечные сокращения, дробная математическая модель Зимана, дробная производная Герасимова-Капуто, численный алгоритм, осциллограмма, фазовая траектория.

Получение: 30.09.2024; Исправление: 01.11.2024; Принятие: 14.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

**Для цитирования.** Исраилжанова Г. С., Каримов Ш. Т., Паровик Р. И. Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 83-94. EDN: SGWSTH. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94>.

**Финансирование.** Исследование не проводилось при поддержке фондов

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

**\*Корреспонденция:**  E-mail: [gulbaxor19802020@gmail.com](mailto:gulbaxor19802020@gmail.com)

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Исраилжанова Г. С., Каримов Ш. Т., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





## Mathematical Fractional Zeeman Model for Describing Cardiac Contractions

*G. S. Israyiljanova*<sup>\*1</sup>, *Sh. T. Karimov*<sup>1</sup>, *R. I. Parovik*<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Fergana State University, 150100, Fergana, Murabbiylar str., 19, Uzbekistan

<sup>2</sup> National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, Universitetskaya str., 4, Uzbekistan

<sup>3</sup> Kamchatka State University named after Vitus Bering, 683009, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya str., 4. Russia

**Abstract.** The article proposes a fundamentally new generalization of the previously known mathematical Zeeman model of heart contractions due to electrochemical action. This generalization is due to the presence of heredity effects in the oscillatory system, which indicate that it can store information about its previous states. From the mathematical point of view, the property of heredity can be described using integro-differential equations of the Volterra type with power difference kernels or using fractional derivatives. In the article, fractional differentiation operators in the sense of Gerasimov-Caputo were introduced into the Zeeman model equations, as well as the characteristic time for matching dimensions in the model equations. The resulting mathematical fractional Zeeman model was studied due to its nonlinearity using numerical methods - a nonlocal finite-difference scheme. The numerical algorithm was implemented in Python in the PyCharm 2024.1 environment, which implemented the ability to visualize calculations using oscillograms and phase trajectories. The interpretation of the modeling results was carried out.

*Key words:* heart contractions, fractional mathematical Zeeman model, fractional derivative of Gerasimov-Caputo, numerical algorithm, oscillogram, phase trajectory.

Received: 30.09.2024; Revised: 01.11.2024; Accepted: 14.11.2024; First online: 20.11.2024

**For citation.** Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I. Mathematical fractional Zeeman model for describing cardiac contractions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **48**: 3, 83-94. EDN: SGWSTH. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94>.

**Funding.** The research was not supported by any foundation.

**Competing interests.** There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

**\*Correspondence:**  E-mail: [gulbaxor19802020@gmail.com](mailto:gulbaxor19802020@gmail.com)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Israyiljanova G. S., Karimov Sh. T., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



## Введение

Сердечные сокращения представляют собой сложный и высокоорганизованный процесс, обеспечивающий эффективную работу сердечно-сосудистой системы. Эти процессы являются результатом взаимодействия различных физиологических механизмов, включая электрическую активность миокарда, механическую работу сердца и нейрогуморальную регуляцию. Понимание этих механизмов имеет критическое значение для диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, которые остаются одной из основных причин смертности в мире [1].

Современные исследования сердечных сокращений охватывают широкий спектр тем, включая электрофизиологию, механофизиологию, а также молекулярные и клеточные основы сердечной функции. Например, работа по изучению электрической активности сердца показала, что нарушения в проведении импульсов могут приводить к аритмиям и другим серьезным состояниям [2]. Кроме того, исследования механики сердечного сокращения, такие как работа по оценке сократительной способности миокарда, играют важную роль в понимании патофизиологии сердечной недостаточности [3].

В последние годы наблюдается рост интереса к новым методам визуализации и мониторинга сердечной деятельности, таким как магнитно-резонансная томография и ультразвуковая диагностика, которые позволяют более точно оценивать функции сердца и выявлять патологии на ранних стадиях [4]. Эти достижения открывают новые горизонты для клинической практики и научных исследований, что подчеркивает необходимость дальнейшего изучения процессов сердечных сокращений.

