



Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя

*Н. Б. Алимова**

Ташкентский государственный финансовый университет, 100000, Республика Узбекистан,
г. Ташкент, проспект Амира Темура, 60А

Аннотация. В статье проводится исследование процесса временного распространения нервного импульса в клеточной мембране. Для этой цели была предложена новая математическая модель, основанная на дробном осцилляторе ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя. Особенность дробного осциллятора является, то, что модельное уравнение содержит производные дробных переменных порядков типа Герасимова-Капуто. Предложенная математическая модель представляет собой задачу Коши. В силу нелинейности модельного уравнения решение задачи Коши искалось с помощью численного метода нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Численный метод был реализован на языке Maple 2022. С помощью численного алгоритма была проведена визуализация результатов моделирования, построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано, что решение новой математической модели может обладать релаксационными колебаниями. Кроме того, приведен пример, в котором предельный цикл является устойчивым. Также показано, что предложенный дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя обладает богатой динамикой: различные регулярные и хаотические режимы.

Ключевые слова: модель, осциллятор ФитцХью-Нагумо, производная дробного переменного порядка, нелокальная конечно-разностная схема, осциллограммы, фазовые траектории


Получение: 15.10.2024; Исправление: 02.11.2024; Принятие: 15.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Алимова Н.Б. Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 56-69. EDN: RBCKMK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>.

Финансирование. Научное исследование проведено без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: alimova_nazira85@mail.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Алимова Н.Б., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Mathematical Modeling of the Neuron Autocoupling in the Cell Membrane Using the Fractional Model of FitzHugh-Nagumo with the Function of Irritant Intensity

*N. B. Alimova**

Tashkent State Financial University, 100000, Republic of Uzbekistan, Tashkent,
Amir Temura Avenue, 60A

Abstract. The article studies the process of temporary propagation of a nerve impulse in a cell membrane. For this purpose, a new mathematical model based on the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator with a stimulus intensity function was proposed. A feature of the fractional oscillator is that the model equation contains derivatives of fractional variables of the Gerasimov-Caputo type. The proposed mathematical model is a Cauchy problem. Due to the nonlinearity of the model equation, the solution to the Cauchy problem was sought using a numerical method of a nonlocal explicit finite-difference scheme of the first order of accuracy. The numerical method was implemented in the Maple 2022 language. Using a numerical algorithm, the simulation results were visualized, oscillograms and phase trajectories were constructed for various values of the model parameters. It is shown that the solution to the new mathematical model can have relaxation oscillations. In addition, an example is given in which the limit cycle is stable. It is also shown that the proposed FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with stimulus intensity function has rich dynamics: various regular and chaotic modes.

Key words: model, FitzHugh-Nagumo oscillator, fractional variable order derivative, nonlocal finite difference scheme, oscillograms, phase trajectories


Received: 15.10.2024; Revised: 02.11.2024; Accepted: 15.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Alimova N. B. Mathematical modeling of the neuron autocoupling in the cell membrane using the fractional model of FitzHugh-Nagumo with the function of irritant intensity. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 56-69. EDN: RBCKMK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>.

Funding. The scientific research was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

*Correspondence:  E-mail: alimova_nazira85@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Alimova N. B., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

В работах 60-ых годов Р. ФитцХью [1] и Дж. Нагумо [2] была предложена математическая модель (осциллятор ФитцХью-Нагумо) для описания возбуждения нервного импульса в мембране. Модель описывает быструю и медленную динамику двух переменных — "возбуждающей" переменной, характеризующей мембранный потенциал в биологической возбудимой ткани и "восстанавливающей" переменной, отвечающей за ток восстановления. Модель являлась упрощенной версией ранее известной модели Ходжкина-Хаскли [3] и широко используются в нейробиологии для описания активации и деактивации нейронов.

Необходимо отметить, что существует модели ФитцХью-Нагумо [2], которые учитывают пространственное распространение возбуждения нейронов (диффузионная модель), что позволяет изучать пространственно-временные паттерны в нейронных системах. Такие модели описываются уравнениями в частных производных диффузионного типа [4].

