МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.91

Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом

У. М. Пачев*, А. Х. Кодзоков, А. Г. Езаова, А. А. Токбаева, З. Х. Гучаева

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Аннотация. Линейным уравнениям, т.е. уравнениям первой степени, а также системам из таких уравнений уделяется большое внимание как в алгебре, так в теории чисел. Наибольший интерес представляет случай таких уравнений с целыми коэффициентами и при этом их нужно решать в целых числах. Такие уравнения с указанными условиями называют линейными диофантовыми уравнениями. Еще Эйлер рассматривал способы решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными, причем один из этих способов был основан на применении алгоритма Евклида. Другой способ решения таких уравнений, основанный на цепных дробях, применялся также Лагранжем. Более удобным и перспективным оказался способ Эйлера, чем способ цепных дробей. В настоящей работе рассматривается один новый способ решения линейных уравнений над евклидовым кольцом, основанный на сравнениях по подходящим модулям. Известный ранее матричный метод решения таких уравнений с увеличением числа неизвестных является довольно громоздким в виду того, что он связан с нахождением обратных к унимодулярным целочисленным матрицам. Существенным в нашем способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом является использование алгоритма Евклида и линейного представления НОД элементов в евклидовом кольце. Доказанная в работе теорема применяется к нахождению решения линейного уравнения с тремя неизвестными над кольцом целых гауссовых чисел, являющимся, как известно, евклидовым кольцом. В заключении приводятся замечания о возможных путях дальнейшего развития изложенного исследования.

Ключевые слова: линейное уравнение, евклидово кольцо, алгоритм Евклида, евклидова норма, целые гауссовы числа, сравнение по модулю.

Получение: 30.11.2023; Исправление: 10.01.2024; Принятие: 18.01.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Пачев У. М. и др. Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 9-21. EDN: CZKZBA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: urusbi@rambler.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A99

On One Way to Solve Linear Equations Over a Euclidean Ring

U. M. Pachev*, A. Kh. Kodzokov, A. G. Ezaova, A. A. Tokbaeva, Z. Kh. Guchaeva

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
360004, Nalchick, Chernyshevskogo str., 173, Russia

Abstract. Linear equations, i.e. Equations of the first degree, as well as systems of such equations, receive much attention both in algebra and in number theory. Of greatest interest is the case of such equations with integer coefficients, and in this case they need to be solved in integers. Such equations with the specified conditions are called linear Diophantine equations. Euler also considered ways to solve linear Diophantine equations with two unknowns, and one of these methods was based on the use of the Euclid algorithm. Another method for solving such equations, based on continued fractions, was also used by Lagrange. Euler's method turned out to be more convenient and promising than the method of continued fractions. In this paper, we consider one new method for solving linear equations over a Euclidean ring, based on comparisons over suitable moduli. The previously known matrix method for solving such equations with an increasing number of unknowns is quite cumbersome due to the fact that it is associated with finding the inverses of unimodular integer matrices. Essential in our method of solving linear equations over a Euclidean ring is the use of the Euclidean algorithm and the linear GCD representation of elements in the Euclidean ring. The theorem proved in the work is applied to finding a solution to a linear equation in three unknowns over a ring of Gaussian integers, which, as is known, is a Euclidean ring. In conclusion, comments are made on possible ways of further development of the presented research.

Key words: linear equation, Euclidean ring, Euclidean norm, Gaussian integers, module congruences.

Received: 30.11.2023; Revised: 10.01.2024; Accepted: 18.01.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Pachev U. M. et al. On one way to solve linear equations over a Euclidean ring. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 9-21. EDN: CZKZBA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: urusbi@rambler.ru

Введение

Отдельное самостоятельное изложение, посвященное теории алгебраических уравнений с двумя и тремя неизвестными впервые появилось в «Арифметике» греческого математика Диофанта (3век н.э.), где рассматривались способы решения алгебраических уравнений второй и третьей степени с двумя неизвестными, причем в качестве их возможных значений использовались только рациональные числа. Изложение методов Диофанта с современной точки зрения дается в [1]. Следующий этап в развитии теории алгебраических уравнений с несколькими неизвестными связан с работами Ферма и Виета, которые уже полностью пользовались буквенной записью уравнений (16 век), причем рассматривались решения уравнений уже в целых числах (см. [2], [3]). Вопросам о числе решений линейных диофантовых уравнений в целых числах посвящены [4]-[6]. В последнее время рассматривают также системы линейных диофантовых уравнений над кольцом целых чисел [7].

