Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 22-51. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 514.113.5

О новых задачах по стереометрии

$\boxed{\text{Б. П. Федоров}}$, *С. Б. Богданова**, *С. О. Гладков*

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4, Россия

Аннотация. Приводятся оригинальные комбинационные задачи с правильными многогранниками, к числу которых относятся как популярные тетраэдры и кубы, так и менее распространенные в силу своей сложности октаэдры, додекаэдры и икосаэдры. Приведено решение задачи о вычислении ребра октаэдра, додекаэдра и икосаэдра через сторону вписанного и описанного куба. Вычислен радиус описанной и полувписанной сфер вокруг додекаэдра и икосаэдра. Приведены интересные факты из геометрии, касающиеся углов, ребер, вершин и граней выпуклых многогранников. Во второй части работы приведены несколько нетривиальных комбинаций тел с общей вершиной, в которых высота одного тела служит боковым ребром другого, и в которых найден объем общей части тел. Скомбинированными оказываются две треугольные и две четырехугольные пирамиды, треугольная пирамида с конусом. Каждая задача сопровождается подробным чертежом, а решение задач с платоновыми телами содержит также и несколько вспомогательных рисунков. Работа может быть полезной преподавателям математики средних школ не только в качестве методического обеспечения, но и в виде наглядной помощи при подготовке к олимпиадным мероприятиям.

Ключевые слова: правильные тела, соотношение Эйлера, теорема Евклида, угловой дефект, комбинации и пересечения тел.

Получение: 16.01.2024; Исправление: 25.02.2024; Принятие: 27.02.2023; Публикация онлайн: 07.03.2023

Для цитирования. $\boxed{\text{Федоров Б. П.}}$, Богданова С. Б. Гладков С.О. О новых задачах по стереометрии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 22-51. EDN: PSNZPU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: sonjaf@list.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51

Research Article

Full text in Russian

97G40

On the New Problems in Stereometry

B. P. Fedorov, S. B. Bogdanova*, S. O. Gladkov

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

Abstract. It were given original combinative problems with regular polyhedrons, which including well-known tetrahedrons and cubes, and also the lesser-known octahedrons, dodecahedrons and icosahedrons due to its complexity. The solution of the problem of the calculation of the edge of octahedron, dodecahedron and icosahedron by using the the side of inscribed and circumscribed cubes has been given. The radius of the circumsphered circle and midsphere around the dodecahedron and icosahedron has been calculated. Two triangular pyramids and two tetragonal ones, as well as the triangular pyramid with a cone have been arranged. In the second chapter of the paper, it were shown several non-trivial combinations of the bodies with a common vertex, in which the height of one body was a lateral edge of the other one and in which the volume of generalities bodies was found. Two triangular pyramids and two tetragonal ones, as well as the triangular pyramid with a cone have been arranged. Each problem was going with the detailed figure, and the solution to the problems with Platon body was including several supporting ones as well. This paper could be used by high school mathematics teachers not only as methodological support, but also as a clear example in preparation for the Olympiad tasks in math for students.

Key words: regular bodies, Euler ratio, Euclid's theorem, angular defect, aggregates and crosscuts of the bodies.

Received: 16.01.2024; Revised: 25.02.2024; Accepted: 27.02.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Fedorov B. P., Bogdanova S. B., Gladkov S. O. On the new problems in stereometry. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 22-51. EDN: PSNZPU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: sonjaf@list.ru

Введение

В последней из серии авторских работ [1–3] была приведена цитата И. Кеплера [4]: «среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб ... а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколько у куба граней». Следуя сделанному в заключении [3] обещанию, настоящую работу мы начнем с комбинационных задач с правильными телами. Вторая же часть работы будет содержать оригинальные комбинационные сюжеты с правильными пирамидами и конусами. Добавим к сказанному, что так же, как и в [1–3], все нижеприведенные задачи были впервые разработаны Б.П. Федоровым в его многолетней работе со студентами физико – математического факультета педагогического института г. Орехово – Зуево, и не содержатся ни в одном из классических сборников задач по стереометрии [5–13].

Комбинационные задачи с платоновыми телами

Напомним, что многогранник, каждая грань которого является правильным многоугольником одного типа, называется платоновым (правильным) телом. Впервые их исследовал Евклид в своих «Началах», где доказал, что всего в Природе существует ровно пять таких тел:

1. Тетраэдр. Его гранями являются четыре правильных треугольника.
2. Гексаэдр (куб). Шестигранник, имеющий квадратами грани.
3. Октаэдр. Восьмигранник, каждая грань которого является правильным треугольником.
4. Додекаэдр. Двенадцатигранник, у которого каждая грань это правильный пятиугольник.
5. Икосаэдр. Двадцатигранник, каждая грань которого является правильным треугольником.

В связи с этим для справки приведем некоторые красивые факты из стереометрии [4, 14–18].

Во – первых, доказательство того, что платоновых тел всего пять основывается на так называемой теореме Евклида, которая гласит: «В любом выпуклом многогранном угле сумма плоских углов при вершине всегда меньше 360°». В частности, для платоновых тел оказывается возможным только пять комбинаций: в тетраэдре сумма указанных углов равна 180°, в кубе - 270°, октаэдре - 240°, икосаэдре - 300°, додекаэдре - 324°.

Во – вторых, для выпуклых тел оказывается справедлива теорема Рене Декарта, к которой он пришел, рассматривая сумму всех разностей между углом в 360° и углом из теоремы Евклида. Эта сумма, носит название «угловой дефект», и согласно теореме Декарта всегда равна 720°. Действительно, в случае, например, тетраэдра он будет составлять $(360^\circ - 180^\circ) \cdot 4 = 720^\circ$ (напомним, что вершин у тетраэдра четыре), для куба угловой дефект также будет $(360^\circ - 270^\circ) \cdot 8 = 720^\circ$, для октаэдра $(360^\circ - 240^\circ) \cdot 6 = 720^\circ$ и т.д.

В – третьих, для выпуклых многогранников выполняется теорема Эйлера: $V - R + G = 2$, в которой V–количество вершин, R–количество ребер и G–число граней многогранника.

В рассматриваемых ниже трех задачах мы скомбинировали додекаэдр, икосаэдр, тетраэдр и октаэдр с кубом. Для ясности восприятия условие каждой задачи сопровождается дополнительным рисунком, на котором мы специально избегаем всех буквенных обозначений.

Задача 1. *Ребро куба равно a. В куб вписан правильный тетраэдр так, что его ребра являются диагоналями граней куба. В этот тетраэдр вписан октаэдр таким образом, что его вершины лежат на серединах ребер тетраэдра. Середины ребер октаэдра соединены так, что внутри октаэдра оказался вписанным прямоугольный параллелепипед. Выразить стороны тетраэдра, октаэдра и прямоугольного параллелепипеда через ребро куба (см. рис. 1). Проанализировать случай, когда внутренний прямоугольный параллелепипед является кубом.*

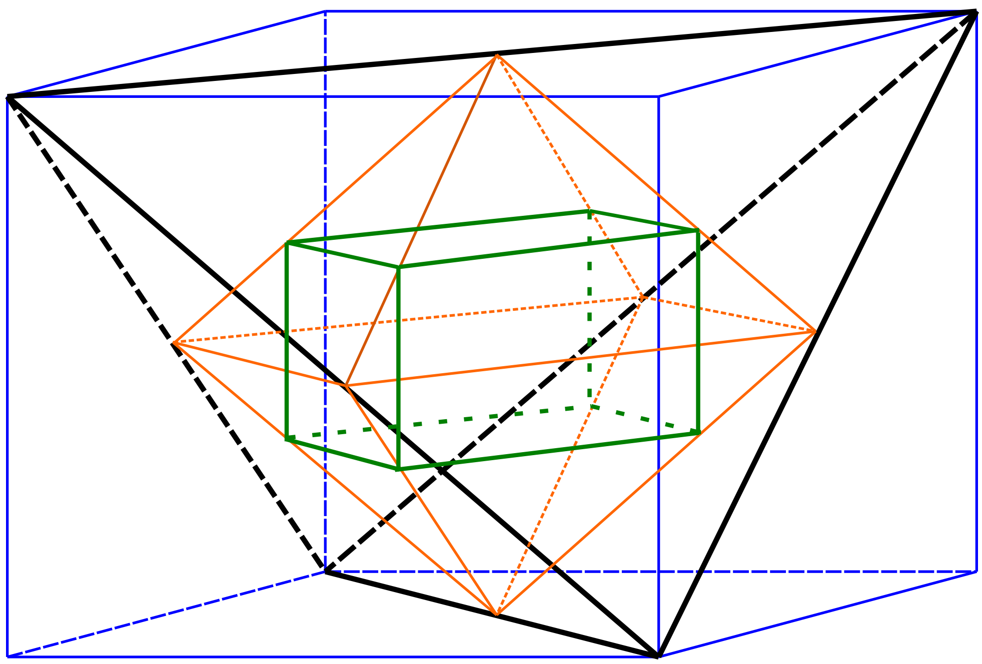

Рис. 1. Схематическое изображение всех вписанных в куб тел.
[Figure 1. The schematic drawing of all bodies inscribed in a cube.]

Решение

Чтобы не загромождать рис.1, решение задачи будем проводить на отдельных чертежах, каждый из которых для наглядности содержит только одну пару тел, но уже с необходимыми нам обозначениями.

1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб с ребром a (рис. 2). Поскольку ребро p правильного тетраэдра является диагональю квадрата со стороной a, то, очевидно, что $p = a\sqrt{2}$.

