



## Хаотические режимы в маломодовой модели $\alpha\Omega$ -динамо с эредитарным подавлением $\alpha$ -эффекта энергией поля

О. В. Шереметьева\*

Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

**Аннотация.** В статье исследуются условия, при которых возможно моделирование хаотического режима магнитного поля в крупномасштабной модели  $\alpha\Omega$ -динамо в маломодовом приближении. Интенсивность  $\alpha$ - и  $\Omega$ -генераторов регулируется силой Лоренца. Подавление  $\alpha$ -эффекта определяется воздействием силы Лоренца через процесс с эредитарными свойствами (конечной «памятью»). Характер воздействия процесса определяется знакопеременным ядром с варьируемыми частотой затухания и коэффициентом затухания. Воздействие крупномасштабного и турбулентного генераторов на магнитогиродинамическую систему заложено в управляющих параметрах — числе Рейнольдса и мере  $\alpha$ -эффекта, соответственно. В рамках данной работы решения магнитогиродинамической системы исследованы на устойчивость по Ляпунову в окрестности точки покоя в зависимости от заданных значений входящих параметров. По результатам численного эксперимента определены ограничения характеристики устойчивости и параметров системы, при которых возможно моделирование хаотического режима магнитного поля.

*Ключевые слова:*  $\alpha\Omega$ -динамо, эредитарность, подавление  $\alpha$ -эффекта, маломодовая модель, магнитное поле, хаотический режим, инверсии.

Получение: 26.11.2023; Исправление: 12.12.2023; Принятие: 13.12.2023; Публикация онлайн: 14.12.2023

---

Для цитирования. Шереметьева О. В. Хаотические режимы в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо с эредитарным подавлением  $\alpha$ -эффекта энергией поля // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 45. № 4. С. 52-66. EDN: WJOTLU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-45-4-52-66>.

**Финансирование.** Работа выполнена в рамках реализации Государственного задания (2021–2023 гг.), регистрационный номер АААА-А21-121011290003-0.

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

\*Корреспонденция: ✉ Е-mail: [sheremeteva@ikir.ru](mailto:sheremeteva@ikir.ru)

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Шереметьева О. В., 2023

© ИКИР ДВО РАН, 2023 (оригинал-макет, дизайн, составление)





## Chaotic Modes in the Low-Mode Model $\alpha\Omega$ -Dynamo with Hereditary $\alpha$ -Quenching by the Field Energy

*O. V. Sheremetyeva\**

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 684034 Kamchatka region, Elizovskiy district, Paratunka, Mirnaya str., 7, Russia

**Abstract.** This article considers the conditions under which it is possible to simulate the chaotic regime of the magnetic field in a large-scale model  $\alpha\Omega$ -dynamo in a low-mode approximation. The intensity of the  $\alpha$ - and  $\Omega$ -generators is regulated by the Lorentz force. The quenching of the  $\alpha$ -effect is determined by the action of the Lorentz force through a process with hereditary properties (finite «memory»). The nature of the impact of the process is determined by an alternating kernel with variable damping frequency and damping coefficient. The effect of large-scale and turbulent generators on the magnetohydrodynamic system is embedded in the control parameters — the Reynolds number and the measure of the  $\alpha$ -effect, respectively. Within the framework of this work, the solutions of the magnetohydrodynamic system are investigated for Lyapunov stability in the vicinity of the rest point, depending on the set values of the input parameters. Based on the results of the numerical experiment, the limitations of the stability characteristic and parameters of the system are determined, under which it is possible to simulate the chaotic regime of the magnetic field.

*Key words:*  $\alpha\Omega$ -dynamo, hereditary,  $\alpha$ -quenching, low-mode dynamo model, magnetic field, chaotic regime, reversals.


Received: 26.11.2023; Revised: 12.12.2023; Accepted: 13.12.2023; First online: 14.12.2023

**For citation.** Sheremetyeva O. V. Chaotic modes in the low-mode model  $\alpha\Omega$ -dynamo with hereditary  $\alpha$ -quenching by the field energy. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, 45: 4, 52-66. EDN: WJOTLU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-45-4-52-66>.