Таким образом, исследование процессов сердечных сокращений не только углубляет наши знания о физиологии сердца, но и способствует разработке более эффективных методов диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, в том числе с помощью методов математического моделирования. В данной статье мы рассмотрим некоторые аспекты математического моделирования сердечных сокращений и предложим на основе уже известной модели новую модель сердечных сокращений.

В вопросах математического моделирования работы сердца применяют в основном модели двух типов: динамические и структурно-функциональные. Все они в качестве математического аппарата используют дифференциальные уравнения (обыкновенные или в частных производных, а также их системы). Структурно-функциональные модели более сложны, так как необходимо для их решения знать множество параметров от геометрических размеров, например, знать размеры сердечных камер, до физических свойств, например, знать эластичность сосудов и т.д. Как правило без экспериментальных данных тут невозможно обойтись. Поэтому мы остановимся на более простой динамической (механической) модели работы сердца, которая описывает сокращение сердечной мышцы - модель Зимана [5].

Сокращение мышечных волокон в рамках модели Зимана происходит за счет электрохимического воздействия. Как правило, мышечное волокно быстро

сокращается и остается некоторое время в таком состоянии, а затем быстро возвращается к расслабленному состоянию. Далее процесс повторяется. Исходя из выше сказанного, естественным образом здесь возникают релаксационные колебания, которые можно описать с помощью нелинейного осциллятора автоколебательного (Льенаровского) типа, например, вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$  — функции решения, где  $x(t)$  — длина мышечного волокна,  $y(t)$  — функция, отвечающая за электрохимическое управление сокращением мышечного волокна;  $t \in [0, T]$  — время рассматриваемого процесса;  $T > 0$  — время моделирования;  $0 < \varepsilon \ll 1$  — положительная постоянная (малый параметр).

**Замечание 1.** Задачу Коши (1) будем называть классической моделью Зимана или просто моделью Зимана.

В настоящей работе предлагается обобщение модели Зимана (1) на случай учета наследственности [6]. Эффект наследственности (памяти) или в западной литературе эредитарности в колебательных системах означает, что текущее состояние системы зависят от предыдущих состояний. Это может быть связано с физическими свойствами материалов или структур, которые изменяются в результате предыдущих нагрузок, свойствами среды в которых протекает процесс, например, вязкоупругие пластичные среды и т.д.

В случае учета наследственности, с точки зрения ее математического описания, мы имеем дело с интегро-дифференциальными уравнениями с разностными степенными ядрами, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [7, 8].

## Постановка задачи и методика ее решения

Рассмотрим следующую задачу Коши.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \varepsilon_2 \partial_{0t}^\beta y(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_1 = \varepsilon \theta^{\alpha-1}$ ,  $\varepsilon_2 = \theta^{\beta-1}$ ,  $\theta$  — параметр, имеющий размерность времени.

Дробные производные порядков  $0 < \alpha, \beta < 1$  в (2) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [9, 10]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad \partial_{0t}^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}. \quad (3)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция Эйлера.

Замечание 2. Из (2) следует, что при  $\alpha = \beta = 1$  мы получаем классическую модель Зимана (1).

Замечание 3. Задачу Коши (2) будем называть дробной моделью Зимана (ДМЗ).

Замечание 4. Необходимо отметить, что определенный интерес представляет исследование вопроса существования и единственности решения задачи Коши (2) [11].

В силу нелинейности ДМЗ, далее мы применяем численные методы для ее исследования. Численные методы основаны на построении нелокальных конечно-разностных схем [12]. Введем равномерную расчетную сетку для этого разобьем временной интервал  $t \in [0, T]$  на  $N$  равных частей с шагом дискретизации  $\tau = T/N$ . Тогда функции решения в задаче Коши (2) перейдут в сеточные функции:  $x(t_k) = x_k, y(t_k) = y_k, t_k = k\tau, k = 0, \dots, N$ .