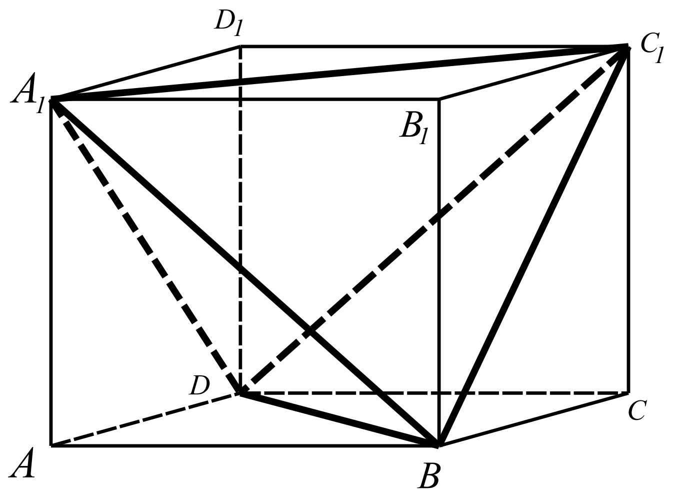

Рис. 2. Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служат вершинами правильного тетраэдра A_1BC_1D.

[Figure 2. The cube corners of $ABCDA_1B_1C_1D_1$ are the vertices of a regular tetrahedron A_1BC_1D.]

2. Рассмотрим отдельно получившийся правильный тетраэдр A_1BC_1D с ребром $p = a\sqrt{2}$ (рис.3). Поскольку вершины правильного октаэдра лежат на серединах ребер тетраэдра A_1BC_1D, то ребро октаэдра q служит средней линией правильного треугольника со стороной $p = a\sqrt{2}$, и потому равно $q = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. На ребрах октаэдра $MNFKTP$ отметим середины A', B', C', D' и A'', B'', C'', D'' (рис. 4). Найдем стороны получившегося прямоугольного параллелепипеда. Понятно, что $A'B' = B'C' = \dfrac{q}{2}$, как средняя линия правильного треугольника со стороной q. Но поскольку $q = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, то $A'B' = B'C' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ и тогда $NK = q\sqrt{2}$, как диагональ квадрата $NFKT$ со стороной q. В результате из треугольника MOK следует, что
$$MO = \sqrt{q^2 - \left(\frac{q\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{q\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}.$$
Тогда и $A'A'' = \dfrac{a}{2}$. Таким образом, все размеры прямоугольного параллелепипеда $A'B'C'D'A''B''C''D''$ равны $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a}{2}$.

4. Исследуем теперь случай, когда вписанный прямоугольный параллелепипед $A'B'C'D'A''B''C''D''$ является кубом и найдем его ребро (см. рис. 5). Обозначим

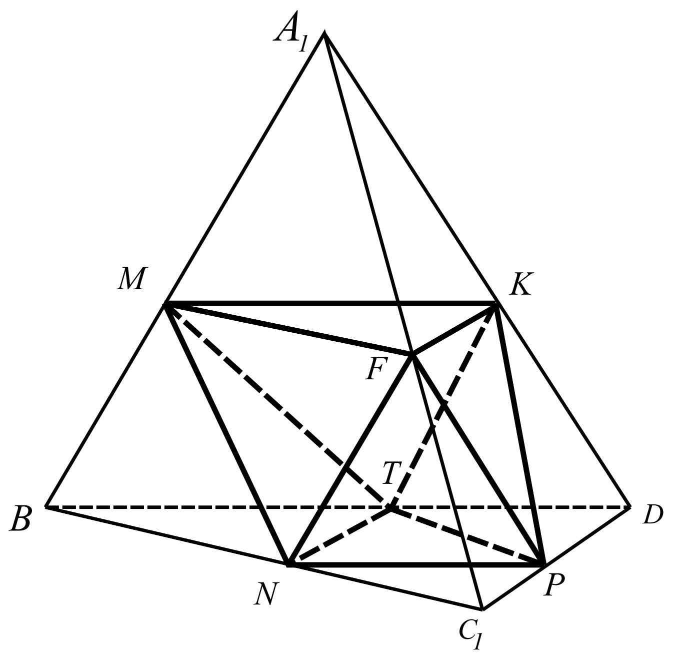

Рис. 3. Середины ребер правильного тетраэдра A_1BC_1D являются вершинами октаэдра MNFKTP.
[Figure 3. The middles of the edges of a regular tetrahedron of A_1BC_1D are the angular points of the regular octahedron MNFKTP.]

сторону куба $A'B'C'D'A''B''C''D''$ через l. Тогда $B''L = \frac{l}{2}$. Пусть отношение $\frac{MB''}{MF} = k$, т.е. $\frac{l}{q} = k$ и $l = kq$. В результате из подобия треугольников MOF и $B''LF$ следует, что $\frac{B''L}{MO} = \frac{B''F}{MF}$, т.е.

$$\frac{B''L}{MO} = \frac{MF - MB''}{MF} = 1 - \frac{MB''}{MF} = 1 - k.$$

А поскольку

$$MO = \frac{q\sqrt{2}}{2},$$

то

$$\frac{B''L}{\frac{q\sqrt{2}}{2}} = 1 - k.$$

И, значит,

$$B''L = q\frac{1-k}{\sqrt{2}}.$$

С одной стороны, ребро куба можно записать в виде

$$l = 2 \cdot B''L = q\,(1-k)\,\sqrt{2}.$$

С другой стороны, как

$$l = kq.$$

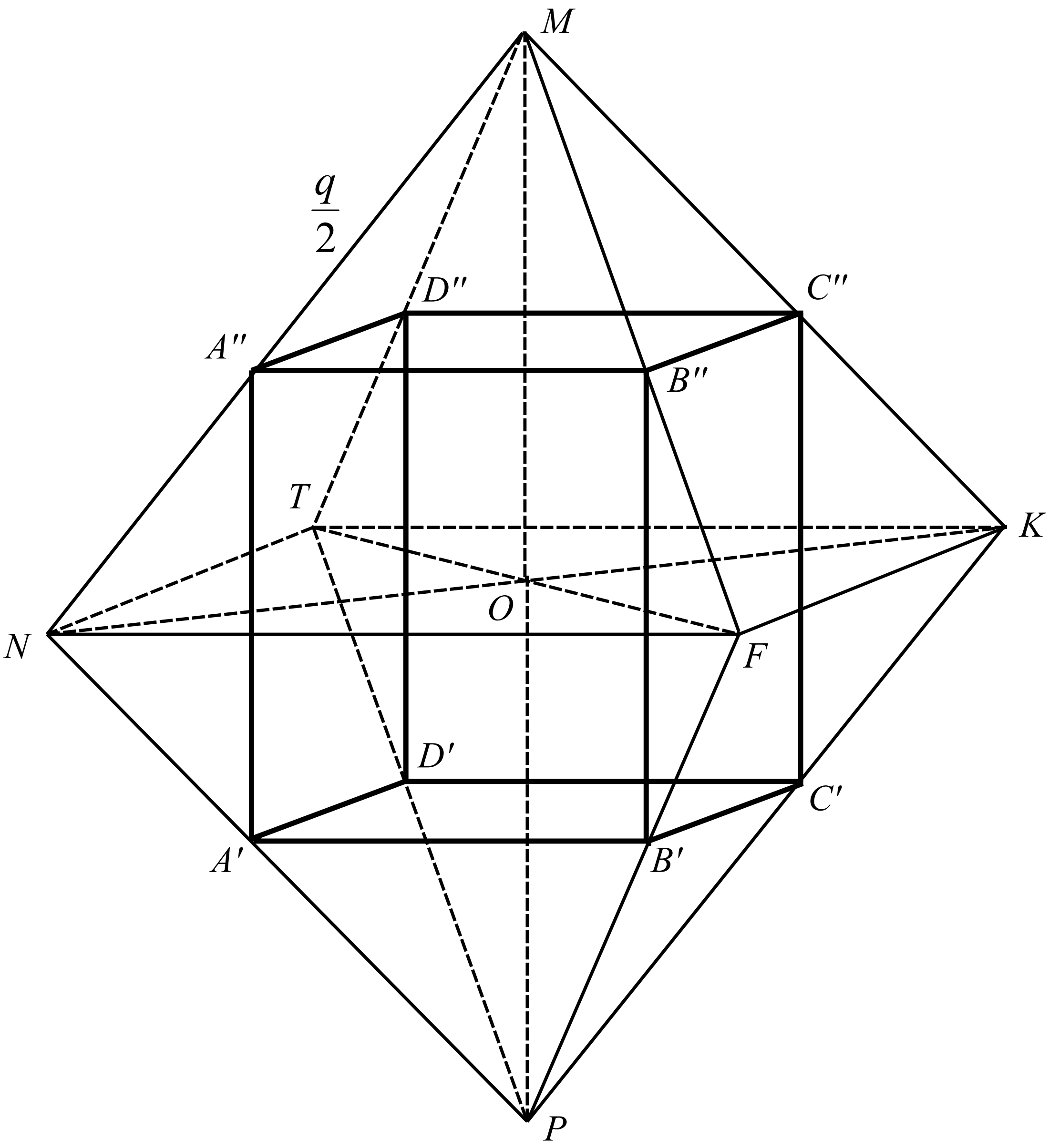

Рис. 4. Середины ребер октаэдра MNFKTP являются вершинами прямоугольного параллелепипеда $A'B'C'D'A''B''C''D''$.

[Figure 4. The middles edges of the regular octahedron of MNFKTP are the vertices of the right-angled parallelepiped of $A'B'C'D'A''B''C''D''$.]