**Funding.** The work was carried out within the framework of realization of the State task AAAA-A21-121011290003-0.

**Competing interests.** There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

\*Correspondence:  E-mail: [sheremetyeva@ikir.ru](mailto:sheremetyeva@ikir.ru)

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Sheremetyeva O. V., 2023

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2023 (original layout, design, compilation)



## Введение

Данная статья является продолжением цикла работ ИКИР ДВО РАН по изучению маломодовой модели динамо земного типа [1–14]. С полным описанием модели, в рамках которой проводится исследование, можно ознакомиться в работах [9, 13]. Здесь приведём лишь основные аспекты и необходимые факты. В рамках исследования используется модель  $\alpha\Omega$ -динамо, в которой генерация магнитного поля и поля скорости определяется работой крупномасштабного ( $\Omega$ ) и турбулентного ( $\alpha$ ) генераторов. Интенсивности генераторов зависят от силы Лоренца.  $\alpha$ -эффект обеспечивается мелкомасштабной турбулентностью, поэтому изменение его интенсивности определяется силой Лоренца, которая включена в нашу модель на мелком масштабе через процесс, зависящий от времени и энергии магнитного поля. Кроме того полагаем, что воздействие силы Лоренца на изменение интенсивности  $\alpha$ -эффекта во времени носит накопительный характер, а значит процесс обладает свойством эрмитарности. Сила воздействия процесса  $Z(t)$  изменяется во времени под влиянием силы Архимеда с массовой плотностью  $f_{out}$ , а также флуктуаций, которые возникают в результате синхронизации исключенных из рассмотрения в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо высших мод скорости и магнитного поля [15]. Исходя из этих предположений, процесс  $Z(t)$  определяем функционалом [9–13]

$$Z(t) = \int_0^t J(t-\tau)Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau))d\tau = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} \cos(a(t-\tau))B^2(\tau)d\tau. \quad (1)$$

Таким образом, процесс  $Z(t)$  в момент времени  $t$  зависит от предыдущих значений поля  $\mathbf{B}$ , т.е. обладает «памятью», что реализуется через функцию ядра  $J(t-\tau)$ . Кроме того, выбор ядра, зависящего от аргумента  $(t-\tau)$ , определяет инвариантность функционала относительно времени.

Приведём также перемасштабированную и безразмерную магнитогидродинамическую (МГД) систему [9], необходимую для понимания логики исследования, изложенного в статье,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= P_m \Delta \mathbf{v} - \nabla P - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + f_{out} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= Re_m [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] + (R_\alpha - Z(t)) [\nabla \times \alpha(r, \theta) \mathbf{B}] + \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{v} \left( \frac{\mathbf{r}_1}{L} \right) &= \mathbf{v}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2)$$

где линейный размер области  $L = r_2$  [м] (радиус внешнего ядра),  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  безразмерные поля скорости и магнитной индукции соответственно,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_2/L$  – единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси вращения Земли, управляющие параметры системы: магнитное число Рейнольдса  $Re_m$  и мера  $\alpha$ -эффекта  $R_\alpha$ , изменяются в диапазонах  $Re_m \in [10^{-1}, 10^3]$  и  $R_\alpha \in [10^{-1}, 10^2]$ ,

магнитное число Прандтля  $R_m = 5$  и число Экмана  $E = 10^7$  принимают значения, соответствующие земному динамо [5, 16], время диссипации магнитного поля  $L^2/\nu_m$  [с], порядок которого составляет  $10^4$  лет.

Целью данной работы является определение допустимых значений параметров модели, позволяющих получить хаотический режим, в том числе на фоне слабо изменяющегося поля скорости, характерный для земного типа.

## Математическая модель

Как известно, источником крупномасштабного дифференциального вращения вязкой жидкости является турбулентность [17]. В рассматриваемой модели используется один слой дифференциального вращения вязкой жидкости. При наличии крупномасштабного тороидального поля, дрейф Кориолиса приводит к появлению крупномасштабного полоидального поля, которое также приводит к крупномасштабной конвекции. Продолжая процесс дальше, мы получаем семейство тороидальных и полоидальных мод. Тогда скорость может быть представлена одномодовым приближением с помощью мод свободных малых колебаний вязкой вращающейся жидкости (решения задачи Пуанкаре), предложенным в работах [3, 5]. Этот выбор объясняется свойством мод Пуанкаре сохранять информацию о вращении, в связи с тем, что процедура Галеркина в случае одномодовой аппроксимации удаляет из МГД-системы член, содержащий силу Кориолиса.