В настоящей работе мы будем изучать модель ФитцХью-Нагумо, которая описывает возбуждение нейрона в биологических тканях с учетом наследственности. Наследственность — это свойство динамической системы помнить о оказанном на нее воздействии. Это воздействие проявляется не мгновенно, а с течением некоторого времени. С точки зрения математики такие системы с наследственностью можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами — функциями памяти [5].

В случае, если функции памяти являются степенными, то мы можем перейти к понятию дробной производной и соответственно к дробным дифференциальным уравнениям [6]. Математические модели, которые описываются с помощью дробных дифференциальных уравнений будем называть дробными моделями.

Одни из первых работ по исследованию дробной модели ФитцХью-Нагумо были проведены в статьях [7–9]. В этих работах была построена дробная математическая модель ФитцХью-Нагумо в терминах дробной производной Герасимова-Капуто [10, 11] постоянного порядка. Далее с помощью численных методов были исследованы количественные и качественные свойства решения предложенной модели, получены различные динамические режимы, показано, что предельный цикл не всегда является устойчивым.

Настоящая работа является продолжением исследований дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо и его обобщения. Обобщение ранее предложенной дробной модели ФитцХью-Нагумо заключается в учете зависимости порядков дробных производных от времени, а также в учете зависимости интенсивности раздражителя от времени.

Целью работы является исследование осциллограмм и фазовых траекторий, построенных при различных значениях параметров модели для установления релаксационных колебаний и проверке их устойчивости с помощью компьютерного моделирования.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - c(x^2(t) + p) \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) + qx(t) + gx^3(t) - a - bz(t) = 0, \\ x(0) = k_1, \dot{x}(0) = k_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p = \frac{b}{c^2} - 1$, $q = 1 - b$, $g = b/3$, здесь a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t) \in C^2[0, T]$ — мембранный потенциал, $z(t) \in C[0, T]$ — функция, которая отвечает за интенсивность раздражителя, $t \in [0, T]$ — время рассматриваемого процесса, $T > 0$ — время моделирования, k_1, k_2 — константы, которые определяют начальные условия, операторы дробных производных имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha(t)-1}}, \quad \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(t)}},$$

понимаются в смысле Герасимова-Капуто, переменные порядки которых $1 < \alpha(t) < 2$, $0 < \beta(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0, T]$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Замечание 1. Отметим, что в случае когда $\alpha(t), \beta(t), z(t)$ являются константами мы приходим к результатам работ [7–9].

Замечание 2. В случае, когда $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ и $z(t)$ является константой, то мы переходим к классической модели ФитцХью-Нагумо [1, 2].

Замечание 3. Производные дробного переменного порядка можно изучить в обзорной статье [12].

Дробная математическая модель ФитцХью-Нагумо (1) является объектом нашего исследования. В силу того, что модельное уравнение (1) является нелинейным, то для получения решения нам нужно привлечь численные методы.

В качестве численного метода возьмем нелокальную явную конечно-разностную схему первого порядка точности. Схема является условно устойчивой, а более детальное исследование этого вопроса можно посмотреть в статье [13]. На равномерной сетке с числом узлов N и шагом дискретизации $\tau = T/N$ введем следующую схему ($x_k, \alpha_k, \beta_k, z_k$ — сеточные функции):

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 + \tau k_2, \quad k = 0, \\ x_2 &= \frac{1}{A_1 + cB_1(x_1^2 + p)} (a + bz_1 + (2A_1 + cB_1(x_1^2 + p) - q)x_1 - x_1^3 g - A_1 x_0), \quad k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{1}{A_k + cB_k(x_k^2 + p)} \left(a + bz_k + (2A_k + cB_k(x_k^2 + p) - q)x_k - x_k^3 g - A_k x_{k-1} \right. \\ &\quad \left. - B_k c(x_k^2 + p) \sum_{j=1}^{k-1} ((j+1)^{1-\beta_k} - j^{1-\beta_k})(x_{k-j+1} - x_{k-j}) \right. \\ &\quad \left. - A_k \sum_{j=1}^{k-1} ((j+1)^{2-\alpha_k} - j^{2-\alpha_k})(x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_k = \frac{\tau^{\alpha_k}}{\Gamma(3 - \alpha_k)}, \quad B_k = \frac{\tau^{\beta_k}}{\Gamma(2 - \beta_k)}, \quad \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция}, \quad k = 2, \dots, N - 1.$$

Результаты моделирования

Численный алгоритм (2) был реализован в компьютерной программе Maple 2022. Рассмотрим некоторые примеры.