Операторы дробных производных (3) будут иметь аппроксимации:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) \approx A \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\alpha} (x_{k-j+1} - x_{k-j}), \partial_{0t}^{\beta} y(t) \approx B \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\beta} (y_{k-j+1} - y_{k-j}). \quad (4)$$

где весовые коэффициенты:  $w_j^{\alpha} = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$ ,  $w_j^{\beta} = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}$ ,  $A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ ,  $B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ .

Подставляя соотношения (4) в (2) с учетом сеточных функций, получаем следующую дискретную задачу:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{A\varepsilon_1} \left( (1 + A\varepsilon_1) x_k - x_k^3 - y_k - A\varepsilon_1 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^{\alpha} (x_{k-j+1} - x_{k-j}) \right), \\ y_{k+1} = \frac{1}{B\varepsilon_2} \left( x_k + B\varepsilon_2 y_k - B\varepsilon_2 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^{\beta} (y_{k-j+1} - y_{k-j}) \right), k = 1, \dots, N-1, \\ x_0 = a, y_0 = b. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) представляет собой нелокальную явную конечно-разностную схему для численного решения задачи Коши (2).

Замечание 5. Нелокальная конечно-разностная схема (4) обладает первым порядком точности и условно сходится [12]. Однако в статье нас не будет интересовать высокая точность численного алгоритма, а устойчивость и сходимость метода мы можем контролировать, уменьшая шаг расчётной сетки, например, по правилу Рунге.

Замечание 6. В силу того, что в задаче Коши (2) присутствует малый параметр  $\varepsilon$ , то необходимо для численной схемы (5) выбирать достаточно плотную расчетную сетку. В дальнейших расчетах мы будем полагать  $\varepsilon = 0.001$ , а число узлов расчетной сетки  $N$  будем выбирать достаточно большим.

## Результаты моделирования

Численный алгоритм (5) был реализован на языке Python в среде PyCharm 2024.1 [13]. Далее с помощью, разработанной компьютерной программы была проведена визуализация результатов моделирования при различных значениях параметров модели (2) и дана их интерпретация.

**Пример 1.** (Классическая модель Зимана). Значения параметров:  $\alpha = \beta = 1$ ,  $x_0 = 1, y_0 = 0.3, \varepsilon = 0.001, t \in [0, 50], N = 2 \cdot 10^5$ . Результаты моделирования с помощью численного алгоритма (5) приведены на рис. 1.