Приравнивая эти два равенства, получим

$$q\,(1-k)\,\sqrt{2} = kq,$$

откуда

$$k = \sqrt{2} - 1.$$

Поэтому ребро l вписанного куба $A'B'C'D'A''B''C''D''$ будет

$$l = q = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

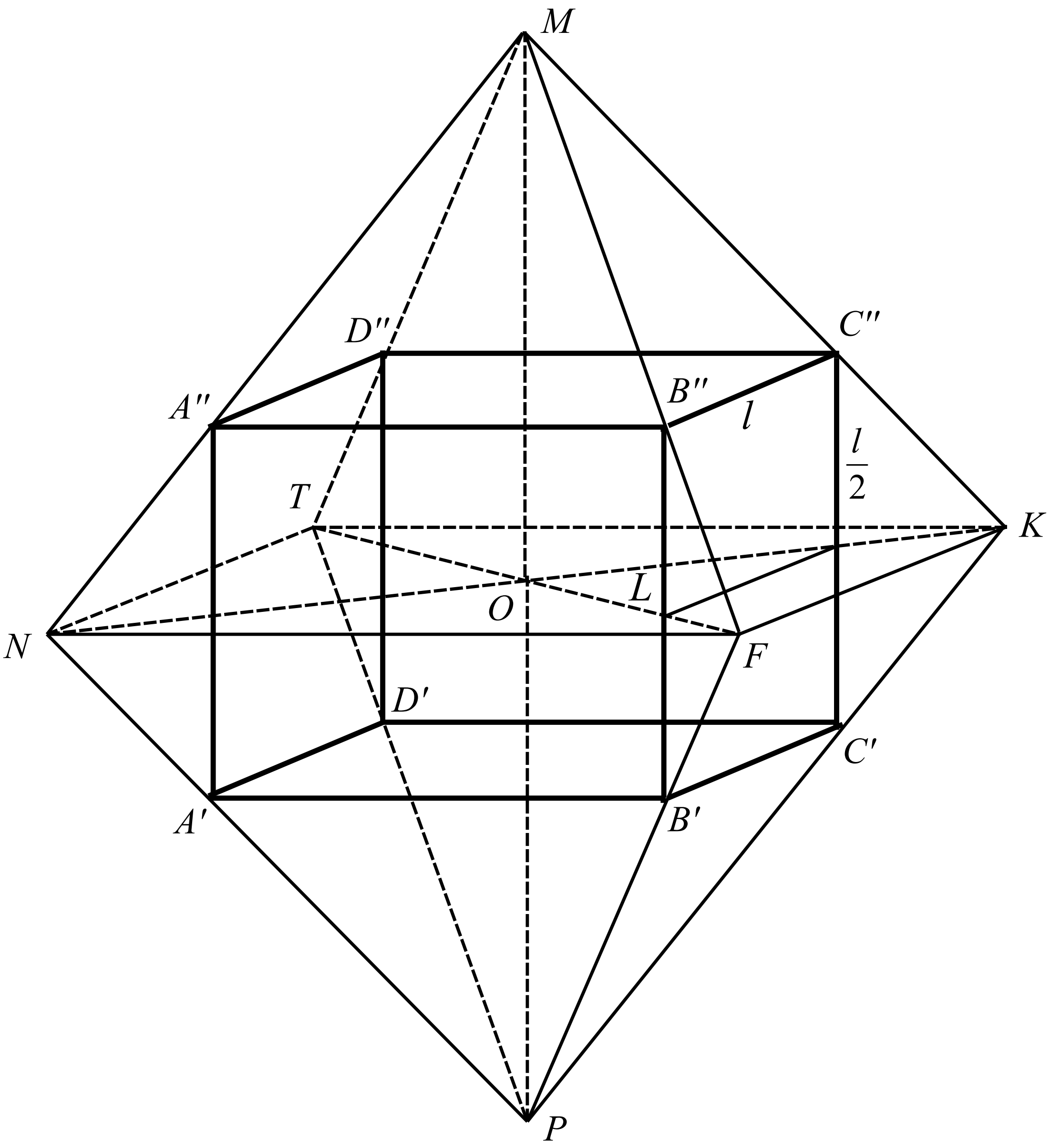

Рис. 5. Вписанный в октаэдр прямоугольный параллелепипед $A'B'C'D'A''B''C''D''$ является кубом.

[Figure 5. The right-angled parallelepiped of $A'B'C'D'A''B''C''D''$ inscribed in the regular octahedron is a cube.]

Итак, ребро вписанного в куб со стороной a тетраэдра равно $a\sqrt{2}$; ребро вписанного в этот тетраэдр октаэдра составляет $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; измерения вписанного в октаэдр параллелепипеда суть $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a}{2}$. Ребро вписанного в октаэдр со стороной $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ куба составляет величину $a\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. *В правильный додекаэдр (правильный многогранник, каждая из двенадцати граней которого является правильным пятиугольником) вписан куб со стороной* a *(рис.6). Выразить ребро додекаэдра через ребро куба. Найти радиус описанной около додекаэдра сферы, а также радиус сферы, касающейся всех ребер додекаэдра (полувписанной сферы).*

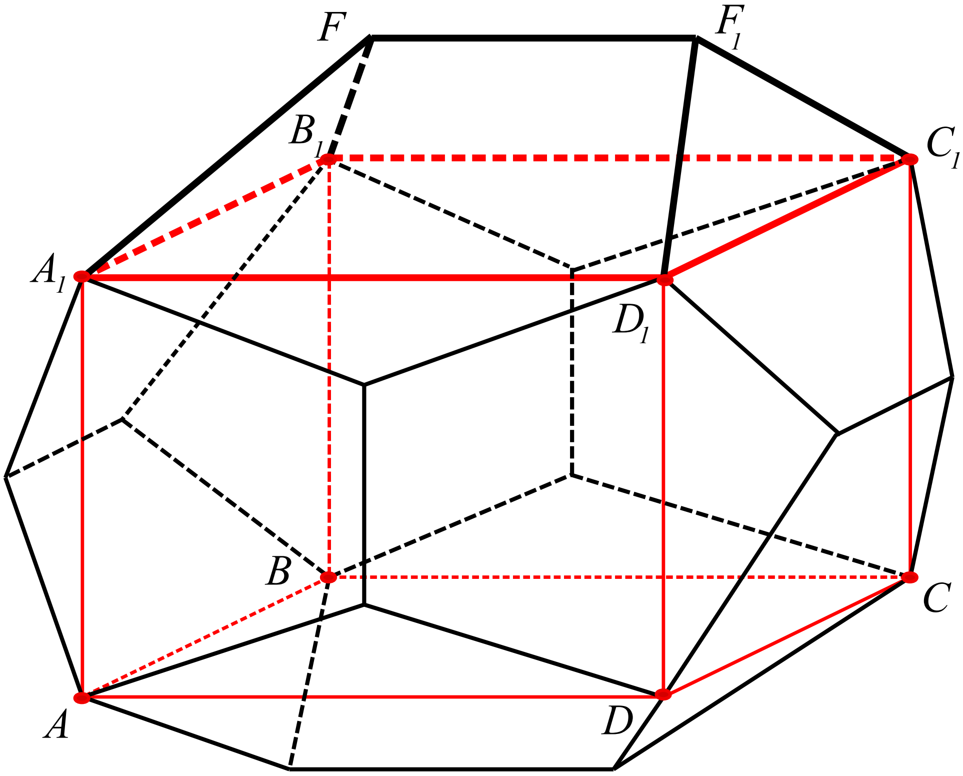

Рис. 6. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в додекаэдр так, что его вершины служат диагоналями граней додекаэдра. Все грани куба являются основаниями многогранников типа $A_1B_1C_1D_1FF_1$, в котором ребра FF_1, A_1D_1, B_1C_1 параллельны друг другу. Центр симметрии куба и додекаэдра, а также радиусы описанной и полувписанных сфер показаны на рис. 9.

[Figure 6. The cube of $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iscribed in dodecahedron as its vertices are the face diagonals of the dodecahedron. All the cube faces are the bases of the polyhedrons, for instance, $A_1B_1C_1D_1FF_1$ in which the edges are parallel to each other. The symmetry center of cube and dodecahedron, and also the radiuses of the midsphere and circumscribed spheres are shown in the Fig.9.]

Решение

1. Выразим ребро додекаэдра через ребро куба a. Из рис. 6 следует, что ребро куба a совпадает с одной из диагоналей грани додекаэдра. На рис. 7 отдельно рассмотрим грань додекаэдра, являющуюся правильным пятиугольником. Сумма всех его внутренних углов составляет, как известно, 540° , поэтому в равнобедренном треугольнике A_1FC_1 углы $A_1FO = 54^\circ$ и $FA_1O = 36^\circ$, а сторона

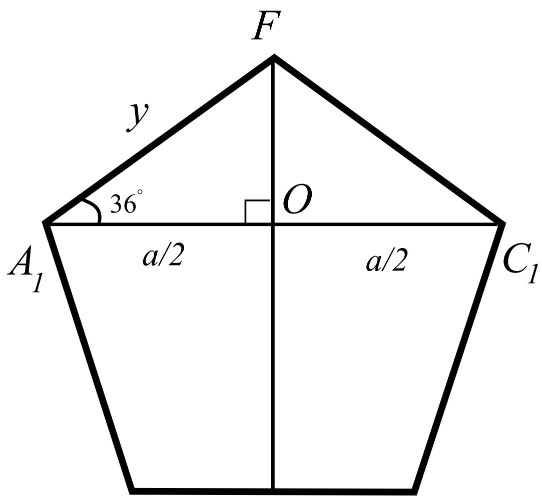

Рис. 7. Диагональ грани A_1C_1 является ребром куба.

[Figure 7. The face diagonal of A_1C_1 is a cube edge.]

$A_1O = \dfrac{a}{2}$ по построению. Тогда сторона y правильного пятиугольника, т.е. ребро описанного додекаэдра, равна

$$y = \frac{a}{2\cos 36^\circ} \tag{1}$$

Приведем вычисление $\cos 36^\circ$. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник с углом при вершине 36° и основанием a (рис. 8). Важно

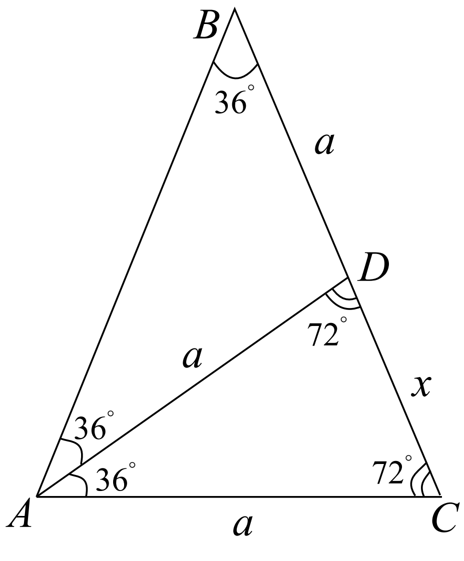

Рис. 8. С помощью равнобедренного треугольника с углом 36° при вершине можно вычислить $\cos 36^\circ$

[Figure 8. Using the isosceles triangle with an angle of 36° at the vertex, we may calculate the following $\cos 36^\circ$.]