Для дробной модели ФитцХью-Нагумо (1) вид функций был задан следующим образом:

$$\alpha(t) = \alpha_0 - M_1 \frac{t}{T}, \quad \beta(t) = \beta_0 - M_2 \frac{t}{T}, \quad z(t) = \phi \sin(\omega t). \quad (3)$$

Для параметров функций (3) были выбраны следующие значения: $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$, $M_1 = 0.01$, $M_2 = 0.08$, $\phi = 1$, $\omega = 1$.

Значения остальных параметров выберем согласно работе : $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.3$, $t \in [0, 100]$.

Для расчета по алгоритму (2) количество узлов расчетной сетки $N = 3000$, $\tau = 1/30$. На рис. 1-3 приведены расчетные осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях ϕ и ω .

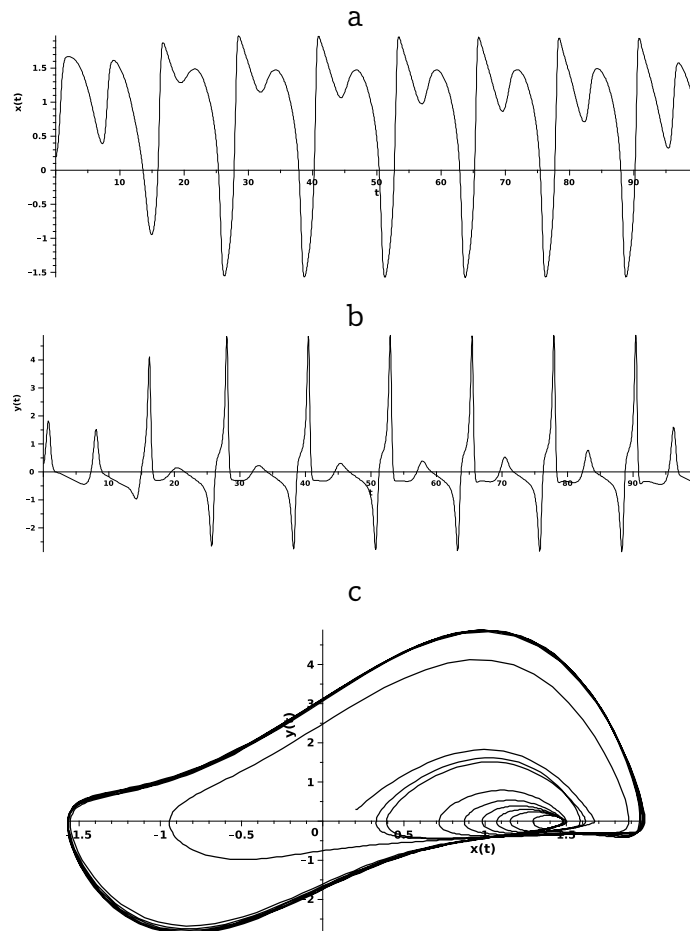


Рис. 1. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = \omega = 1$.

[Figure 1. Oscilloscograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = \omega = 1$.]

На рис.1 отчетливо видно наличие нескольких колебательных режимов. На фазовой траектории рис.1с, что существует точка равновесия (устойчивый фокус), фазовая траектория сначала закручивается по часовой стрелке, а далее с некоторого момента времени происходит движение в обратную сторону и траектория выходит на предельный цикл.