Линейное уравнение над евклидовым кольцом является обобщением линейного диофантова уравнения. Для более успешного решения вопросов, связанных с линейными уравнениями, мы рассматриваем из над евклидовым кольцом, учитывая при этом что в таком кольце существует наибольший общий делитель (НОД) элементов, а значит, имеется и линейное представление НОД коэффициентов (см. [8], [9]). Элементарное введение в теорию евклидовых колец вместе с приложениями к системам линейных уравнений над такими кольцами дается в [8], где рассматриваются матричный метод решения таких систем. В случае линейных диофантовых уравнений способ их решения с помощью сравнений по подходящим модулям был изложен в [10], [11]. Этот результат использован в [12] в задаче усреднения дифференциального уравнения в частных производных при исследовании предельных циклов обобщенной полиномиальной дифференциальной системы Куклеса, связанной с решением линейного диофантова уравнения специального вида $b_1 + 2b_2 + \cdots + lb_l = l$, где $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – неизвестные в обозначениях указанной работы.

Сведения о евклидовых кольцах

При решении линейных уравнения над кольцом важную роль играют кольца, в которых в определенном смысле выполняется теорема о делении с остатком, как в случае кольца целых чисел.

Определение 1. Кольцо целостности E называется евклидовым, если на множестве $E/\{0\}$ можно определить функцию h, значения которой являются целыми неотрицательными числами так, что выполняются условия

$$E_1: \text{если} \quad b|a, \quad \text{то} \quad h(a) \geq h(b),$$

$$E_2: \text{для любых} \quad a, b, \in E, \quad \text{где} \quad b \neq 0 \quad \text{найдутся элементы} \quad q, r \in E,$$

$$\text{такие что} \quad a = bq + r, \quad \text{где} \quad r = 0 \quad \text{или} \quad h(r) < h(b).$$

В этом определении функция h есть евклидова норма.

Определение 2. Два элемента a и b евклидова кольца E называются сравнимыми по модулю $m \in E$, если $m|(a-b)$ и записывают $a \equiv b(\mod m)$.

К вопросу о возможности решения линейного уравнения над евклидовым кольцом относятся следующие два утверждения (см. [8], [9]).

Лемма 1. *Всякое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ненулевых элементов евклидова кольца R обладает наибольшим общим делителем и при этом НОД$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ определен с точностью до делителей единицы кольца R.*

Лемма 2. *(о линейном представлении НОД). Наибольший общий делитель элементов множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ может быть представлен как линейная комбинация элементов с коэффициентами из евклидова кольца R.*

Линейные уравнения с n неизвестными над евклидовым кольцом

Обобщим теперь метод решения диофантовых уравнений, полученный в [10], [11] на случай линейных уравнений над евклидовым кольцом.

Итак, рассматриваем линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \tag{1}$$

над евклидовым кольцом E, где $a_k \in E$, $k = 1, \dots, n$; $b \in E$ с евклидовой нормой h.

В силу леммы 1 введем в евклидовом кольце обозначения

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = \text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n),\\
&\Delta_2 = \text{НОД}(a_2, \dots, a_n),\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&\Delta_k = \text{НОД}(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n),\\
&\Delta_n = \text{НОД}(a_n) = a_n.
\end{aligned}$$

Уравнение (1) в случае $\Delta_1 \nmid b$ не имеет решений в евклидовом кольце E (по определению делимости в кольце главных идеалов).

Если же $\Delta_1 | b$, то уравнение (1) будет разрешимым в евклидовом кольце E. Действительно, пусть для уравнения (1) выполняется указанная делимость. В силу леммы 2 о линейном представлении НОД имеем

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n = \Delta_1, \tag{2}$$

при некоторых $y_1, y_2, \dots, y_n \in E$.

Обе части уравнения (2) умножим на элемент $\frac{b}{\Delta_1}$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$a_1\left(\frac{b}{\Delta_1}y_1\right) + a_2\left(\frac{b}{\Delta_1}y_2\right) + \dots + a_n\left(\frac{b}{\Delta_1}y_n\right) = b,$$

откуда получаем равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где $x_k = \frac{b}{\Delta_1}y_k \in E$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Следовательно, уравнение (1) в случае $\Delta_1|b$ будет разрешимым в евклидовом кольце E и тем самым условие разрешимости линейного диофантова уравнения, изложенное в [11] переносится на евклидовы кольца.