Однако для случая вязкой жидкости в сферической оболочке точные решения задачи Пуанкаре неизвестны [18]. Но в этом случае, мода Пуанкаре может быть аппроксимирована линейной комбинацией тороидальных  $\mathbf{v}_{k,n,m}^T(r, \theta, \phi)$  и полоидальных  $\mathbf{v}_{k,n,m}^P(r, \theta, \phi)$  собственных мод свободных колебаний невращающейся жидкости, поскольку эти моды образуют полную систему. Индексы  $k$ ,  $n$ ,  $m$  соответствуют дискретизации спектра колебаний в радиальном, широтном и меридианном направлениях соответственно [1, 2]. Индекс  $k$  равен числу конвекционных слоев в радиальном направлении. В осесимметричном случае нашей модели индекс  $m = 0$ .

Выбор мод  $\mathbf{v}_{k,n,m}^T$  и  $\mathbf{v}_{k,n,m}^P$  определяется выполнением следующих условий: во-первых, такие моды генерируют инвариантное подпространство оператора задачи Пуанкаре, т.к. любая такая мода за счет вращения порождает остальные по цепочке [5, 6], и во-вторых, это подпространство содержит моду  $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$ , ответственную за дифференциальное вращение. Таким образом, в этой модели предполагается, что в первом приближении дифференциальное вращение описывается модой  $\mathbf{v}_{0,1,0}^T$  из инвариантного подпространства

$$H_0^T = \{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}, k_i = 0, 1, 2, \dots$$

Его кориолисово смещение приводит к появлению ближайшей полоидальной моды  $\mathbf{v}_{0,2,0}^P$  из того же инвариантного подпространства. Далее порождается тороидальная мода  $\mathbf{v}_{0,3,0}^T$ . Затем мы увеличиваем значения второго индекса  $n$

еще на единицу, чтобы окружить полоидальную моду  $\mathbf{v}_{0,2,0}^P$  с двух сторон. Таким образом, из того же подпространства получаем ещё две ближайшие тороидальные моды  $\mathbf{v}_{1,1,0}^T$  и  $\mathbf{v}_{1,3,0}^T$ . Схема расчета таких аппроксимаций описана в [5]. Комбинация полученных режимов дает грубое приближение моды Пуанкаре  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{u}(t)\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{u}(t)(\alpha_1\mathbf{v}_{0,1,0}^T + \alpha_2\mathbf{v}_{0,2,0}^P + \alpha_3\mathbf{v}_{0,3,0}^T + \alpha_{11}\mathbf{v}_{1,1,0}^T + \alpha_{13}\mathbf{v}_{1,3,0}^T). \end{aligned} \quad (3)$$

В данном разложении предполагается нормированность моды Пуанкаре

$$|\mathbf{v}_0(\mathbf{r})| = 1, \quad (4)$$

и независимость мод поля скорости от времени,  $\mathbf{u}(t)$  – амплитуда поля скорости. В записи коэффициентов  $\alpha_i$  используются соответствующие ненулевые нижние индексы собственных мод. Коэффициенты  $\alpha_i$  (3) получаем в результате решения задачи Пуанкаре о свободных малых колебаниях вязкой вращающейся жидкости [3, 5] для обезразмеренного уравнения Навье-Стокса (2),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= P_m \Delta \mathbf{v} - \nabla P - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \\ \mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{L}\right) &= \mathbf{v}(\mathbf{e}_2) = 0, \end{aligned}$$

приняв  $\mathbf{v} = e^{-\lambda t} \mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  и  $P = e^{-\lambda t} p(\mathbf{r})$ :

$$-\lambda \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = P_m \Delta \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_0(\mathbf{r})). \quad (5)$$

Как было указано выше, точные решения такой задачи в настоящее время не известны, поэтому используем простую аппроксимацию решений задачи (5), основанную на хорошо известных модах свободных колебаний невращающейся оболочки (3). Подставляя разложение моды скорости  $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$  из (3) в уравнение (5) и применяя метод Галёркина, получаем систему уравнений

$$(\lambda - P_m \lambda_s) \alpha_s - E^{-1} P_m \sum_j \alpha_j P_{sj} = 0, \quad (6)$$

где значения коэффициентов  $P_{sj}$  и  $\lambda_s$  вычислены с помощью [19, 20], значения  $s$  и  $j$  соответствуют (3). Для каждого нетривиального действительного решения  $\lambda$  характеристического уравнения системы (6) вычисляется значение  $\alpha_2$ , исходя из условия  $\sum_j \alpha_j^2 = 1$  из (4). В дальнейшем используются решения  $\alpha_s$ , полученные при наименьшем действительном значении собственного числа  $\lambda$  [6]. Значения всех коэффициентов приведены в статье [13].