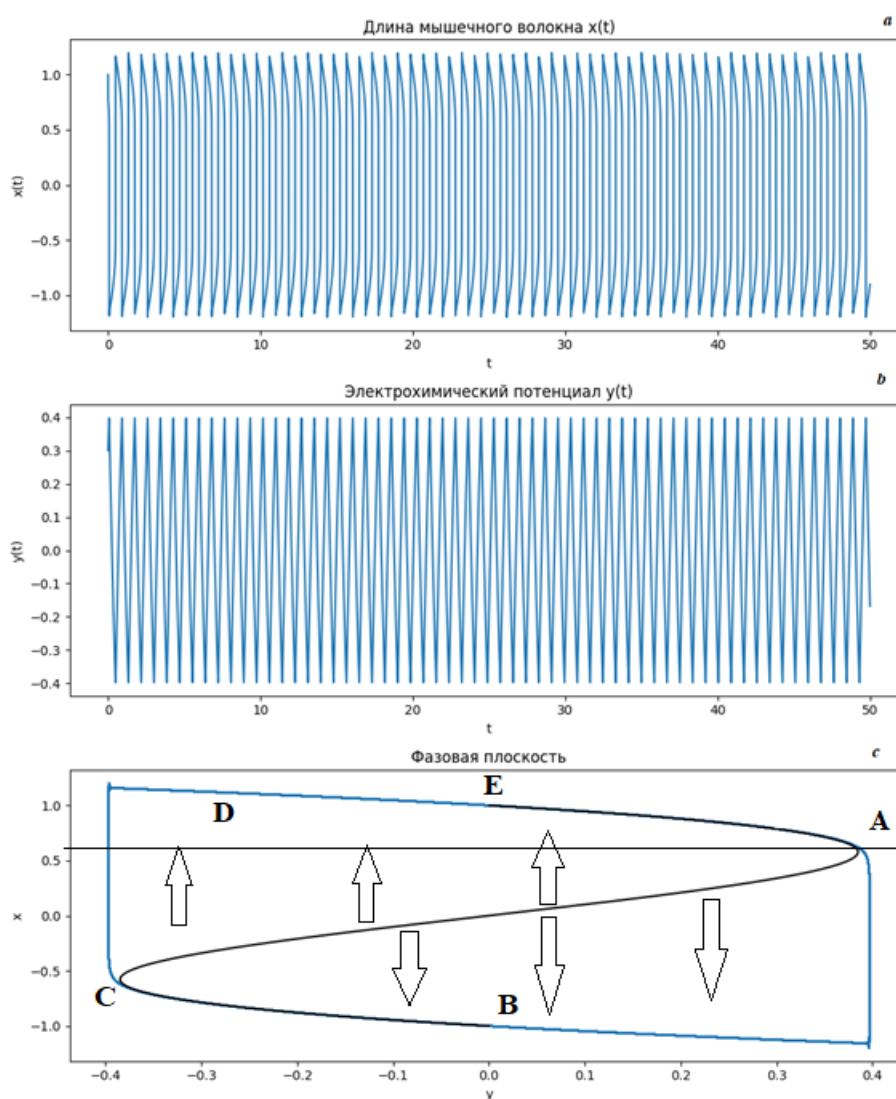


Рис. 1. Классическая модель Зимана: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; в — фазовая траектория на плоскости.

Figure 1. Classical Zeeman model: а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; в — phase trajectory on the plane.

На рис.1 приведены осциллограмма изменения длины мышечного волокна (рис.1a), осциллограмма изменения электрохимического потенциала (рис. 1b) и фазовая траектория (рис. 1c). Осциллограммы обладают постоянной амплитудой и частотой, фазовая траектория представляет собой предельный устойчивый цикл, который содержит изоклину  $y(t) = x(t) - x^3(t)$ . Механизм сердечных сокращений здесь работает следующим образом: из устойчивой точки равновесия Е происходит переход в близкое состояние в точку А,  $(x = 1/\sqrt{3})$ . Далее мышечное волокно быстро сокращается и при этом координата  $x$  убывает вдоль траектории от точки А до точки В. Быстрая релаксация мышечного волокна происходит на участке траектории CD, после чего происходит возвращение к положению равновесия Е. Далее процесс повторяется и мы получаем цикл EABCD.

**Пример 2.** (Дробная модель Зимана). Значения параметров:  $\alpha = 0.9$ ,  $\theta = \beta = 1$  и  $N = 10^5$ , а остальные значения параметров выберем из Примера 1.

Результаты расчета приведены на рис.2.