сказать, что рис. 8 не является частью никаких предыдущих или последующих рисунков, а поэтому обозначения на нем никак не связаны с обозначениями на рис. 6, 7 или 9, 10. Проведем биссектрису AD угла при основании и получим еще два равнобедренных треугольника: треугольник ADC с углом при вершине $A = 36^\circ$, основанием $DC = x$ и боковыми сторонами $AC = AD = a$, а также треугольник ADB с углом при вершине $D = 108^\circ$, основанием $AB = a + x$ и боковыми сторонами $BD = AD = a$. Из подобия треугольников ABC и ADC следует очевидное соотношение $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DC}{AD}$, т.е.

$$\frac{a}{a+x} = \frac{x}{a},$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

решение которого

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Далее применим теорему синусов в треугольнике ABC:

$$\frac{AC}{\sin 36^\circ} = \frac{BC}{\sin 72^\circ},$$

т.е.

$$\frac{a}{\sin 36^\circ} = \frac{a+x}{\sin 72^\circ}.$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{a+x}{\sin 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ = \frac{a+x}{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ} \cdot \sin 36^\circ = \frac{a+x}{2\cos 36^\circ}.$$

Выражая из этого равенства $\cos 36^\circ$, получим:

$$\cos 36^\circ = \frac{a+x}{2a}.$$

Если теперь подставить сюда найденное выше значение

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

то окончательно найдем, что

$$\cos 36^\circ = \frac{a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) приводит к нахождению ребра додекаэдра:

$$y = \frac{a}{2\cos 36^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{5}+1} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{3}$$

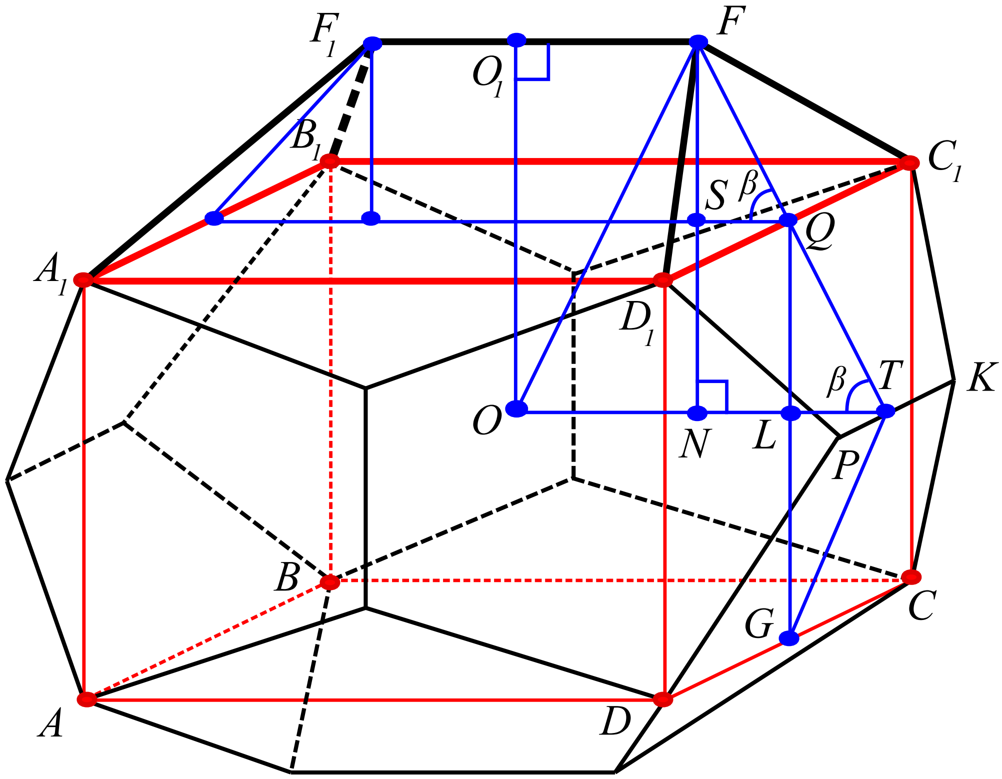

Рис. 9. Точка O - центр описанной и полувписанной сфер вокруг додекаэдра. Радиус полувписанной сферы $OT = OO_1$, радиус описанной сферы OF.

[Figure 9. The point of O is the center of midsphere and circumscribed spheres around the dodecahedron. The radius of the midsphere is $OT = OO_1$, the radius of circumscribed sphere is OF.]

2. Найдем теперь радиус сферы, касающейся всех ребер додекаэдра. Как следует из рис. 9, этот радиус равен отрезку

$$OT = OO_1 = FN = FS + SN = FS + \frac{a}{2}, \qquad (4)$$

где a - ребро куба. Из треугольника FSQ следует, что

$$FS = FQ \cdot \sin\beta, \qquad (5)$$

где β это угол наклона грани FD_1PKC_1 додекаэдра к плоскости верхнего основания куба. Найти его можно из треугольника QLT. Действительно

$$\sin\beta = \frac{QL}{QT} = \frac{a}{2 \cdot QT}.$$

Как видим, нам требуется знать отрезки FQ и TQ, составляющие диагональ FT правильного пятиугольника FD_1PKC_1. Рассмотрим подробнее рис. 10. Ясно, что $FQ = D_1F \cdot \sin 36^\circ$. Согласно (3) сторона додекаэдра нам известна. А потому

$$D_1F = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

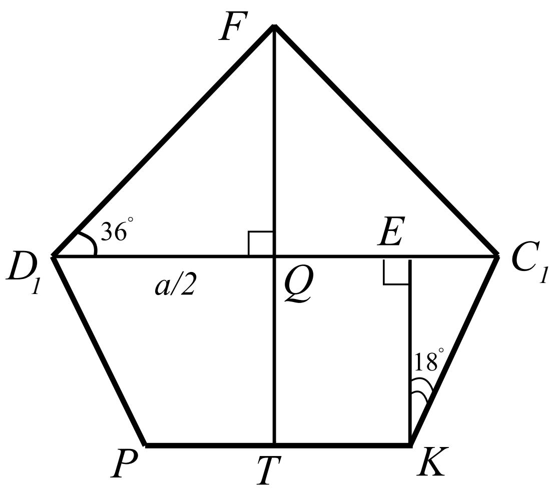

Рис. 10. Грань правильного додекаэдра является правильным пятиугольником.

[Figure 10. The edge of the regular dodecahedron is the regular pentagon.]

и, значит,

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Поэтому

$$FQ = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = a\frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \tag{6}$$

Из рис. 10 следует, что

$$QT = EK = KC_1\cdot\cos 18^\circ.$$

Второй сомножитель легко находится, если воспользоваться формулой двойного угла для косинуса, а именно

$$\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1.$$

Подставляя сюда значение

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

получим уравнение

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = 2\cos^2 18^\circ - 1.$$

Откуда следует равенство

$$\cos^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+5}{8}$$

или

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, с помощью (3) запишем:

$$QT = EK = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+5}.$$

Учитывая эту формулу и равенство $\sin\beta = \frac{a}{2 \cdot QT}$, которое следует из треугольника QLT, после возвращения к основному рис. 9, получаем интересующее нас значение синуса

$$\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}.$$

Если теперь подставить этот результат с учетом формулы (6) в (5), то получим:

$$FS = FQ \cdot \sin\beta = a\frac{\sqrt{5}-1}{8} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}} =$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{5}+5}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{a}{4} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Таким образом, из (5) можно вычислить и радиус сферы, касающейся ребер додекаэдра:

$$FN = FS + \frac{a}{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{a}{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right). \tag{7}$$

3. Что касается радиуса сферы, описанной около додекаэдра, то его можно найти из треугольника OO_1F благодаря соотношению (7). Действительно, имеем для него

$$R = O_1F = \sqrt{OO_1^2 + O_1F^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{8}$$

Формулы (3), (7) и (8) являются решениями поставленной задачи.

Итак, ребро додекаэдра равно $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; радиус описанной около додекаэдра сферы есть $a\frac{\sqrt{3}}{2}$; а радиус полувписанной сферы $\frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Задача 3. *В куб с ребром a вписан икосаэдр (правильный многогранник, каждая из двадцати граней которого является правильным треугольником). Выразить ребро икосаэдра, радиус вписанной в него и описанной около него сфер, а также радиус полувписанной сферы, т.е. касающейся всех ребер икосаэдра, через ребро куба a. Вычислить объем вписанного икосаэдра. (см. рис. 11).*

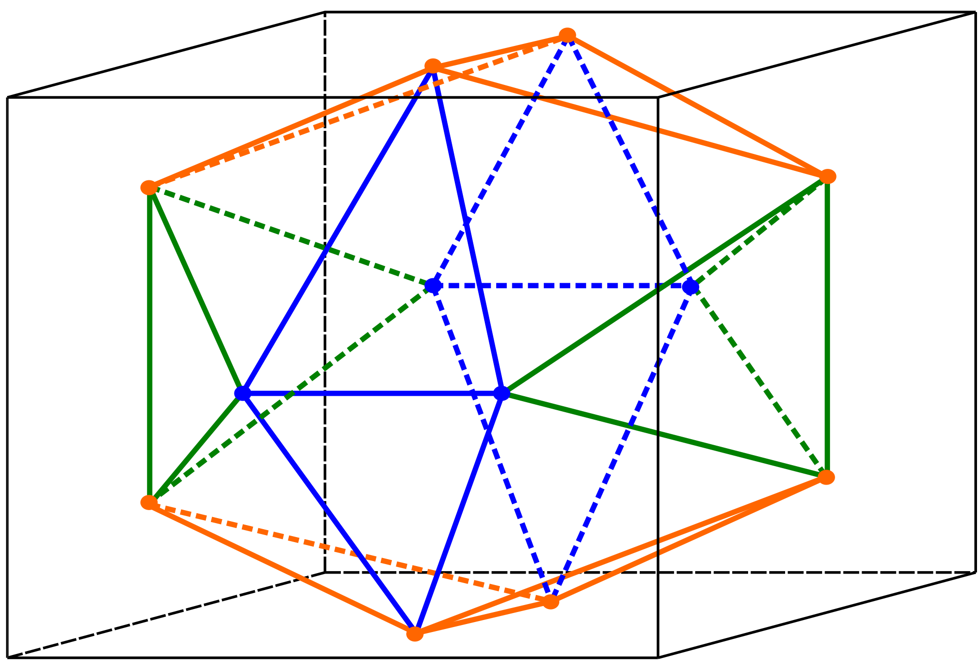

Рис. 11. Схематическое изображение поставленной задачи. Ребра икосаэдра располагаются на осях симметрии противоположных граней куба. Ясно также, что центры описанной около икосаэдра и вписанной в него сфер в силу их симметрий, находятся в центре куба.