Аналогичная схема используется для представления магнитного поля [1, 21]. Рассматриваем собственные моды свободных затухающих колебаний (моды омической диссипации)  $\mathbf{B}_{k,n,m}^T$  и  $\mathbf{B}_{k,n,m}^P$ . Необходимое количество мод для возникновения инверсий в модели  $\alpha\Omega$ -динамо было определено в работах [3, 6]

по схеме, предложенной авторами исследования [22]. При наличии дипольной составляющей  $\mathbf{V}_{0,1,0}^P(\mathbf{r})$  магнитного поля дифференциальное вращение порождает другие составляющие магнитного поля. В зависимости от способа задания радиального типа  $\alpha$ -эффекта (в данном исследовании принято  $\alpha(r, \theta) = \alpha(r) \cos(\theta)$ , где  $\alpha(r) = r$ ) и выбора варианта разложения моды Пуанкаре появление изменений осциллирующего типа в магнитном поле оказалось возможным, когда присутствуют три моды омической диссипации: дипольная полоидальная  $\mathbf{V}_{0,1,0}^P(\mathbf{r})$ , тороидальная  $\mathbf{V}_{0,2,0}^T(\mathbf{r})$  и полоидальная  $\mathbf{V}_{0,3,0}^P(\mathbf{r})$  [5, 6]. Если разложение для магнитного поля включает меньшее количество собственных мод свободных затухающих колебаний, то инверсии либо отсутствуют, либо магнитное поле быстро затухает. Таким образом, для описания магнитного поля с инверсиями в модели  $\alpha\Omega$ -динамо первоначально можно ограничиться этим минимальным количеством низших собственных мод  $\mathbf{V}_{0,1,0}^P$ ,  $\mathbf{V}_{0,2,0}^T$ ,  $\mathbf{V}_{0,3,0}^P$ , достаточных для получения осциллирующего динамо [5],

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2^T(t)\mathbf{V}_{0,2,0}^T(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_1^P(t)\mathbf{V}_{0,1,0}^P(\mathbf{r}) + \mathbf{V}_3^P(t)\mathbf{V}_{0,3,0}^P(\mathbf{r}). \quad (7)$$

Также, как и в случае поля скорости полагаем независимость мод омической диссипации от времени и в записи коэффициентов (т.е. амплитуд собственных мод) будем использовать только значащие нижние индексы.

Используя разложения (3) и (7), задание эредитарного процесса  $Z(t)$  функционалом (1) совместно с МГД-системой (2), методом Галеркина [23] получаем уравнения нашей модели [10–13]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial t} &= -P_m \mathbf{u}(t) \sum_s \alpha_s^2 \lambda_s + f_{out} + \sum_{s,i,j} \alpha_s L_{sij} B_j(t) B_i(t), \\ \frac{\partial B_i(t)}{\partial t} &= Re_m \mathbf{u}(t) \sum_{s,j} \alpha_s W_{isj} B_j(t) - \mu_i B_i(t) + (R_\alpha - Z) \sum_j W_{ij}^\alpha B_j(t), \\ \frac{\partial Z(t)}{\partial t} &= \sum_j B_j^2(t) - bZ(t) - aZ_s(t), \quad \frac{\partial Z_s(t)}{\partial t} = aZ(t) - bZ_s(t), \\ i, j &\in \{1, 2, 3\}, \quad s \in \{1, 2, 3, 11, 13\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\lambda_s$  – собственное значение моды (3) свободных затухающих колебаний вязкой невращающейся жидкости,  $\mu_i$  – коэффициент вязкой диссипации, коэффициенты  $L_{sij}$ ,  $W_{isj}$ ,  $W_{ij}^\alpha$  – объемные интегралы от рассматриваемых полей [19, 20]. Значения всех коэффициентов приведены в [13]. В численной реализации модели (8) принято значение шага  $h$  на два порядка меньше наименьшего из значений времён затухания полей скорости ( $1/\lambda_s$ ) и магнитного ( $1/\mu_i$ ). Выбор начальных условий обеспечивает выход системы (8) из точки покоя в начальный момент времени  $t_0 = 0$  и дальнейшую взаимную генерацию мод магнитного поля и поля скорости. Затухающий эффект в поле скорости компенсируется воздействием силы Архимеда, поэтому в численной реализации значение массовой плотности силы Архимеда  $f_{out}$  принято равным коэффициенту при  $\mathbf{u}(t)$  [9]. Численная модель рассматривается на плоскости управляющих параметров с шагом дискретизации равным пяти.