Считая, что $\Delta_1|b$, перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_1x_1.$$

Тогда найдется $x_1 = x_1^{(0)} \in E$, что выполняется делимость $\Delta_2|b - a_1x_1^{(0)}$ и значит, $a_1x_1^{(0)} \equiv b(\mod \Delta_2)$, при этом в качестве x_1 можно взять любой элемент из класса вычетов $x_1 \equiv x_1^{(0)}(\mod \Delta_2)$.

Заменяем это сравнение равенством $a_1x_1^{(0)} + a_2v_2 = b$, где $x_1^{(0)}, v_2 \in E$, при этом для нахождения $x_1^{(0)}$ нужно применить алгоритм Евклида, справедливый и для кольца E вместе с леммой 2 о линейном представлении НОД.

Обозначим $b_2 = b - a_1x_1^{(0)}$ и рассмотрим уравнение

$$a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_2.$$

Как и в предыдущем случае перепишем опять это уравнение в следующем виде

$$a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b_2 - a_2x_2.$$

В силу предыдущего рассуждения найдется значение $x_2 = x_2^{(0)} \in E$, что выполняется делимость

$$a_3|b_2 - a_2x_2^{(0)},$$

т.е. $a_2x_2^{(0)} \equiv b_2(\mod \Delta_3)$.

Тогда в качестве значения x_2 можно взять любой элемент из класса вычетов $x_2 \equiv x_2^{(0)}(\mod \Delta_3)$, при этом $x_2^{(0)}$ находим по алгоритму Евклида с применением линейного представления НОД.

Продолжая такой процесс, на предпоследнем шаге получим сравнение вида

$$a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} \equiv b_{n-1}(\mod \Delta_n).$$

Тогда в качестве значения неизвестного x_{n-1} можно взять любой элемент из класса вычетов $(\mod \Delta_n)$.

На последнем шаге получаем уравнение вида

$$a_nx_n = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)},$$

откуда

$$x_n = \frac{b_n}{\Delta_n},$$

где $b_n = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)}$.

Получившийся набор элементов $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \in E^n$ есть одно из решений линейного уравнения над евклидовым кольцом E.

Действительно, имеем

$$x_n^{(0)} = \frac{b_n}{\Delta_n} = \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow a_n x_n^{(0)} = b_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n x_n^{(0)} = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n x_n^{(0)} + a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} = b_{n-1}$$

и т.д.

В итоге получаем, что

$$a_1 x_1^{(0)} + a_2 x_2^{(0)} + \dots + a_n x_n^{(0)} = b_1 = b.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема. *Любое решение линейного уравнения*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

над евклидовым кольцом E *при НОД*$(a_1, a_2, \dots, a_n)|b$ *имеет вид*

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \in E^n,$$

где

$$a_k x_k^{(0)} \equiv b_k (\mod \Delta_{k+1}), \quad 1 \le k \le n-1; \quad x_n^{(0)} = \frac{b_n}{\Delta_n};$$

при этом элементы b_k *определяются рекуррентными соотношениями*

$$b_k = b_{k-1} - a_{k-1}x_{k-1}^{(0)}; \quad 2 \le k \le n; \quad b_1 = b;$$

$$\Delta_k = \textit{НОД}\left(a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\right).$$

Пример. Найти какое-нибудь решение линейного уравнения

$$(5+5i)x_1 + (7+6i)x_2 + (11+7i)x_3 = 1$$

над кольцом $\mathbb{Z}[i]$ целых гауссовых чисел.

Решение. Ввиду того, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ является евклидовым, можно применить доказанную теорему. Начнем с того, что евклидова норма в кольце $\mathbb{Z}[i]$ определяется равенством $h(a+bi) = a^2 + b^2$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Следуя теореме, будем находить значения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ для заданного уравнения.

Имеем

$$\Delta_1 = \text{НОД}(5+5i, 7+6i, 11+7i).$$

Применяя алгоритм Евклида, сначала находим НОД$(5+5i, 7+6i)$ первых двух коэффициентов заданного уравнения. Для этого рассматриваем частное

$$\frac{5+5i}{7+6i} = \frac{(5+5i)(7-6i)}{85} = \frac{13}{17} + \frac{1}{17}i.$$

Подбирая ближайшие целые к числам $\frac{13}{17}$ и $\frac{1}{17}$, будем иметь

$$\frac{5+5i}{7+6i} = 1 + 0i + \left(-\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i\right),$$

откуда

$$5 + 5i = (7 + 6i)(1 + 0i) + (-2 - i)$$

при этом очевидно, что $h(-2 - i) < h(7 + 6i)$.