[Figure 11. The schematic drawing of the formulated problem. The edges of icosahedron are located on the lines of symmetry of the opposite faces of the cube. What is more, it is clear that the centres of the described around the icosahedron and the spheres inscribed in it due to their symmetries, are located in the center of the cube.]

Решение

Для решения задачи перейдем к рис. 12, на котором показан центр симметрии – точка O, отрезок ON равен радиусу описанной сферы, $OP = \frac{a}{2}$ - радиус сферы, касающейся ребер икосаэдра и отрезок OQ - радиус вписанной сферы. Ребро икосаэдра обозначено через x.

1. Вычислим радиус R описанной около икосаэдра сферы. Из соображений симметрии ясно, что $FN = \frac{a-x}{2} = PM$, а $MN = \frac{a}{2}$. Тогда из треугольника PMN следует, что $PN^2 = PM^2 + MN^2$. Поскольку PN это высота правильного треугольника (грани икосаэдра) со стороной x, то $PN = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Тогда равенство $PN^2 = PM^2 + MN^2$ можно переписать в виде соотношения

$$\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

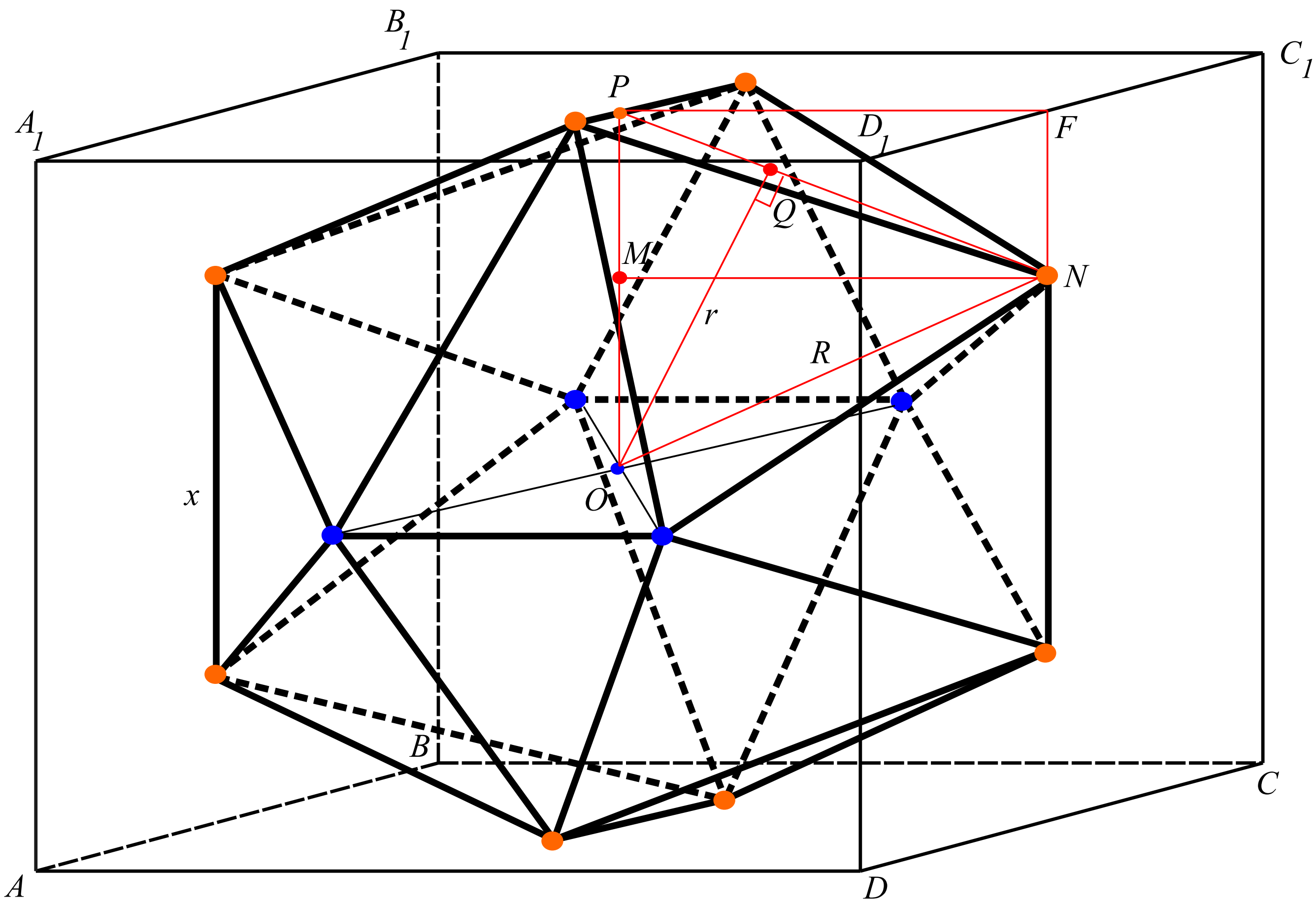

Рис. 12. Ребро икосаэдра равно x. Радиус R описанной вокруг икосаэдра сферы равен ON, отрезок $OP = \frac{a}{2}$ - радиус сферы, касающейся ребер икосаэдра, радиус r вписанной в икосаэдр сферы равен OQ.

[Figure 12. The edge of icosahedron is equal to x. The radius R of the circumscribed sphere around the icosahedron being ON, the length $OP = \frac{a}{2}$ is a radius of the sphere is tangent to the edges of icosahedron, the radius of r inscribed in the icosahedron of the sphere is equal to OQ.]

откуда немедленно следует квадратное уравнение $x^2 + ax - a^2 = 0$. Его решение нам уже встречалось:

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

И, следовательно, ребро икосаэдра равно

$$a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Обратимся теперь к треугольнику OMN. В нем $OM = \frac{a}{2} - \frac{a-x}{2} = \frac{x}{2}$, а $ON = R$. Следуя теореме Пифагора, запишем соотношение

$$R^2 = OM^2 + NM^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + a^2\right).$$

Подставляя сюда значение

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

получим

$$R^2 = \frac{a^2}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{a^2}{8}\left(5-\sqrt{5}\right).$$

Таким образом, радиус описанной сферы будет

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

2. Для нахождения радиуса r вписанной сферы рассмотрим треугольник OPN, в котором высота

$$PN = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{a}{4}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

Если воспользоваться теперь теоремой косинусов

$$R^2 = OP^2 + PN^2 - 2\cdot OP\cdot PN\cdot\cos P,$$

и подставить сюда все найденные выше величины, то находим, что

$$\frac{a^2}{16}\left(10-2\sqrt{5}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\cdot\cos P.$$

Преобразуя это выражение, приходим к уравнению

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}\cdot\cos P.$$

Откуда

$$\cos P = \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}.$$

В результате из прямоугольного треугольника OPQ следует, что

$$PQ = OP\cdot\cos P = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{12}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

Или

$$OQ^2 = OP^2 - PQ^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{3} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{12} = \frac{a^2}{48}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)^2.$$

И, значит, радиус вписанной в икосаэдр сферы оказывается равным:

$$r = OQ = \frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

3. Чтобы теперь вычислить объем икосаэдра, представим его, как сумму двадцати объемов треугольных пирамид с вершиной в точке O, высота которых совпадает с r, то есть
$$H = \frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$
При этом площадь основания
$$S = x^2\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$
Очевидно, что объем икосаэдра будет равен
$$V = 20 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right) \cdot a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{48}a^3\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Итак, ребро икосаэдра равно $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; радиус описанной сферы равен $\frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; радиус вписанной сферы есть $\frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$; радиус полувписанной сферы $\frac{a}{2}$; a объем икосаэдра составляет значение $\frac{5}{48}a^3\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Комбинационные задачи с участием правильных пирамид и конусов

Во второй части работы мы хотели бы привести несколько оригинальных комбинационных задач с правильными пирамидами и конусами. Все эти задачи объединены одной идеей: два тела комбинируются так, что высота каждого из них находится на боковом ребре другого, а вершины при этом совпадают. Таким образом, оказываются скомбинированными две правильные треугольные пирамиды, две правильные четырехугольные пирамиды, правильная треугольная пирамида с четырехугольной пирамидой или с конусом. Вполне естественным здесь является вопрос о вычислении объема общей части тел.