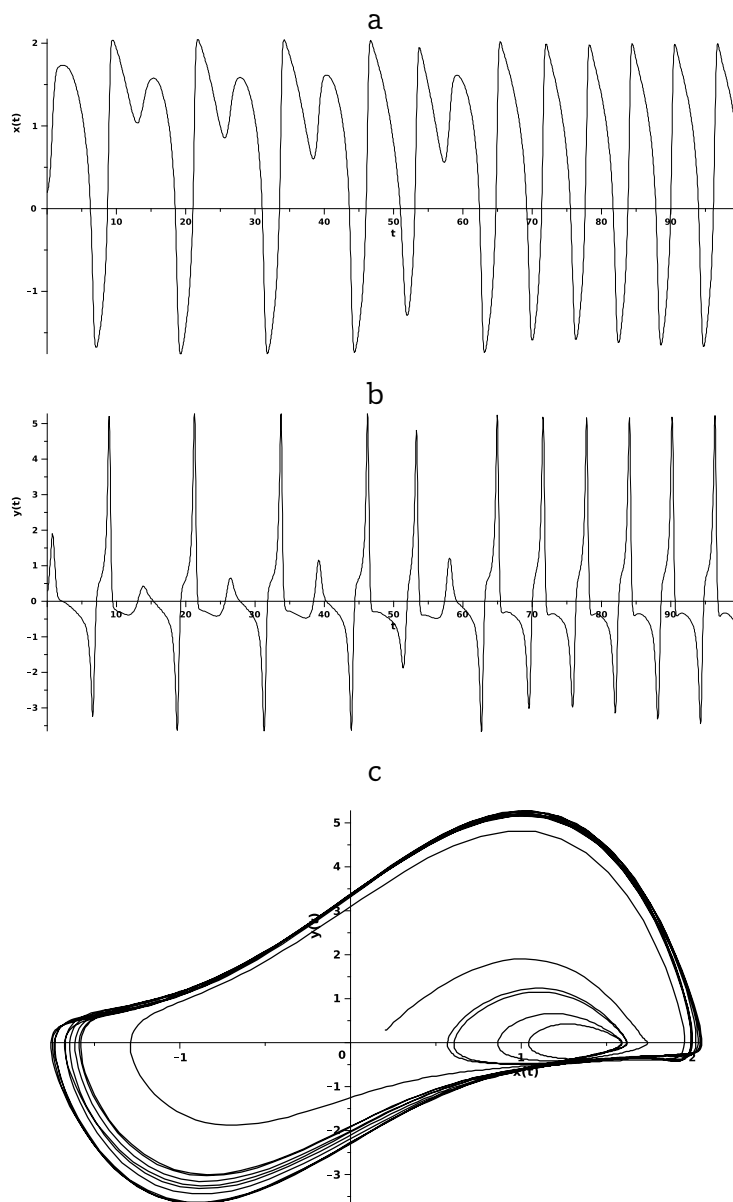


Рис. 2. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 1.5$, $\omega = 1$.
[Figure 2. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 1.5$, $\omega = 1$.]

Далее при увеличении значения параметра ϕ мы отчетливее видим два колебательных режима как на осциллограммах (рис.2а,б), так и на фазовой траектории (рис.2с). Здесь наблюдается такая же динамика как и на рис.1. Однако число закручивающихся витков меньше и выход на предельный цикл происходит медленнее.

Отметим, что осциллограмма на рис. 2b очень напоминает сигнал искусственного ЭКГ, полученный по модели МакШерри [14], а это может указывать на большой потенциал в применении предложенной модели.

Увеличим еще раз значение параметра ϕ (рис.3), остальные параметры оставим без изменения.