Следуя алгоритму Евклида, делим теперь с остатком число $7 + 6i$ на $-2 - i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Имеем

$$\frac{7+6i}{-2-i} = \frac{(7+6i)(-2+i)}{5} = -4 - i,$$

откуда

$$7 + 6i = (-2 - i) \cdot (-4 - i).$$

Значит, НОД$(5 + 5i, 7 + 6i) = -2 - i$.
Тогда

$$\Delta_1 = \text{НОД}(-2 - i, 11 + 7i) = \text{НОД}(11 + 7i, -2 - i).$$

Опять разделив с остатком число $7 + 6i$ на $-2 - i$, получим

$$7 + 6i = (-2 - i) \cdot (-6 - i),$$

при этом $h(-i) < h(-2 - i)$.

Делим еще с остатком число $-2 - i$ на $-i$. Имеем

$$-2 - i = (-i)(1 - 2i).$$

По алгоритму Евклида получаем

$$\text{НОД}(11 + 7i, -2 - i) = -i.$$

Значит, $\Delta_1 = -i$.
Находим теперь

$$\Delta_2 = \text{НОД}(a_2, a_3) = \text{НОД}(7 + 6i, 11 + 7i) = \text{НОД}(11 + 7i, 7 + 7i).$$

Применяя опять алгоритм Евклида, выполняем последовательные деления с остатками. Имеем

$$11 + 7i = (7 + 6i) \cdot 1 + 4 + i,$$

при этом $h(4 + i) < h(7 + 6i)$.
Далее делим $7 + 6i$ на $4 + i$. Имеем

$$\frac{7+6i}{4+i} = 2 + i,$$

откуда $7 + 6i = (4 + i)(2 + i)$.

Так как последний ненулевой остаток равен $4 + i$, то $\Delta_2 = 4 + i$.

Наконец, в силу теоремы автоматически получаем

$$\Delta_3 = \text{НОД}(a_3) = a_3 = 11 + 7i.$$

Перейдем теперь к нахождению одного из решений заданного уравнения. Запишем его в следующем виде

$$a_2x_2 + a_3x_3 = b - a_1x_1.$$

Тогда найдется $x_1 = x_1^{(0)} \in \mathbb{Z}[i]$, что выполняется делимость

$$\Delta_2 | \left(1 - (5+5i)x_1^{(0)}\right),$$

т.е. $(5+5i)x_1^{(0)} \equiv 1(\mod 4+i)$.
Заменим это сравнение равенством

$$(5+5i)u_1 + (4+i)v_1 = 1, \tag{3}$$

где $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}[i]$.
Значения для u_1 и v_1 найдем, применяя алгоритм Евклида к числам $5+5i$ и $4+i$, при этом значения для v_1 на самом деле не нужно находить. Для этого рассматриваем отношение

$$\frac{5+5i}{4+i} = \frac{25}{17} + \frac{15}{17}i = 1 + i + \frac{8}{17} - \frac{2}{17}i,$$

откуда

$$5+5i = (4+i)(1+i) + 2$$

при этом $h(2) < h(4+i)$.

Следующее деление с остатком дает

$$4+i = 2\cdot 2 + i, \quad h(i) < h(2)$$

и последнее деление будет

$$2 = i(-2i).$$

Итак, имеем следующую последовательность делений с остатками

$$\begin{aligned} &5+5i = (4+i)(1+i) + 2, \\ &4+i = 2\cdot 2 + i, \\ &2 = i(-2i). \end{aligned} \tag{4}$$

По алгоритму Евклида получаем

$$\text{НОД}(5+5i, 4+i) = i$$

и значит,

$$i = (5+5i)u_1 + (4+i)v_1$$

при некоторых $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}[i]$.