Задача 4. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно a, двугранный угол при боковом ребре 2α. В эту пирамиду вписана другая треугольная пирамида так, что боковое ребро её совпадает с высотой данной пирамиды, а высота пирамиды лежит на боковом ребре данной пирамиды (рис.13). Вершины пирамид совпадают. Найти объём общей части пирамид. Проанализировать решение для случая, когда обе пирамиды являются правильными тетраэдрами.*

Решение

Общая часть обеих пирамид представляет собой четырехугольную пирамиду $OLQKS$. Поскольку ее высота SQ совпадает с ее боковым ребром, то интересующий

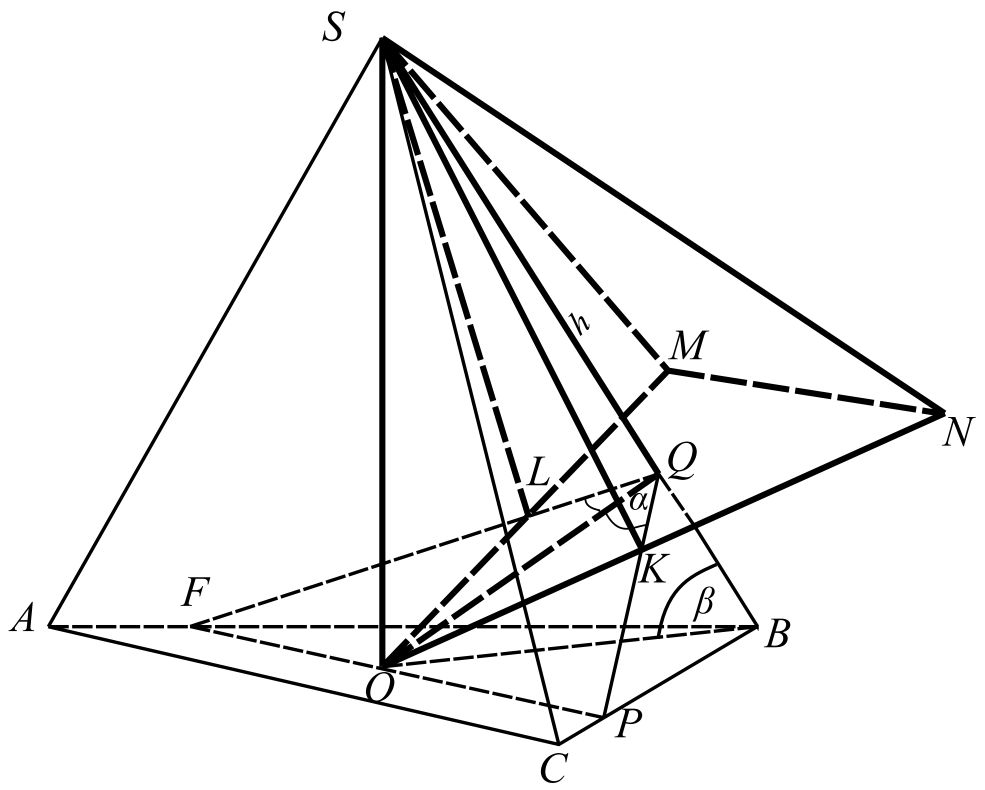

Рис. 13. Ребро основания правильной пирамиды $SABC$ равно a, а двугранный угол при боковом ребре составляет 2α.

[Figure 13. The base edge of the regular pyramid of $SABC$ being a, and the dihedron at the lateral edge is 2α.]

нас объем

$$V_{OLQKS} = \frac{1}{3} S_{OLQK} \cdot SQ \tag{9}$$

Угол наклона бокового ребра к плоскости основания обозначим через β. Тогда из рис.13 следует

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{ctg}\alpha, \cos\beta = \frac{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{\sqrt{3}\sin\alpha}, \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}. \tag{10}$$

А из треугольника OQP найдем

$$OQ = OP \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{3} \mathrm{ctg}\alpha. \tag{11}$$

В результате из треугольника SOQ найдется высота SQ пирамиды $OLQKS$:

$$SQ = OQ \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a \cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha}{3\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}. \tag{12}$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды $OLQKS$, заметим, что $S_{OLQK} = 2S_{OQK}$. Площадь треугольника OQK найдем по формуле

$$S_{OQK} = \frac{1}{2} OQ \cdot OK \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} OQ \cdot OK,$$

поскольку треугольник OMN правильный. Чтобы найти OK, воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(150^\circ - \alpha)}.$$

Применяя формулу синуса разности углов, получим:

$$OK = \frac{2OQ \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{2OQ}{\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}}.$$

Поэтому

$$S_{OQK} = \frac{1}{2}\frac{OQ^2}{\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}},$$

откуда

$$S_{OLQK} = \frac{OQ^2}{\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}} = \frac{a^2\mathrm{ctg}^2\alpha}{9\left(\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)}. \tag{13}$$

Подставляя формулы (11) и (13) в соотношение (9), находим интересующий нас объем общей части пирамид:

$$V_{OLQKS} = \frac{1}{3}S_{OLQK} \cdot SQ = \frac{a^3\mathrm{ctg}^3\alpha \cdot \cos\alpha}{81\left(\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

Теперь проанализируем полученный результат для случая, когда обе пирамиды являются правильными тетраэдрами, т.е. боковое ребро пирамиды равно ребру основания. По – прежнему считаем, что $AB = a$. Формулы (10), при этом существенно упрощаются

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \mathrm{tg}\beta = \sqrt{2}.$$

Так как $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{ctg}\alpha$, то $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$. Далее,

$$SQ = OQ \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a}{3}\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a}{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3},$$

где $OQ = \frac{a}{3}\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. В результате для площади основания пирамиды $OLQKS$ получим

$$S_{OLQK} = 2S_{OQK} = \frac{OQ^2}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}30^\circ} = \frac{2a^2}{9\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}.$$

Итак, объем общей части пирамид равен $\dfrac{a^3\mathrm{ctg}^3\alpha \cdot \cos\alpha}{81\left(\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$; объем общей части правильных тетраэдров составляет $\dfrac{4}{81}\dfrac{a^3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Задача 5. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно a, двугранный угол при боковом ребре равен 2α. В эту пирамиду вписан конус так, что его образующая совпадает с высотой пирамиды, а высота конуса лежит на боковом ребре (рис.14). Вершины их совпадают. Найти объём общей части конуса и пирамиды.*

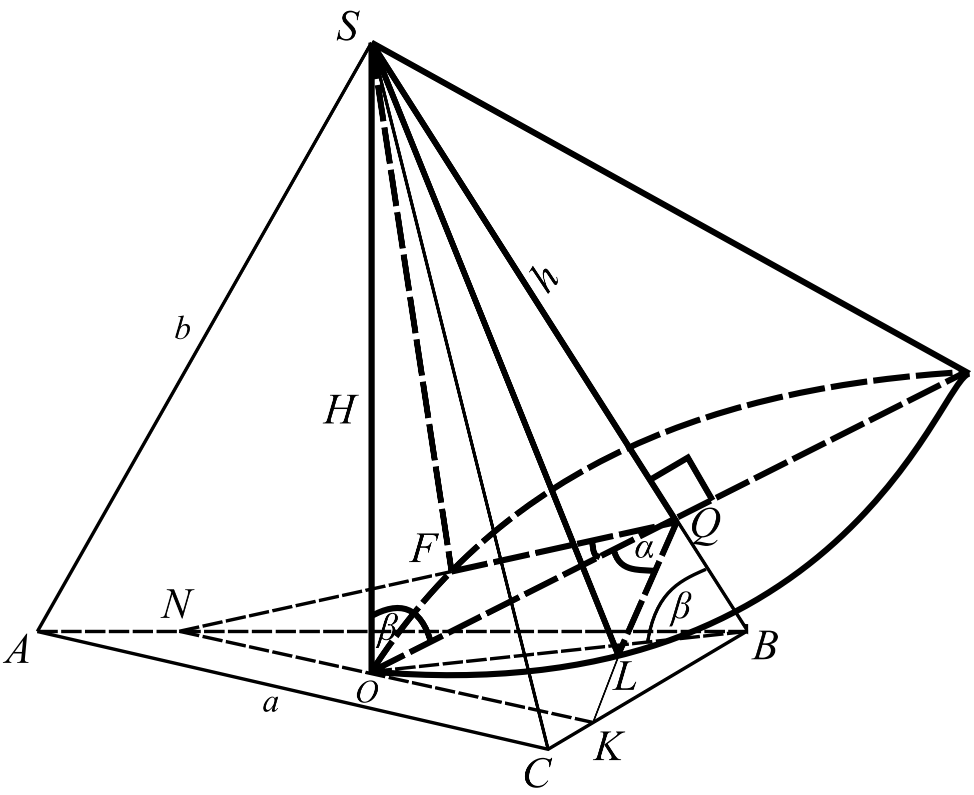

Рис. 14. Высота конуса лежит на боковом ребре пирамиды, образующая конуса совпадает с высотой пирамиды.
[Figure 14. The height of a cone lies on the lateral edge of the pyramid, and the cone generator is the same as height of the pyramid.]

Решение

Общая часть пирамиды и конуса это «пирамида» OFQLS, в основании которой лежит круговой сектор OFQL. Поэтому объем их общей части можно найти по формуле

$$V_{OFQLS} = \frac{1}{3}S_{OFQL} \cdot SQ = \frac{1}{2} \cdot (2\alpha) \cdot OQ^2 \cdot SQ = \alpha \cdot OQ^2 \cdot SQ, \tag{14}$$

где 2α - центральный угол кругового сектора. Нам остается лишь выразить OQ и SQ через сторону основания a пирамиды и двугранный угол α. Из прямоугольного треугольника OQK, в котором $OK = \frac{1}{3}a$, найдем, что

$$OQ = OK \cdot \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{3}a \cdot \mathrm{ctg}\alpha. \tag{15}$$

Из прямоугольного треугольника SOQ следует

$$h = SQ = OQ \cdot \mathrm{tg}\beta.$$

Выразим $\mathrm{tg}\beta$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Из треугольника OQB следует, что $OQ = OB \cdot \sin\beta$, а из треугольника OQK находим, что $OQ = OK \cdot \mathrm{ctg}\alpha$. Значит,

$$OB \cdot \sin\beta = OK \cdot \mathrm{ctg}\alpha$$

или

$$\sin\beta = \frac{OK\cdot \mathrm{ctg}\alpha}{OB},$$

где

$$OK = \frac{1}{3}a, OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Окончательно,

$$\sin\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}^2\alpha} = \frac{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{\sqrt{3}\sin\alpha}, \mathrm{tg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}. \qquad (16)$$

Стоит обратить внимание также и на следующий факт. Так как по смыслу $0 < \sin\beta < 1$, и поскольку

$$\sin\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{3}},$$

то должно выполняться неравенство

$$\mathrm{ctg}\alpha < \sqrt{3},$$

т.е.