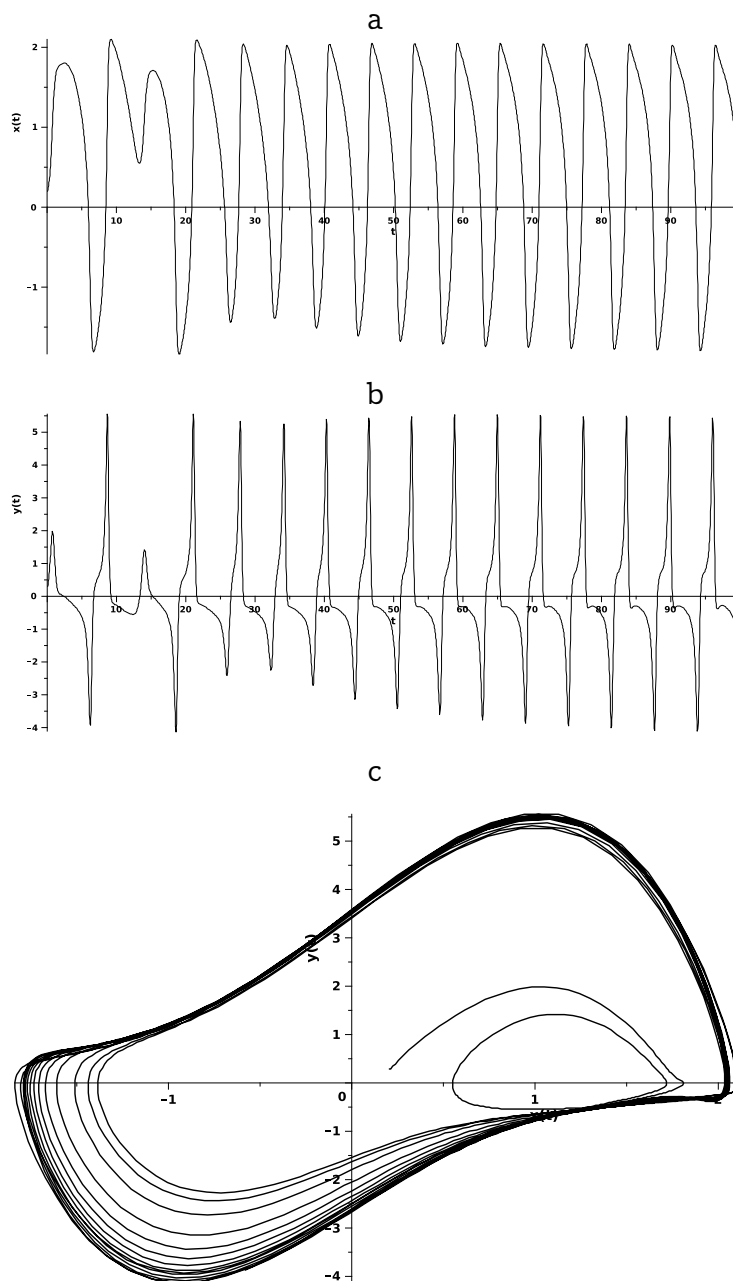


Рис. 3. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 2$, $\omega = 1$.

[Figure 3. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 2$, $\omega = 1$.]

На рис.3с мы видим, что число закручивающихся витков уменьшилось, а траектория выходит на предельный цикл. Исходя из выше сказанного значения параметра ϕ влияет на затухающий режим и при его достаточно больших значениях может привести к его исчезновению (рис.4).

Действительно на рис.4 при значении параметра $\phi = 2.5$ на фазовой траектории (рис.4с) вы видим, что затухающий режим исчез и остаются только релаксационные колебания (предельный цикл).

