МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.926

Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией

*Л. М. Энеева**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

Аннотация. В работе рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с производной дробного порядка, которое содержит оператор инволюции в подчиненном слагаемом. Рассматриваемое уравнение является модельным и относится к классу дифференциальных уравнений, к необходимости исследовать которые приводит изучение краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования. Последние возникают при моделировании различных физических и геофизических процессов, и, в частности, имеет важное значение при описании диссипативных колебательных систем. Для рассматриваемого уравнения исследуется начальная задача в единичном интервале. Основной результат работы – теорема существования и единственности решения изучаемой задачи. В терминах ограничений на коэффициент и правую часть рассматриваемого уравнения сформулированы достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость исследуемой задачи. Построено фундаментальное решение, получены его различные представления, изучены его основные свойства. В терминах фундаментального решения найдено явное представление решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, задача Коши, производная Римана–Лиувилля, инволюция, фундаментальное решение.

Получение: 01.11.2024; Исправление: 08.11.2024; Принятие: 18.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Энеева Л. М. Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 48. № 3. C. 43-55. EDN: RHKXQA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМА КБНЦ РАН (рег. № 122041800015-8).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: eneeva72@list.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55
Research Article
Full text in Russian
MSC 26A33, 34B05

Cauchy Problem for Fractional Order Equation with Involution

L. M. Eneeva*

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. The paper considers a linear ordinary differential equation with a fractional derivative that contains an involution operator in the subordinate term. The equation under consideration is a model equation and belongs to the class of differential equations that need to be investigated due to the study of boundary value problems for fractional differential equations containing a composition of left- and right-hand fractional differentiation operators. The latter arise when modeling various physical and geophysical processes and, in particular, are of great importance when describing dissipative oscillatory systems. For the equation under consideration, the initial value problem in a unit interval is investigated. The main result of the paper is a theorem of existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration. Sufficient conditions that ensure unique solvability of the problem under consideration are formulated in terms of constraints on the coefficient and the right-hand side of the equation under consideration. A fundamental solution is constructed, its various representations are obtained, and its main properties are studied. An explicit representation of the solution to the problem under consideration is found in terms of the fundamental solution.

Key words: fractional equation, Cauchy problem, Riemann-Liouville derivative, involution, fundamental solution.

Received: 01.11.2024; Revised: 08.11.2024; Accepted: 18.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Eneeva L. M. Cauchy problem for fractional order equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **48**: 3, 43-55. EDN: RHKXQA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the IPMA KBSC RAS (reg. No. 122041800015-8).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:** E-mail: eneeva72@list.ru

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) - \lambda u(1-x) = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ — заданная функция; $x \in]0,1[$; D_{0x}^{α} — дробная производная порядка α $(0 < \alpha < 1)$ в смысле Римана–Лиувилля с началом в точке $x = 0$ [1] (см. определение ниже).

Дробное исчисление и дифференциальные уравнения дробного порядка, как известно [1], занимают особое место в математическом моделировании физических и геофизических процессов. При этом, как отмечено в [2], [3], приходится рассматривать уравнения, содержащие композиции производных дробного порядка с различными началами. В частности, такие уравнения возникают при моделировании диссипативных колебательных систем (см. [4]– [21], а также библиографию там). В работе [21] был предложен подход к решению краевых задач для уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто, возникающих при моделировании диссипативных колебательных систем, основанный на редукции изучаемых задач к исследованию уравнений дробного порядка с инволюцией.

В данной работе мы рассматриваем модельное дифференциальное уравнение дробного порядка с инволюцией — уравнение (1). Для рассматриваемого уравнения исследуется начальная задача. Мы указываем достаточные условия однозначной разрешимости, находим фундаментальное решение, в терминах которого строим представление решения исследуемой задачи.

Дробное дифференцирование и оператор инволюции

Левосторонний и правосторонний дробные интегралы Римана–Лиувилля порядка $\mu > 0$, с началами в точке $x = 0$ и $x = 1$ определяются, соответственно, равенствами [1]

$$D_{0x}^{-\mu}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x u(t)(x-t)^{\mu-1}dt, \tag{2}$$

и

$$D_{1x}^{-\mu}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^1 u(t)(t-x)^{\mu-1}dt, \tag{3}$$

Дробная производная Римана-Лиувилля порядка α, $\alpha \in]0,1[$, с началом в точке $x = 0$ задается формулой [1]

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha-1}u(x),$$

т.е.