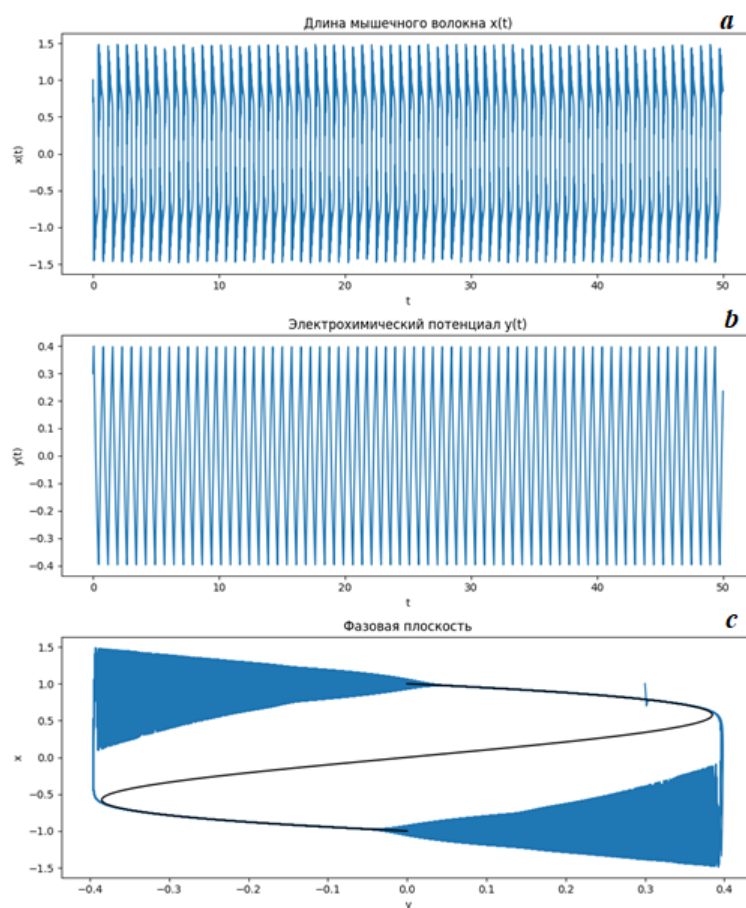


Рис. 2. Дробная модель Зимана: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; в — фазовая траектория на плоскости.

Figure 2. Fractional Zeeman model: a — change in muscle fiber; b — change in electrochemical potential; c — phase trajectory on the plane.

На рис. 2 мы видим, что переход к положению равновесия происходит в режиме затухающих колебаний. Рассмотрим другие значения параметров:  $\alpha = 0.9$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\theta = \varepsilon = 0.1$ ,  $T = 100$ ,  $N = 2 \cdot 10^4$  и  $N = 10^5$ , остальные значения параметров оставим без изменения.