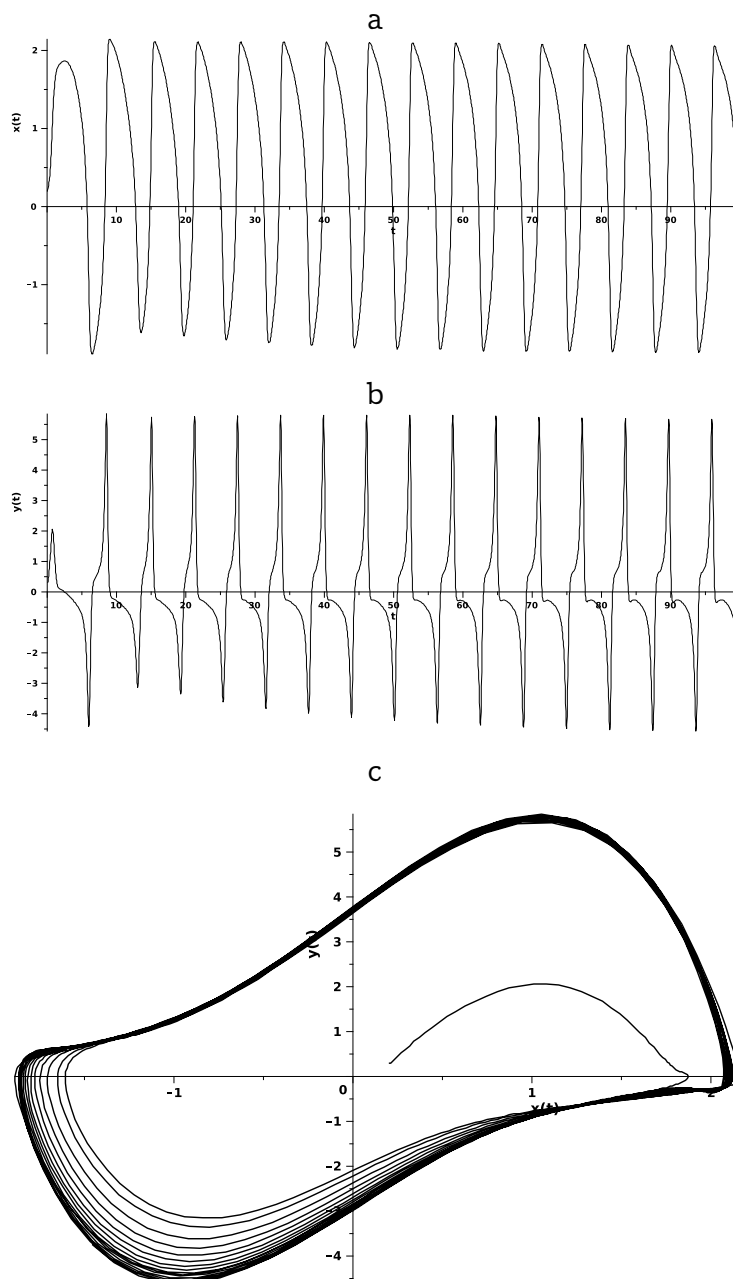


Рис. 4. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 2.5$, $\omega = 1$.

[Figure 4. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 2.5$, $\omega = 1$.]

Отметим, что на рис.1с-4с фазовая траектория рано или поздно выходит на один и тот же предельный цикл. Поэтому естественным образом здесь возникает вопрос является предельный цикл устойчивым?

Прежде, чем ответить на этот вопрос необходимо отметить, что в случае, когда производные целочисленные, то по критерию Бендиксона можно установить устойчивость предельного цикла [15]. Однако в общем случае, когда в модельном

уравнении производные дробные, то критерий Бендиксона не работает. Нужен его аналог. В работе мы экспериментально покажем с помощью компьютерного моделирования, что предельный цикл может быть устойчивым.

Об устойчивости предельного цикла

Устойчивый предельный цикл — это замкнутая траектория в фазовом пространстве динамической системы, обладающая следующими свойствами:

1. Периодичность: система совершает повторяющиеся колебания с постоянным периодом.

2. Притяжение: близлежащие траектории со временем приближаются к этому циклу.

3. Устойчивость: малые возмущения не выводят систему из этого режима колебаний надолго. После возмущения система возвращается к тому же циклу.

Первое свойство очевидно выполняется (рис.4).

Покажем, что может выполняться второе свойство. Для этого построим фазовую траекторию при других начальных значениях $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$, значения остальных параметров оставим без изменения, как на рис.4. Обратим внимание, что точка $(0.2, 5)$ лежит вне предельного цикла.

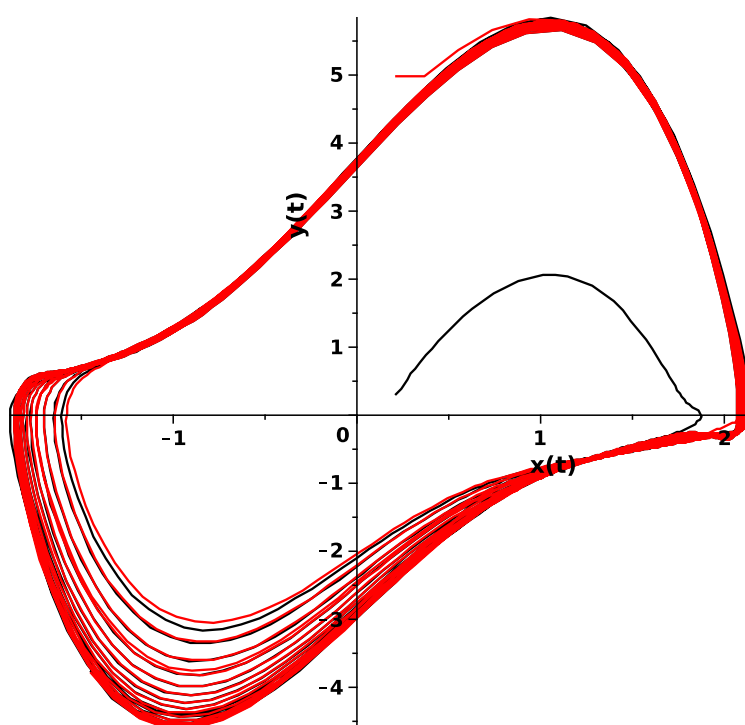


Рис. 5. Фазовая траектория: черная кривая — фазовая траектория из рис.4; красная кривая — фазовая траектория для $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$.