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt.$$

В дальнейшем, через I_x будем обозначать оператор инволюции, действующий на произвольную функцию $g(x)$, определенную на отрезке $[0,1]$, по правилу

$$I_x g(x) = g(1-x). \tag{4}$$

Очевидно, что

$$I_x^2 g(x) = I_x\left(I_x g(x)\right) = g(x).$$

Постановка задачи

Далее, как принято, $AC[0,1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, а $L[0,1]$ — пространство суммируемых функций.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u = u(x)$ из класса

$$u(x) \in L[0,1], \qquad D_{0x}^{\alpha-1} u(x) \in AC[0,1],$$

удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Будем рассматривать следующую задачу: *найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u_0. \tag{5}$$

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим оператор

$$Q_x^\alpha = D_{0x}^{-\alpha}\, I_x. \tag{6}$$

Пусть $g(x) \in L[0,1]$. В силу (2), (4) и (6) можем записать

$$Q_x^\alpha\, g(x) = D_{0x}^{-\alpha}\, I_x\, g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(1-t)(x-t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-x}^1 g(s)(s+x-1)^{\alpha-1} ds.$$

Отсюда, с учетом (3) и (4), следует равенство

$$Q_x^\alpha = I_x\, D_{1x}^{-\alpha},$$

а также представление

$$Q_x^\alpha\, g(x) = \int_0^1 q(x,s)\, g(s)\, ds, \tag{7}$$

где

$$q(x,s) = \frac{(s+x-1)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Здесь и далее,

$$(z)_+ = \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, Q_x^α — интегральный оператор с симметричным ядром. Причем, как легко заметить,

$$Q_x^\alpha\left(L[0,1]\right) \subset L[0,1]. \tag{9}$$

Действительно, если $g(x) \in L[0,1]$, то, очевидно, $h(x) = I_x\, g(x) \in L[0,1]$. Поэтому $Q_x\, g(x) = D_{0x}^{-\alpha}\, h(x) \in L[0,1]$. Отсюда следует (9).

Кроме того,

$$\int_0^1\int_0^1 |q(x,s)|^2\, dx\, ds < \infty, \qquad \text{если} \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

То есть, Q_x^α является оператором Гильберта — Шмидта в $L_2[0,1]$ при $\alpha > 1/2$.

Пусть $a \in [0,1]$. Примем следующие обозначения

$$\|g\|_{(a,\mu)} = \sup_{[0,1]} \frac{|g(x)|}{\left(|x-a|^{-\mu} + |x+a-1|^{-\mu}\right)}$$

и

$$M_a^\mu[0,1] = \left\{g(x) \in C\left([0,1]\setminus\{a, 1-a\}\right) : \|g\|_{(a,\mu)} < \infty\right\}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Пусть* $a \in [0,1]$ *и* $g(x) \in M_a^{1-\alpha}[0,1]$. *Тогда*

$$\|Q_x^\alpha\, g(x)\|_{(a,1-\alpha)} \le C_\alpha \|g(x)\|_{(a,1-\alpha)}, \tag{11}$$

где

$$C_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Доказательство. В силу (7) имеем

$$\|Q_x^\alpha\, g(x)\|_{(a,1-\alpha)} \le \frac{\|g(x)\|_{(a,1-\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-x}^1 (s+x-1)^{\alpha-1}\left(|s-a|^{\alpha-1} + |s+a-1|^{\alpha-1}\right) ds.$$

Оценим далее величины

$$J_1 = \int_{1-x}^1 (s+x-1)^{\alpha-1}|s-a|^{\alpha-1}\, ds$$

и

$$J_2 = \int_{1-x}^1 (s+x-1)^{\alpha-1}|s+a-1|^{\alpha-1}\, ds. \tag{12}$$

Для J_1 получаем

$$J_1 = \int_{1-x}^{\max(a,1-x)} (s+x-1)^{\alpha-1}(a-s)^{\alpha-1}\, ds +$$

$$+ \int_{\max(a,1-x)}^1 (s+x-1)^{\alpha-1}(s-a)^{\alpha-1}\, ds = J_{11} + J_{12}. \tag{13}$$

Если $a + x - 1 \le 0$, то, очевидно, $J_{11} = 0$. Рассмотрим случай, когда $a + x - 1 > 0$. В этом случае получаем

$$J_{11} = \int_0^{a+x-1} s^{\alpha-1}(a+x-1-s)^{\alpha-1}\, ds = (a+x-1)^{2\alpha-1}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\, ds.$$