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Иными словами, в правильной треугольной пирамиде угол между боковыми гранями не может быть меньше $\frac{\pi}{3}$.

Возвратившись к нашей задаче, согласно (15) и (16) находим, что высота «пирамиды» OFQLS

$$SQ = OQ\cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{1}{3}a\cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}},$$

а площадь ее основания:

$$S = \alpha\cdot OQ^2 = \alpha\cdot\left(\frac{a}{3}\mathrm{ctg}\alpha\right)^2 = \alpha\cdot\frac{a^2}{9}\mathrm{ctg}^2\alpha.$$

В результате из (14) мы приходим к формуле для объема общей части пирамиды и конуса:

$$V = \frac{1}{3}\alpha\cdot\frac{a^2}{9}\mathrm{ctg}^2\alpha\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha-1}} = \frac{\alpha\cdot a^3\mathrm{ctg}^3\alpha\cdot\cos\alpha}{82\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}.$$

Итак, объем общей части пирамиды и конуса составляет $\frac{\alpha\cdot a^3\mathrm{ctg}^3\alpha\cdot\cos\alpha}{82\sqrt{4\sin^2\alpha-1}}$.

Задача 6. *В правильную четырёхугольную пирамиду* ABCDS *вписана правильная четырёхугольная пирамида* OMNFS *так, что* SQ *высота второй пирамиды лежит на боковом ребре* SC *данной пирамиды (рис.15). Найти объём общей части пирамид, если боковое ребро пирамиды* ABCDS *равно* b, *а двугранный угол при боковом ребре равен* 2α.

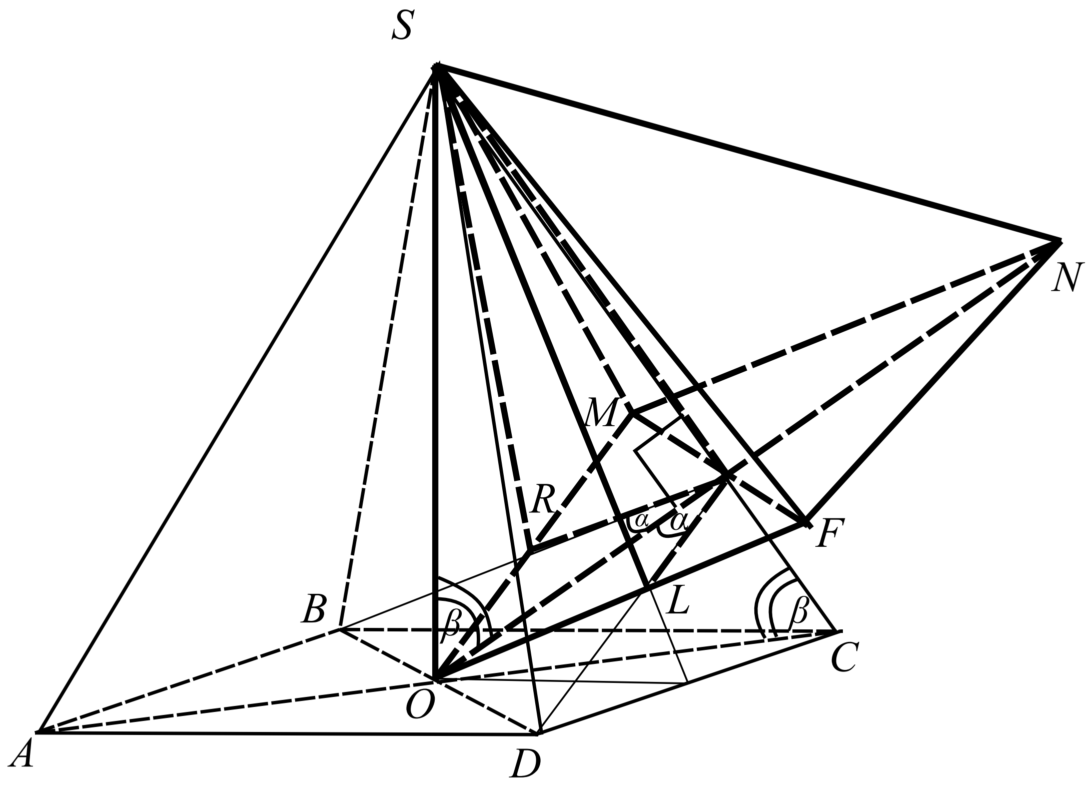

Рис. 15. Высота правильной пирамиды $SOMNF$ находится на боковом ребре правильной пирамиды $SABCD$, а ее боковое ребро – на высоте $SABCD$.
[Figure 15. The height of the regular pyramid $SOMNF$ is located on the lateral edge of the regular pyramid $SABCD$. However, its lateral edge is on the height of $SABCD$.]

Решение

Обозначим $SA = SB = SC = SD = b$ и $\widehat{BQD} = 2\alpha$. Ясно, что объем общей части пирамид выражается формулой

$$V_{ORQLS} = \frac{1}{3} S_{ORQL} \cdot SQ. \tag{17}$$

Равенства $\sin\beta = \dfrac{OQ}{OC}$ и $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{OQ}{OD}$ следуют из треугольников QOC и QOD соответственно. Отсюда получаем важное соотношение:

$$\sin\beta = \mathrm{ctg}\alpha.$$

Следовательно,

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}, \mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

Из прямоугольного треугольника SOC найдем, что

$$OC = b\cos\beta = b\sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha},$$

а из прямоугольного треугольника OQC следует равенство

$$OQ = OC\sin\beta = b\sqrt{1 - \mathrm{ctg}^2\alpha} \cdot \mathrm{ctg}\alpha.$$

Далее, из треугольника OQS находим, что

$$QS = OQ \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{b\,\mathrm{ctg}\alpha\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}\cdot\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}} = b\,\mathrm{ctg}^2\alpha. \qquad (18)$$

Ясно, что

$$S_{ORQL} = 2S_{OQL}.$$

Площадь непрямоугольного треугольника OQL найдем, используя формулу

$$S_{OQL} = \frac{1}{2}OL \cdot OQ.$$

Сторону OL вычислим, используя теорему синусов:

$$\frac{OL}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(135^\circ-\alpha)},$$

откуда следует, что

$$OL = \frac{OQ\cdot\sin\alpha}{\sin(135^\circ-\alpha)} = OQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 135^\circ\cos\alpha - \cos 135^\circ\sin\alpha} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot OQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \sqrt{2}\cdot OQ\cdot\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha+1} = \frac{OQ\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\alpha+1}.$$

Тогда

$$S_{ORQL} = 2S_{OQL} = OL\cdot OQ = \frac{OQ^2\sqrt{2}}{\mathrm{ctg}\alpha+1} = b^2\mathrm{ctg}^2\alpha\,(1-\mathrm{ctg}\alpha)\sqrt{2}. \qquad (19)$$

Если теперь подставить (18) и (19) в формулу (17), мы получим объем общей части пирамид:

$$V_{ORQLS} = \frac{\sqrt{2}}{3}b^2\mathrm{ctg}^2\alpha\,(1-\mathrm{ctg}\alpha)\,b\,\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}b^3\mathrm{ctg}^4\alpha\,(1-\mathrm{ctg}\alpha).$$

Итак, объем общей части пирамид равен $\frac{\sqrt{2}}{3}b^3\mathrm{ctg}^4\alpha\,(1-\mathrm{ctg}\alpha)$.

Задача 7. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно a, двугранный угол при боковом ребре 2α. В нее вписана правильная четырёхугольная пирамида так, что боковое ребро пирамиды совпадает с высотой H данной пирамиды, а высота h пирамиды лежит на боковом ребре данной пирамиды (рис. 16). Вершины их совпадают. Найти объём общей части пирамид.*

Решение

Общая часть пирамид это четырехугольная пирамида SQKOL, высота которой лежит на ее боковом ребре SQ. Следовательно, ее объем можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{OQKL}\cdot SQ. \qquad (20)$$

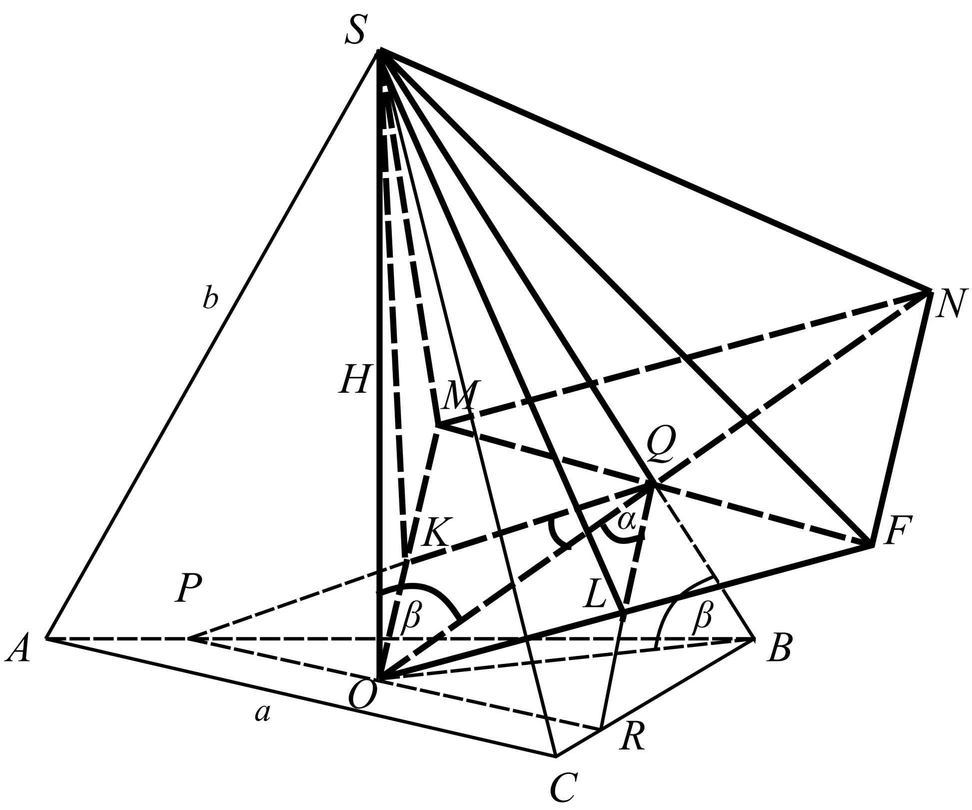

Рис. 16. Правильная треугольная пирамида $SABC$ скомбинирована с правильной четырехугольной пирамидой $SQKOL$ так, что высота каждой из них находится на боковом ребре другой.