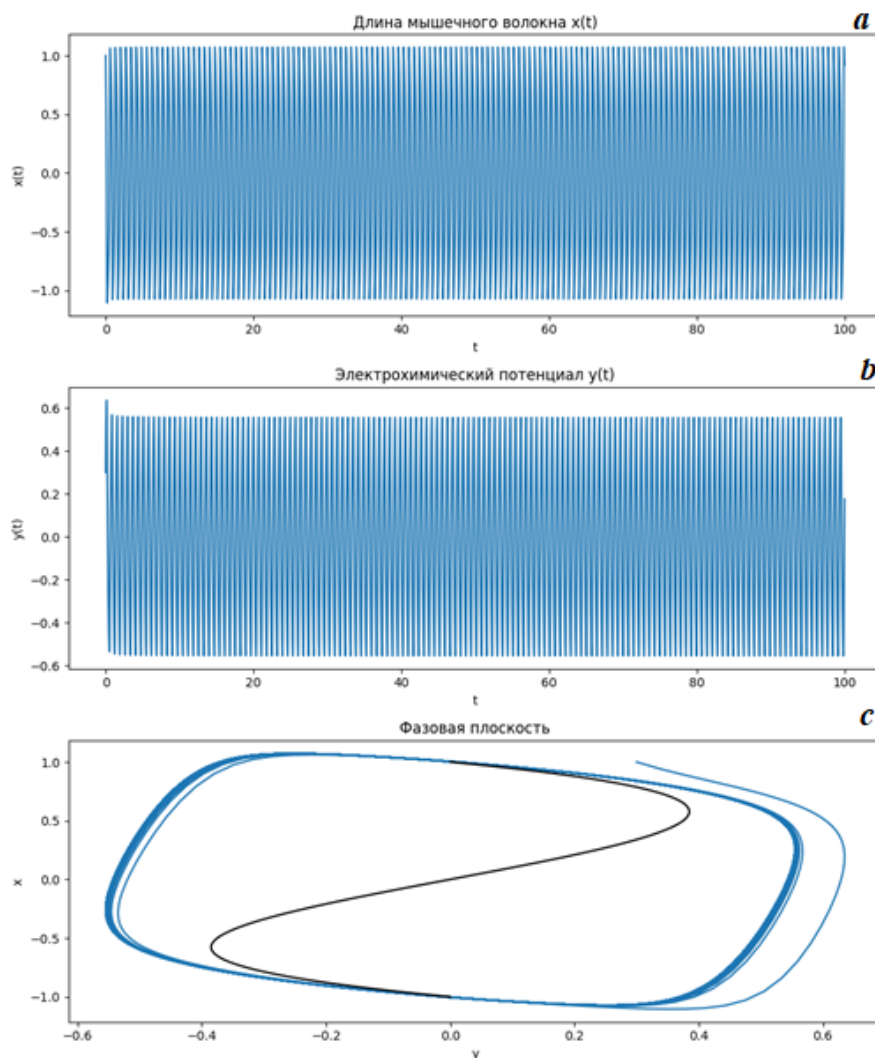


Рис. 3. Дробная модель Зимана при  $\theta = 0.1$ : а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; с — фазовая траектория на плоскости.

Figure 3. Fractional Zeeman model at  $\theta = 0.1$ : а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; с — phase trajectory on the plane.

На рис.3 видно, что осциллограммы и фазовая траектория соответствуют предельному циклу, а значение параметра  $\theta$  влияет на частоту колебаний, чем меньше значение, тем больше частота.

Увеличим значение параметра  $\theta = 5$  и проведем расчеты по нелокальной явной конечно-разностной схеме (5), результаты которых приведены на рис. 4.



На рис. 4 видно, что чем больше значение параметра  $\theta$ , тем меньше частота колебаний. Кроме того, фазовые траектории на рис. 3 и 4 визуальнo имеют одинаковую форму, что указывает на то, что параметр  $\theta$  на нее не влияет.