Таким образом, с учетом обозначения (8) получаем

$$J_{11} = \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}(a + x - 1)_+^{2\alpha-1} \tag{14}$$

Оценим теперь J_{12}. Примем обозначения $\xi = \max(a, 1 - x)$ и $\eta = \min(a, 1 - x)$. Очевидно, что $\xi \geq \eta$ и $\xi, \eta \in [0, 1]$. С учетом этого получаем

$$J_{12} = \int_{\max(a,1-x)}^{1} (s + x - 1)^{\alpha-1}(s - a)^{\alpha-1}\, ds = \int_{\xi}^{1} (s - \xi)^{\alpha-1}(s - \eta)^{\alpha-1}\, ds =$$

$$= \int_0^{1-\xi} s^{\alpha-1}(s + \xi - \eta)^{\alpha-1}\, ds = (\xi - \eta)^{2\alpha-1} \int_0^{\frac{1-\xi}{\xi-\eta}} s^{\alpha-1}(s + 1)^{\alpha-1}\, ds \leq$$

$$\leq (\xi - \eta)^{2\alpha-1} \int_0^{\frac{1-\xi}{\xi-\eta}} s^{\alpha-1}\, ds = \frac{1}{\alpha}(\xi - \eta)^{\alpha-1}(1 - \xi)^{\alpha}.$$

Отсюда получаем, что

$$J_{12} \leq \frac{1}{\alpha}|x + a - 1|^{\alpha-1}. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (13) получаем

$$J_1 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)|x + a - 1|^{\alpha-1}. \tag{16}$$

Заменяя в (12) a на $1 - a$, получаем

$$J_2 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)|x - a|^{\alpha-1}.$$

Отсюда, учитывая (16) и равенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)},$$

приходим к (11). □

Фундаментальное решение

Рассмотрим функцию $F_{\alpha,\lambda}(x, t)$, которая определяется как решение интегрального уравнения

$$F_{\alpha,\lambda}(x, t) = \lambda\, Q_x^{\alpha}\, F_{\alpha,\lambda}(x, t) + q_0(x, t), \qquad (0 < x, t < 1), \tag{17}$$

где

$$q_0(x, t) = \frac{(x - t)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Определение. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ для которых однородное уравнение

$$g(x) = \lambda\, Q_x^{\alpha}\, g(x), \qquad (0 < x < 1),$$

не имеет в пространстве $M_t^{1-\alpha}[0,1]$ для всех $t \in [0,1]$ решений, отличных от тривиального, обозначим через S_α.

Лемма 2. *Пусть*

$$|\lambda| < \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\right)^{-1}. \tag{18}$$

Тогда $\lambda \in S_\alpha$, и уравнение (17) имеет решение, и притом единственное. Это решение может быть представлено в виде

$$F_{\alpha,\lambda}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(Q_x^\alpha\right)^n q_0(x,t). \tag{19}$$

Доказательство. Как нетрудно заметить, ряд в (19) является рядом Неймана, получаемым при решении уравнения (17) методом последовательных приближений. Из сходимости этого ряда и будет следовать утверждение леммы.

Принимая во внимание определение (10), имеем $q_0(x,t) \in M_t^{1-\alpha}[0,1]$ для любого фиксированного $t \in [0,1]$. Отсюда, с учетом (11), следует, что

$$\| \left(Q_x^\alpha\right)^n q_0(x,t)\|_{(t,1-\alpha)} \le C_\alpha^n \|q_0(x,t)\|_{(t,1-\alpha)}.$$

В силу (11), это означает, что ряд в (19), сходится в пространстве $M_t^{1-\alpha}[0,1]$ равномерно относительно λ из любого компактного множества чисел, удовлетворяющих (18). □

Замечание. Принимая во внимание (6), нетрудно заметить, что для λ, удовлетворяющих (18), фукнкция $F_{\alpha,\lambda}$ может быть представлена в виде

$$F_{\alpha,\lambda}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n q_n(x,t),$$

где функции $q_n(x,t)$ задаются равенствами

$$q_n(x,t) = D_{0x}^{-\alpha}\, I_x\, q_{n-1}(x,t), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

или, что в силу (7) то же самое,

$$q_n(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (s+x-1)_+^{\alpha-1} q_{n-1}(x,s)\, ds.$$

Замечание. Как отмечено выше (см. (9)), Q_x^α является интегральным оператором с симметричным ядром, действующим в $L[0,1]$, и при $\alpha > 1/2$ является оператором Гильберта — Шмидта в $L_2[0,1]$. Это означает, что по крайней мере при $\alpha > 1/2$ интегральное уравнение (17) однозначно разрешимо для всех λ, за исключением не более чем счетного числа действительных значений.