[Figure 5. Phase trajectory: black curve — phase trajectory from Fig. 4; red curve — phase trajectory for $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$.]

Из рис. 5 видно, что второе свойство выполняется – две фазовые траектории с различными начальными точками притягиваются к одному и тому же предельному циклу. Оно указывает на то, что существует единственный устойчивый предельный цикл.

Проверим третье свойство. Для этого возмутим, начальные условия: $k_1 = 0.2 + \epsilon$, $k_2 = 0.3 + \epsilon$, где ϵ – малая величина.

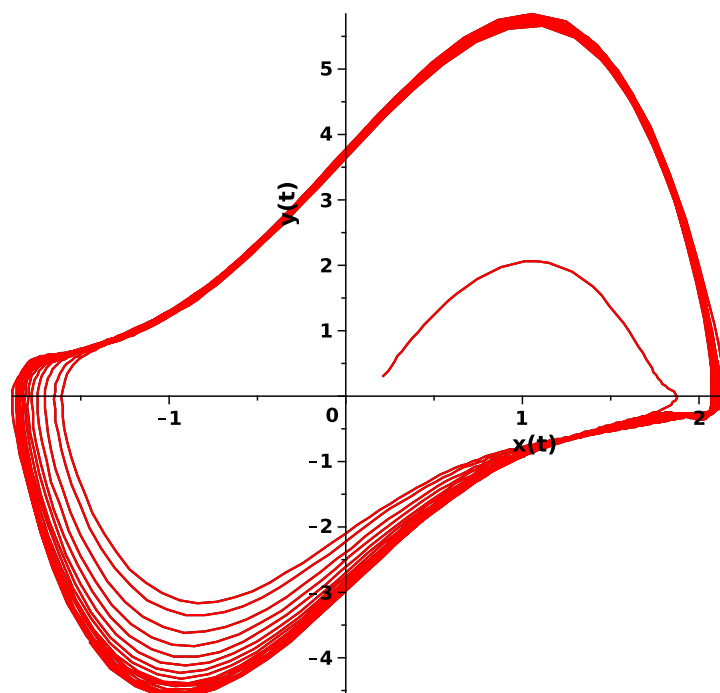


Рис. 6. Фазовая траектория: черная кривая – фазовая траектория из рис.4; красная кривая – фазовая траектория для возмущенных данных $k_1 = 0.2002$, $k_2 = 0.3002$.

[Figure 6. Phase trajectory: black curve – phase trajectory from Fig.4; red curve – phase trajectory for disturbed data $k_1 = 0.2002$, $k_2 = 0.3002$.]

Последний пример на рис.6 показывает, что предельный цикл может быть устойчивым.

Необходимо также отметить, что наличие дробной производной в инерциальном члене, как показали работы [16, 17], для динамических систем не автоколебательного типа приводят к диссипации и затуханию. Однако как показали примеры выше для дробных динамических систем автоколебательного типа может сохраняться релаксационные колебания. Это очень важно для решения прикладных задач.

Заключение

В работе предложена новая математическая модель ФитцХью-Нагумо, которая обобщает ранее известные модели. Далее проведен численный анализ модели, построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано с помощью компьютерного моделирования, что существует возможность наличия единственного устойчивого предельного цикла. Здесь нужно отметить, что для более подробного анализа необходимо разработать аналог теоремы Бендиксона о существовании единственного устойчивого предельного цикла.

Дальнейшее развитие дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо — исследования хаотических и регулярных режимов [18, 19], построение карт динамических режимов, исследование других функциональных зависимостей в модельном уравнении (1).