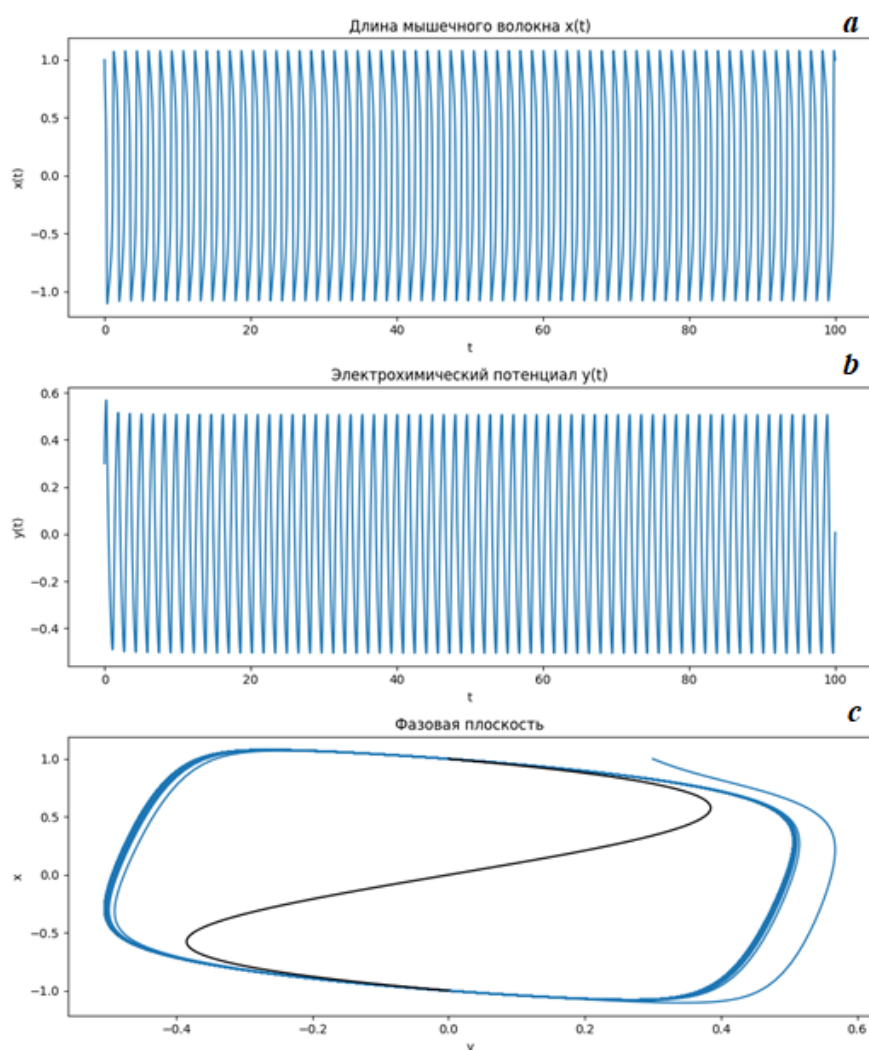


Рис. 4. Дробная модель Зимана при  $\theta = 5$ : а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; в — фазовая траектория на плоскости.

Figure 4. Fractional Zeeman model at  $\theta = 5$ : а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; в — phase trajectory on the plane.

На рис. 5 приведены расчеты осциллограмм и фазовых траекторий при других начальных значениях  $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$  (остальные значения брались без изменения как на рис. 4), которые указывают на устойчивость предельного цикла. Последнее указывает на то, что если дробная динамическая система является льянаровской, то существует устойчивый предельный цикл. Этот вывод нуждается в строгом обосновании, так как классический критерий Бендиксона [14] здесь не может быть применим.

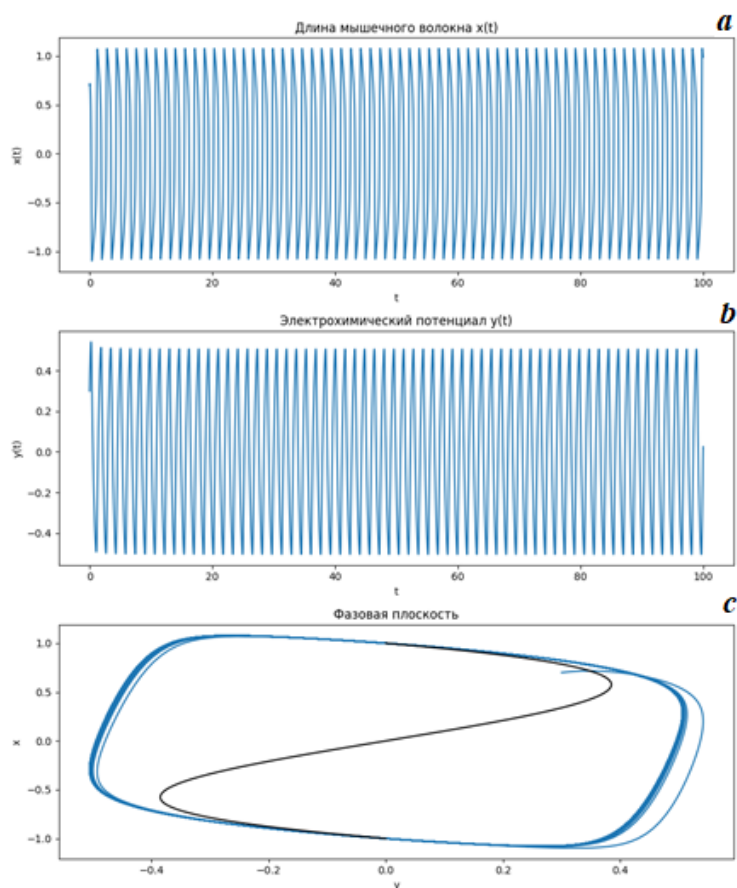


Рис. 5. Дробная модель Зимана при  $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$ : а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; с — фазовая траектория на плоскости

Figure 5. Fractional Zeeman model at  $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$ : а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; с — phase trajectory on the plane.