Лемма 3. *Пусть $\lambda \in S_\alpha$ и функция $G(x)$ представима в виде*

$$G(x) = \int_0^1 g(s) q_0(x,s)\, ds,$$

где $g(x) \in M_a^{1-\alpha}[0,1]$, $a \in [0,1]$. *Тогда интегральное уравнение*

$$\nu(x) - \lambda\, Q_x^\alpha\, \nu(x) = G(x) \tag{20}$$

имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$\nu(x) = \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, g(t)\, dt. \tag{21}$$

Доказательство. Тот факт, что уравнение (20) имеет и притом единственное решение следует из определения множества S_α. Для доказательства леммы остается показать, что функция (21) является его решением. Действительно, в силу (17), имеем

$$\lambda\, Q_x^\alpha\, \nu(x) = \lambda \int_0^1 g(t)\, Q_x^\alpha\, F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, dt = \int_0^1 [F_{\alpha,\lambda}(x,t) - q_0(x,t)]\, g(t)\, dt = \nu(x) - G(x).$$

Отсюда следует, что (21) является решением (20). □

Лемма 4. *Пусть* $\lambda \in S_\alpha$. *Для функции* $F_{\alpha,\lambda}(x,t)$ *имеют место равенства*

$$D_{0x}^\alpha F_{\alpha,\lambda}(x,t) - \lambda F_{\alpha,\lambda}(1-x,t) = 0 \qquad (0 < x < 1,\ 0 \le t \le 1,\ x \ne t) \tag{22}$$

и

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t > 0, \\ 1, & \text{если} \quad t = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Подействуем на обе части уравнения (17) оператором $D_{0x}^{\alpha-1}$, учитывая (6) и равенство

$$D_{0x}^{\alpha-1} q_0(x,t) = H(x-t),$$

где $H(z)$ — функция Хевисайда, получаем

$$D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t) = \lambda\, D_{0x}^{-1}\, I_x\, F_{\alpha,\lambda}(x,t) + H(x-t). \tag{24}$$

Устремляя x к нулю получаем (23). Дифференцируя (24) приходим к (22). □

Представление решения

Пусть $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (5), $f(x) \in M_a^{1-\alpha}[0,1]$, $a \in [0,1]$, и пусть $\lambda \in S_\alpha$. Применяя к обеим частям (1) оператор $D_{0x}^{-\alpha}$, принимая во внимание законы композиции для операторов дробного интегро-дифференцирования [1], начальное условие (5) и определение (6), получим

$$u(x) - \lambda\, Q_x^\alpha\, u(x) = D_{0x}^{-\alpha} f(x) + u_0 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{25}$$

В силу линейности (25) функцию $u(x)$ суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где

$$u_1(x) - \lambda\, Q_x^\alpha\, u_1(x) = D_{0x}^{-\alpha} f(x) \tag{26}$$

и

$$u_2(x) - \lambda\, Q_x^\alpha\, u_2(x) = u_0 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Заметив, что

$$D_{0x}^{-\alpha} f(x) = \int_0^1 q_0(x,s)\, f(s)\, ds,$$

получаем, что в силу доказанного выше (см. лемму 3), решение уравнения (26) имеет вид

$$u_1(x) = \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,s)\, f(s)\, ds.$$

Далее, учитывая, что

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = q_0(x,0),$$

получаем

$$u_2(x) = u_0\, F_{\alpha,\lambda}(x,0).$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть* $\lambda \in S_\alpha$, $f(x) \in M_a^{1-\alpha}[0,1]$, $a \in [0,1]$. *Существует единственное регулярное решение задачи* (1), (5), *и оно представимо в виде*

$$u(x) = u_0\, F_{\alpha,\lambda}(x,0) + \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,s)\, f(s)\, ds. \tag{27}$$

Доказательство. Из приведенных ранее рассуждений следует, что если $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (5), и выполнены условия теоремы, то $u(x)$ имеет вид (27). Отсюда, в частности, следует единственность решения рассматриваемой задачи. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что функция $u(x)$, заданная формулой (27) действительно является решением задачи (1), (5).