С другой стороны, поднимаясь снизу вверх по равенствам (4), получаем

$$i = 4 + i - 2 \cdot 2 = 4 + i - 2 \cdot \{5 + 5i - (4 + i)(1 + i)\} = (5 + 5i) \cdot (-2) + (4 + i)(3 + 2i),$$

откуда

$$1 = (5 + 5i) \cdot 2i + (4 + i)(2 - 3i).$$

Сравнивая это с (3), получаем

$$u_1 = 2i, \quad \text{т.е.} \quad x_1^{(0)} = 2i.$$

Теперь по теореме находим $x_2^{(0)}$ из сравнения

$$a_2 x_2^{(0)} \equiv b_2 (\mod \Delta_3),$$

т.е. $(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv b_1 - a_1 x_1^{(0)} (\mod a_3), \quad$ где $\quad a_3 = \Delta_3$
откуда

$$(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv 1 - (5 + 5i) \cdot (2i) (\mod a_3),$$

$$(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv 11 - 10i (\mod 11 + 7i).$$

Запишем это сравнение в виде равенства

$$(7 + 6i)x_2^{(0)} - (11 + 7i)v_1 = 11 - 10i. \tag{5}$$

Так как НОД$(7 + 6i, 11 + 7i) = \Delta_2 = 4 + i$, то из (5) получаем

$$(2 + i)x_2^{(0)} - (3 + i)v_2 = 2 - 3i.$$

Ясно, что

$$\text{НОД}(2 + i, 3 + i) = 1. \tag{6}$$

Находим НОД$(2 + i, 3 + i)$ по алгоритму Евклида

$$2 + i = (3 + i) \cdot 1 + (-1),$$

$$3 + i = (-1) \cdot (-3 - i).$$

Значит, $-1 = (2 + i) \cdot 1 - (3 + i) \cdot 1$, т.е.

$$1 = (2 + i)(-1) + (3 + i) \cdot 1. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$x_2^{(0)} = -1, \quad v_2 = 1.$$

Теперь получаем по теореме

$$a_3 x_3^{(0)} = b_2 - a_2 x_2^{(0)},$$

т.е.

$$(11 + 7i)x_3^{(0)} = b - a_1 x_1^{(0)} - a_2 x_2^{(0)} = 1 - (5 + 5i)2i - (7 + 6i)(-1) = 18 - 4i,$$

откуда по теореме

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{\Delta_3} = \frac{18 - 4i}{11 + 7i} = 1 - i.$$

Итак, $x_1 = 2i$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1 - i$ есть одно из решений заданного линейного уравнения.

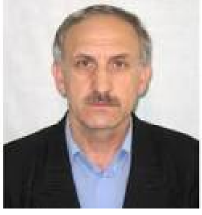
Заключение

1. Доказанная теорема позволяет получить все решения линейного уравнения над евклидовым кольцом, но они будут параметрически зависеть от представителей используемых классов вычетов.
2. Полученный результат можно распространить на все евклидовы квадратичные поля (см. [13]).
3. Интересно перенести изложенный метод на линейные уравнения над евклидовыми кольцами многочленов и матриц.
4. Представляет также обобщение проведенного исследования на системы линейных уравнений над евклидовым кольцом.

Список литературы

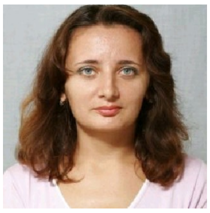
1. Башмакова И. Г. *Диофант и диофантовы уравнения.* М.: Наука, 1972. 68 с.
2. Эдвардс Г. *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел.* М.: Мир, 1980. 425 с.
3. Серпинский В. *О решении уравнений в целых числах.* М.: Наука, 1961.
4. Фрид Э., Пастор И., Рейман И., Ревес П., Ружа И. *Малая математическая энциклопедия.* Будапешт: Академия наук Венгрии, 1976. 693 с.
5. Самсонадзе Э. Т. Формулы для числа решений линейного диофйантового уравнения и неравенства, *Труды Тбилисского ун-та*, 1983. Т. 239, № 2, С. 34-42.
6. Журавлев Ю. И. *Компьютер и задачи выбора.* М.: Наука, 1989. 208 с.
7. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. Введение в теорию чисел, *Итоги науки и техники. соврем. пробл. матем. фундам. направления. ВИНИТИ*, 1990. Т. 49, С. 5-341.
8. Родосский К. А. *Алгоритм Евклида.* М.: Наука, 1988. 236 с.
9. Калужнин Л. А. *Введение в общую алгебру.* М.: Наука, 1973. 447 с.
10. Пачев У. М., Бесланеев З.О., Кодзоков А. Х *Решатель диофантова уравнения*, Государственная регистрация программы для ЭВМ № 2015617110. КБГУ, 2015.
11. Кодзоков А. Х., Бесланеев З. О., Нагоров А. Л., Тхамоков М. Б. О линейных диофантовых уравнениях и способах их решения, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 13, № 2, С. 18-23.
12. Мальков И. Н., Мачулис В. В. Неподвижные точки и предельные циклы обобщённой полиномиальной дифференциальной системы Куклеса, *Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2022. № 2, С. 3-16.
13. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* М.: Наука, 1985. 504 с.