[Figure 16. The regular triangular pyramid of $SABC$ is arranged to the regular four-angled pyramid of $SQKOL$ as the height of of each is on the lateral edge of the other.]

Из прямоугольного треугольника ROQ найдем, что:

$$OQ = OR \cdot \text{ctg}\alpha = \frac{a}{3}\text{ctg}\alpha.$$

Обозначим угол наклона бокового ребра к плоскости основания через β. Тогда из прямоугольного треугольника OBQ (прямая $SQ \perp PQR$) найдем, что $OQ = OB \cdot \sin\beta$. Получившееся равенство

$$OQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin\beta = \frac{a}{3}\text{ctg}\alpha \tag{21}$$

позволяет нам записать, что

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\text{ctg}^2\alpha}, \text{tg}\beta = \frac{\text{ctg}\alpha}{\sqrt{3 - \text{ctg}^2\alpha}}.$$

Высоту SO можно найти из прямоугольного треугольника SOQ. В самом деле, имеем для нее

$$SQ = OQ \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{a}{3} \cdot \mathrm{ctg}\alpha \cdot \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}} \tag{22}$$

Вычислим теперь площадь основания пирамиды $SQKOL$:

$$S_{OKQL} = 2S_{OQL} = OQ \cdot OL.$$

Поскольку плоская фигура $OMNF$ представляет собой квадрат, то угол $QOL = 45^\circ$. Если к треугольнику OQL применить теперь теорему синусов:

$$\frac{OL}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(135^\circ - \alpha)},$$

то из не следует, что

$$OL = \frac{OQ \cdot \sin\alpha}{\sin(135^\circ - \alpha)} = \frac{OQ \cdot \sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{OQ \cdot \sqrt{2}}{1+\mathrm{ctg}\alpha}.$$

В результате согласно (21) и (22) получим, что

$$S_{OKQL} = \frac{a^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha}{9 \cdot (1+\mathrm{ctg}\alpha)}. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в соотношение (20), мы приходим, следовательно, к интересующему нас объему общей части пирамид:

$$V = \frac{1}{3}S_{OQKL} \cdot SQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha}{9 \cdot (1+\mathrm{ctg}\alpha)} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \frac{a^3}{27} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^4\alpha}{(1+\mathrm{ctg}\alpha)\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}}.$$

Итак, объем общей части пирамид составляет $\frac{a^3}{27} \cdot \frac{\mathrm{ctg}^4\alpha}{(1+\mathrm{ctg}\alpha)\sqrt{3-\mathrm{ctg}^2\alpha}}$.

Заключение

В заключение работы стоит отметить три основных момента.

1. Приведен подробный алгоритм решения задачи о вычислении ребра октаэдра, додекаэдра и икосаэдра через сторону вписанного и описанного куба.

2. В качестве полезной справки приведены основные сведения из теории выпуклых тел: теорема Евклида, теорема Декарта, теорема Эйлера.

3. Проанализирован новый класс комбинационных задач с многогранниками, в которых два тела комбинируются так, что высота каждого из них находится на боковом ребре другого, а вершины при этом совпадают.

Список литературы

1. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. Некоторые миниатюры с кубом, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 44, № 3, С. 39–57 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57.
2. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 37, № 4, С. 216–234 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234.
3. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. II., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 39, № 2, С. 197–221 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221.
4. Веннинджер М. *Модели многогранников*, Пер. с англ. В.В. Фирсова. Под ред. и с послесл. И. М. Яглома.. М.: Мир, 1974. 236 с.
5. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике: Решение задач*, Учеб. пособие для 11 кл.. М.: Просвещение, 1991. 384 с.
6. Сканави М. И. *Сборник задач по математике для поступающих в вузы.* М.: Мир и Образование, 2013. 608 с.
7. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. *Сборник задач по элементарной математике.* М.: Физматлит, 1960. 928 с.
8. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Избранные вопросы элементарной математики*, Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1976. 638 с.
9. Литвиненко В. Н. *Сборник задач по стереометрии с методами решений.* М.: Просвещение, 1998. 255 с.
10. Литвиненко В. Н. *Решение типовых задач по геометрии.* М.: Просвещение, 1999. 280 с.
11. Прасолов В. В. *Задачи по стереометрии.* М.: МЦНМО, 2010. 352 с.
12. Смирнов В. А. *Геометрия. Стереометрия*, Пособие для подготовки к ЕГЭ. М.: МЦНМО, 2009. 273 с.
13. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Стереометрия. Геометрия в пространстве*, Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов.. Висагинас: Alfa, 1998. 576 с.
14. Прохоров Ю. В. *Математический энциклопедический словарь.* М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.
15. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. *Энциклопедия элементарной математики*, Геометрия, Т. 5. М.: Наука, 1966. 624 с.
16. Кокстер Г. С. М. *Введение в геометрию.* М.: Наука, 1988. 847 с.
17. Люстерник Л. А. *Выпуклые фигуры и многогранники.* Москва: ГИТТЛ, 1956. 212 с.
18. Понарин Я. П. *Элементарная геометрия*, Стереометрия, преобразования пространства, Т. 2. Москва: МЦНМО, 2006. 256 с.

Информация об авторах

Федоров Борис Павлович – преподаватель кафедры математики (1967 – 2000) Государственного гуманитарно - технологического университета, г. Орехово – Зуево, Россия.

Богданова Софья Борисовна✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0001-8503-1794.

Гладков Сергей Октябринович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0002-2755-9133.

References

[1] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. Some Miniatures With a Cube. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2023, vol. 44, no. 3, pp. 39–57. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57 (In Russian)

[2] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 37, no. 4, pp. 216–234. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234 (In Russian)

[3] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 2. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, vol. 39, no. 2, pp. 197–221. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221 (In Russian)

[4] Wenninger M. Polyhedron models. Cambridge. Cambridge University Press, 1971.

[5] Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyy kurs po matematike: Resheniye zadach [Optional course in mathematics: Problem solving]. Moscow, Prosveshcheniye, 1991, 384 pp. (In Russian)

[6] Ckanavi M. I. Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh v vuzy [Collection of problems in mathematics for those entering universities]. Moscow, Mir i Obrazovaniye, 2013, 608 pp. (In Russian)

[7] Antonov N. P., Vygodskiy M. YA., Nikitin V. V., Sankin A. I. Sbornik zadach po elementarnoy matematike [Collection of problems in elementary mathematics]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 928 pp. (In Russian)

[8] Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. X. Posobiye po matematike dlya postupayushchikh v vuzy (izbrannyye voprosy elementarnoy matematiki) [A manual on mathematics for those entering universities (selected questions of elementary mathematics)]. Moscow, Nauka, 1976, 638 pp. (In Russian)

[9] Litvinenko V. N., Sbornik zadach po stereometrii s metodami resheniy [Collection of problems on stereometry with methods of solutions]. Moscow, Enlightenment, 1998, 255 pp. (In Russian)

[10] Litvinenko V. N., Resheniye tipovykh zadach po geometrii [Solving typical problems in geometry]. Moscow, Enlightenment, 1999 (In Russian)

[11] Prasolov V. V., Zadachi po stereometrii [Problems in stereometry]. Moscow, MTsNMO, 2010, 352 pp. (In Russian)

[12] Smirnov V. A. Geometriya. Stereometriya. Posobiye dlya podgotovki k YEGE. [Geometry. Stereometry. A guide for preparing for the Unified State Exam]. Moscow, MTsNMO, 2009, 273 pp. (In Russian)

[13] Aleksandrov A. D., Verner A. L., Ryzhik V. I. Stereometriya. Geometriya v prostranstve: Ucheb. posobiye dlya uch. st. kl. i abituriyentov. [Stereometry. Geometry in space: Textbook. manual for students Art. class and applicants]. Visaginas, Alfa, 1998, 576 pp. (In Russian)

[14] Prokhorov Yu V. Matematicheskiy entsiklopedicheskiy slovar' [Mathematical encyclopedic dictionary.]. Moscow, Soviet Encyclopedia, 1988, 847 pp. (In Russian)

[15] Aleksandrov P. S., Markushevich A. I., Khinchin A. Ya. Entsiklopediya elementarnoy matematiki. vol. 5. Geometriya [Encyclopedia of elementary mathematics]. Moscow, Nauka, 1966, 624 pp. (In Russian)

[16] Coxeter H S M. Introduction to geometry. New York - London, John Wiley and Sons.Inc, 1961.

[17] Lyusternik L. A. Vypuklyye figury i mnogogranniki [Convex figures and polyhedra.]. Moscow, State publishing house of technical and theoretical literature, 1956, 212 pp. (In Russian)

[18] Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya. vol. 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva [Elementary geometry: In 2 volumes - Volume 2: Stereometry, space transformations.]. Moscow, MCNMO, 2006, 256 pp. (In Russian)

Information about authors

Fedorov Boris Pavlovich (1931-2003) – Lecturer at the Department of Mathematics (1967 to 2000) at the State Humanitarian and Technological University, Orekhovo-Zuevo, Russia.

Bogdanova Sofya Borisovna – Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0001-8503-1794.

Gladkov Sergey Oktyabrinovich – D.Sc. (Phys. & Math.), Professor, Associate Professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0002-2755-9133.