В силу (23) имеем

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u_0 \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,0) + \lim_{x\to 0} \int_0^1 D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,s)\, f(s)\, ds = u_0.$$

Далее, с учетом (24) получаем

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = u_0\, D_{0x}^{\alpha} F_{\alpha,\lambda}(x,0) + \frac{d}{dx} \int_0^1 \left[\lambda\, D_{0x}^{-1}\, I_x\, F_{\alpha,\lambda}(x,s) + H(x-s)\right]\, f(s)\, ds =$$

$$= \lambda\, u_0\, F_{\alpha,\lambda}(1-x,0) + \lambda \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(1-x,s)\, f(s)\, ds + f(x) = \lambda u(1-x) + f(x).$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Заключение

В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного уравнения дробного порядка с инволюцией. Доказана теорема существования и единственности решения, в которой сформулированы достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость исследуемой задачи. Построено фундаментальное решение, изучены его основные свойства. В терминах фундаментального решения найдено явное представление решения исследуемой задачи.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма в ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37.
3. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования, *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194–197.
4. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série,*, 2006. Т. 80(94), С. 259–272.
5. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2007. Т. 10, № 2, С. 139–150.
6. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation, *Journal of Computational Physics*, 2013. № 252, С. 495–517.
7. Klimek M., Agrawal O.P. Fractional Sturm–Liouville problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2013. № 66, С. 795–812.
8. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2014. Т. 13, № 1, С. 125–142.
9. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 3, № 2(11), С. 39–44.
10. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator, *Documenta Mathematica*, 2016. Т. 21, С. 1503–1514.
11. Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Известия КБНЦ РАН*, 2017. № 1(75), С. 34–40.
12. Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2018. № 4(24), С. 61–65 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65.
13. Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2019. № 3(28), С. 32–40 DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39.
14. Энеева Л. М. Априорная оценка для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. № 4(29), С. 41–47 DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47.
15. Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).*
16. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).*
17. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems, *Mathematics*, 2020. Т. 8(12), С. 2122 DOI: 10.3390/math8122122.

18. Энеева Л. М. Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 36, № 3, С. 65–71 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71.

19. Энеева Л. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 40, № 3, С. 64–71 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71.

20. Энеева Л. М. Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 44, № 3, С. 58–66 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66.

21. Энеева Л. М. К вопросу о решении смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Доклады АМАН*, 2023. Т. 23, № 4, С. 62–68 DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68.

Информация об авторе

Энеева Лиана Магометовна✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов, Института прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0003-2530-5022.

References

[1] Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. Moscow. Fizmatlit, 2003. 272 p.

[2] Rekhviashvili S. Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics, Technical Physics Letters, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 33–37.

[3] Rekhviashvili S. Sh. Fractional derivative physical interpretation, Nonlinear world, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–197.

[4] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006. vol. 80(94), pp. 259–272.

[5] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. vol. 10, no. 2, pp. 139–150.

[6] Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation, Journal of Computational Physics, 2013, no. 252, pp. 495–517. http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.06.031

[7] Klimek M., Agrawal O.P. Fractional Sturm–Liouville problem, Computers and Mathematics with Applications, 2013, no. 66, pp. 795–812. DOI:10.1016/j.camwa.2012.12.011

[8] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. vol. 13, no.1, pp. 125–142.

[9] Eneeva L. M. Boundary value problem for differential equation with fractional order derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, vol. 3, no. 2(11), pp. 39–44.

[10] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator Documenta Mathematica, 2016. vol. 21, pp. 1503–1514.

[11] Eneeva L. M. An estimate for the first eigenvalue of the dirichlet problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, News Of The Kabardino-Balkarian Scientific Center Of RAS, 2017, no. 1(75), pp. 34–40.

[12] Eneeva L. M. On Neumann problem for equation with fractional derivatives with different starting points, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2018, no. 4(24), pp. 61–65. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65

[13] Eneeva L. M. Lyapunov inequality for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, no. 3(28), pp. 32–40. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39

[14] Eneeva L. M. A priori estimate for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, no. 4(29), pp. 41–47. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47

[15] Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).

[16] Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).

[17] Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems. Mathematics, 2020. vol. 8(12). 2122.

[18] Eneeva L. M. Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 36, no. 3, pp. 65–71. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

[19] Eneeva L. M. Solution of a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, no. 3(40), pp. 64–71. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71

[20] Eneeva L. M. Nonlocal boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2023, no. 3(44), pp. 58–66. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66

[21] Eneeva L. M. On the question of solving a mixed boundary value problemfor an equation with fractional derivatives with different origins, Adyghe International Scientific Journal, 2023, Vol. 23, no. 4, Pp. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68

Information about the author

Eneeva Liana Magometovna – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0003-2530-5022.