Информация об авторах

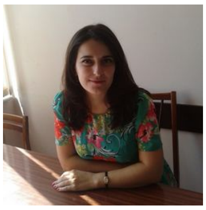


Пачев Урусби Мухамедович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0002-8362-6174.

Кодзоков Азамат Хасанович – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-3431-1228.



Езаова Алена Георгиевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0004-8691-0706.



Токбаева Альбина Аниуаровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-4926-4452.

Гучаева Зера Хамидбиевна – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0000-9777-4018.

References

[1] Bashmakova I. G. Diophantus and Diophantine equations. Moscow. Nauka, 1972. 68 p. (In Russian)

[2] Edwards G. Fermat's Last Theorem. Genetic introduction to algebraic number theory. Moscow. Mir, 1980. 425 p. (In Russian)

[3] Sierpinski V. On solving equations in integers. Moscow. Nauka, 1961. (In Russian)

[4] Fried E., Pastor I., Reiman I., Reves P., Ruzsa I. Small mathematical encyclopedia. Budapest: the Hungarian Academy of Sciences. 1976. 693 p. (In Russian)

[5] Samsonadze E.T. Formulas for the number of solutions of a linear Diofiant equation and inequality. Proceedings of Tbilisi University, 1983, vol. 239, pp. 34-42. (In Russian)

[6] Zhuravlev Yu.I. Computer and choice problems. Moscow. Nauka, 1989, 208 p. (In Russian)

[7] Manin Yu.I., Panchishkin A.A. Introduction to number theory. Results of science and technology. let's modernize problem math. fundam. directions. VINITI, 1989, vol. 49, pp. 5-348. (In Russian)

[8] Rodossky K.A. Euclid's algorithm. Moscow. Nauka, 1988, 236 p. (In Russian)

[9] Kaluzhnin A.A. Introdicction to general algebra. Moscow: Nauka, 1973, 447 p. (In Russian)

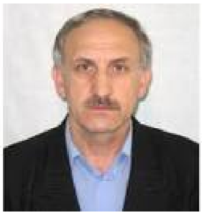
[10] Pachev U.M., Beslaneev Z.O., Kodzokov A.Kh. Diophantine equation solver. State registration of the computer program: 2015617110. KBSU, 2015. (In Russian)

[11] Kodzokov A.Kh., Beslaneev Z.O., Nagorov A.L., Tkhamokov M.B. On linear Diophantine equations and methods for solving nhem. Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. Nauki. 2016. vol. 13. no 2. pp. 18-23. (In Russian)

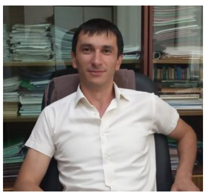
[12] Malkov I.N., Machulis V.V. Fixed points and limit cycles of the generalized polynomial differential system of Kukles. Izvestia of universities. Volga region. Physics and Mathematics. 2002. no 2. pp. 3-16. (In Russian)

[13] Borevich Z.I., Shafarevich I.R. Number theory. Moscow. Nauka, 1985. 504 p. (In Russian)

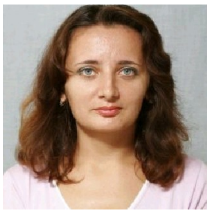
Information about authors



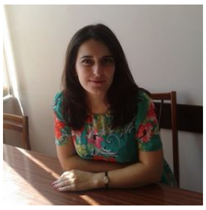
Pachev Urusbi Muhamedovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0002-8362-6174.



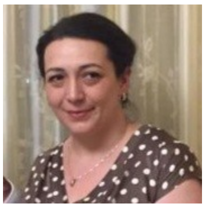
Kodzokov Azamat Khasanovich – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-3431-1228.



Ezaova Alena Georgievna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0004-8691-0706.



Tokbaeva Al'bina Aniuarovna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-4926-4452.



Guchaeva Zera Hamidbievna – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0000-9777-4018.