Список литературы

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical Journal*, 1961. no. 1, pp. 446–446.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.*, 1962. no. 50, pp. 2061–2070.
3. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, 1952. vol. 117(4), pp. 500–544 DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
4. Ambrosio B. Qualitative analysis of certain reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type, *Evolution Equations and Control Theory*, 2023. vol. 12, no. 6, pp. 1507–1526 DOI: 10.3934/eect.2023023..
5. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
6. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Lipko O. D. Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditary, *Vestnik KRAUNC Fiz.-Mat. Nauki*, 2017. vol. 1(17), pp. 33–43 DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43..
8. Lipko O. D., Parovik R. I. Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. vol. 1141, 012125 DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012125.
9. Lipko O., Parovik R. The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo, *E3S Web of Conferences*, 2018. vol. 62, 02017 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202017.
10. Герасимов А. Н. Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения, *АН ССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, № 6, С. 62–78.
11. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529–539.
12. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review, *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.*, 2020. no. 476, 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
13. Parovik R. I. Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Solution of the Model Equation of Nonlinear Hereditary Oscillator with Variable-Order Fractional Derivatives, *Archives of Control Sciences*, 2016. vol. 26, no. 3, pp. 429–435 DOI: 10.1515/acsc-2016-0023..
14. McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering.*, 2003. vol. 50, no. 3, pp. 289–294.
15. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1–88.

16. Псху А. В. Рехвиашвили С. Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, №1, С. 34-37 DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540.
17. Паровик Р. И. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, №13, С. 25-28 DOI:10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811.
18. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 pp.
19. Липко О. Д. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 23, №3, С. 116-123 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123.

Информация об авторе



Алимова Назира Баходировна✉ – преподаватель кафедры "Высшей и прикладной математики", Ташкентский государственный финансовый университет, г. Ташкент, Узбекистан,  ORCID /0009-0003-9684-045X.

References

- [1] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*. 1961. no. 1. P. 446–446.
- [2] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*. 1962. no. 50. P. 2061–2070.
- [3] Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952. no. 117(4). P. 500-544. doi: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764 .
- [4] Ambrosio B. Qualitative analysis of certain reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type. *Evolution Equations and Control Theory*. 2023. vol. 12, No. 6. P. 1507-1526. DOI 10.3934/eect.2023023.
- [5] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York. Dover Publications. 2005. 288 p.
- [6] Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]*. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p.(In Russian).
- [7] Lipko O. D. Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditary. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2017. no. 1(17). P. 33-43. DOI 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43.
- [8] Lipko O.D., Parovik R.I. Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. vol. 1141. 012125. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012125.
- [9] Lipko O., Parovik R. The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo. *E3S Web of Conferences*. 2018. vol. 62. 02017 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202017.
- [10] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. *AN SSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1948. vol. 44. no. 6. P. 62-78.(In Russian).
- [11] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophysical Journal International*. 1967. vol. 13. P. 529-539.
- [12] Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review. *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.* 2020. no. 476. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
- [13] Parovik R.I. Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Solution of the Model Equation of Nonlinear Hereditary Oscillator with Variable-Order Fractional Derivatives. *Archives of Control Sciences*. 2016. vol. 26. no. 3. P. 429-435. DOI: 10.1515/acsc-2016-0023.
- [14] McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering*, 2003. vol. 50, no. 3, P. 289-294.
- [15] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math*. 1901. vol. 24(1). P. 1–88.
- [16] Pskhu A.V., Rekhviashvili S.Sh. Analysis of Forced Oscillations of a Fractional Oscillator. *Technical Physics Letters*. 2018. vol. 44, no. 12. pp. 1218-1221. DOI: 10.1134/S1063785019010164.
- [17] Parovik R. I. Amplitude-Frequency and Phase-Frequency Performances of Forced Oscillations of a Nonlinear Fractional Oscillator. *Technical Physics Letters*. 2019. vol. 45. no. 7. pp. 660-663. DOI: 10.1134/S1063785019070095.
- [18] Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 p.

- [19] Lipko O. D. Investigation of regular and chaotic modes of the FitzHugh- Nagumo fractal oscillator, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018. vol. 23. no. 3. P. 116-123. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123(In Russian).

Information about the author



Alimova Nazira Bakhodyrova ✉ – teacher of the department of "Higher and applied mathematics", Tashkent State Financial University, Tashkent, Uzbekistan,
ORCID 0009-0003-9684-045X.