## Заключение

В статье была предложена дробная модель Зимана сердечных сокращений с учетом наследственности. Эффекты наследственности были учтены в модельных уравнениях с помощью дробных производных Герасимова-Капуто. Исследование предложенной модели было проведено с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности, которая была реализована в среде PyCharm 2024.1 на языке программирования Python. Компьютерная программа позволяет производить расчеты осциллограмм и фазовых траекторий при различных значениях параметров модели.

Результаты моделирования показали, что дробная модель Зимана может обладать релаксационными колебаниями, которые на фазовой плоскости соответствуют аттрактору или предельному циклу. Предельный цикл является устойчивым. Дополнительный параметр влияет на частоту колебаний и не влияет на форму предельного цикла.

Дальнейшее развитие дробной модели Зимана – качественное исследование динамических режимов, построение бифуркационных диаграмм и карт динамических режимов по аналогии с работой [15].

### Список литературы

1. World Health Organization, Cardiovascular diseases (CVDs). Retrieved from WHO website, 2021.
2. Zipes D. P., Jalife J. *Cardiac Electrophysiology: From Cell to Bedside*: Elsevier, 2018.
3. Nishimura R. A., et al. Mechanisms of Heart Failure, *Circulation Research*, 2020. vol. 126(10), pp. 1404-1420.
4. Klein A. L., et al. Noninvasive Imaging of the Heart: Advances and Applications, *Journal of the American College of Cardiology*, 2019. vol. 73(1), pp. 1-15.
5. Zeeman E. C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse / *Salvador symposium on Dynamical Systems*, Academic Press, 1973. 683-741 pp.
6. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
7. Nakhushev A. M. *Fractional calculus and its application*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 pp. (in Russian)
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, 2006. 523 pp.
9. Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction, *Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 44, no. 6, pp. 62-78 (in Russian).
10. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529-539.
11. Parovik R. I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2017. no. 4, pp. 110-118 (in Russian).
12. Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547-557.
13. Van Horn B.M. II, Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*. Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., 2023.
14. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1-88.
15. Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022. vol. 2373, 52022.

### Информация об авторах



Исраилжанова Гулбахор Саминжановна ✉ – соискатель кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, ORCID 0009-0007-9356-3476.



Каримов Шахобиддин Туйчибоевич ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, ORCID 0000-0001-8325-998X.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информатики и математики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

## References

- [1] World Health Organization. Cardiovascular diseases. Retrieved from WHO website. 2021.
- [2] Zipes D. P., Jalife J. Cardiac Electrophysiology: From Cell to Bedside. Elsevier. 2018.
- [3] Nishimura, R. A., et al. Mechanisms of Heart Failure. Circulation Research, 2020. vol. 126(10), 1404-1420.
- [4] Klein A. L., et al. Noninvasive Imaging of the Heart: Advances and Applications. Journal of the American College of Cardiology, 2019. vol. 73(1), 1-15.
- [5] Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. Salvador symposium on Dynamical Systems, Academic Press. 1973. pp. 683-741.
- [6] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 2005. 288 p.
- [7] Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (in Russian).
- [8] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
- [9] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics, 1948. Vol. 44, No. 6, pp. 62-78. (in Russian).
- [10] Caputo M. Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent – II. Geophysical Journal International. 1967. vol. 13. pp. 529-539.
- [11] Parovik, R. I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation. Uzbek Mathematical Journal. 2017. No. 4. P. 110-118. (in Russian).
- [12] Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. Journal of Mathematical Sciences. 2021. vol. 253. no. 4. P. 547-557.
- [13] Van Horn B.M. II, Nguyen Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool; Packt Publishing Ltd.: Birmingham, UK, 2023.
- [14] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 1901. vol. 24(1). pp. 1-88.
- [15] Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package. Journal of Physics: Conference Series 2022, 2373, 52022.

### Information about the authors



*Israyiljanova Gulbahor Saminjanovna* ✉ – Applicant of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0009-0007-9356-3476.



*Karimov Shakhobiddin Tuychiboyevich* ✉ – D. Sc. (Phys. & Math.), Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-8325-998X.



*Parovik Roman Ivanovich* ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor, Professor of the Department of Computer Science and Mathematics, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.