## Исследование условий генерации поля по линейному приближению

Исследование на устойчивость нулевой точки покоя системы дифференциальных уравнений (8) проводим согласно [24], используя линейное приближение [13]

$$\frac{\partial B_i(t)}{\partial t} = \operatorname{Re}_m u(t) \sum_{s,j} \alpha_s W_{isj} B_j(t) - \mu_i B_i(t) + R_\alpha \sum_j W_{ij}^\alpha B_j(t), \quad (9)$$

$i, j \in \{1, 2, 3\}, s \in \{1, 2, 3, 11, 13\}$ .

Запишем систему (9) в более простом виде

$$\frac{\partial B_i(t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 m_{ij} B_j(t), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (10)$$

Обозначим  $M = (m_{ij})$  матрицу системы (10). Динамика решений системы (9) определяется расположением собственных значений её матрицы  $M$  на комплексной плоскости [24, 25]. Если все корни  $k_i$  характеристического уравнения

$$\det(M - kE) = 0 \quad (11)$$

удовлетворяют условию  $\operatorname{Re}(k_i) < 0$ , то нулевая точка покоя (тривиальное решение систем (9) и (8)) асимптотически устойчива. Если же хотя бы один корень  $k_i$  имеет положительную действительную часть ( $\operatorname{Re}(k_i) > 0$ ), точка покоя неустойчива [24]. Если  $\operatorname{Im}(k_i) \neq 0$ , то решение осциллирующее. В противном случае, осцилляций нет.

Определение отрицательности всех действительных частей собственных значений  $k_i$  производилось на основании теоремы Гурвица [24]. Для кубического характеристического уравнения (11) с действительными коэффициентами

$$k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11} + m_{22} + m_{33}) = -\operatorname{tr}(M), \\ a_2 &= m_{11}m_{22} + m_{22}m_{33} + m_{11}m_{33} - m_{31}m_{13} - m_{32}m_{23} - m_{21}m_{12}, \\ a_3 &= -\det(M). \end{aligned}$$

условия Гурвица [24] сводятся к системе неравенств

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0. \quad (13)$$

Таким образом, точка покоя устойчива при выполнении условий (13) и неустойчива в остальных случаях.

Определим условия для осциллирующего решения. Преобразуем характеристическое уравнение (12) с помощью подстановки  $k = x - \frac{a_1}{3}$  [25] к приведённому виду

$$x^3 + px + q = 0, \quad (14)$$

где

$$p = a_2 - \frac{1}{3}(a_1)^2, \quad q = \frac{2}{27}(a_1)^3 - \frac{1}{3}a_1a_2 + a_3,$$

$$D = -4p^3 - 27q^2. \quad (15)$$

Если  $D < 0$ , то решения уравнения (14) комплексно-сопряжённые, а в остальных случаях – действительные. Следовательно, условием осциллирующего решения системы (9), когда  $\text{Im}(k_i) \neq 0$ , является отрицательность дискриминанта (15).

Обобщая вышеизложенное, получаем четыре группы решений системы (9) в окрестности точки покоя (рис.1):

1. Условия Гурвица (13) выполнены, тогда решение устойчиво, т. е. магнитное поле затухает с осцилляциями ( $D < 0$ ) или без осцилляций ( $D \geq 0$ ).
2. Условия Гурвица (13) не выполнены, следовательно решение неустойчиво, т. е. генерируется незатухающее магнитное поле с осцилляциями ( $D < 0$ ) или без осцилляций ( $D \geq 0$ ).

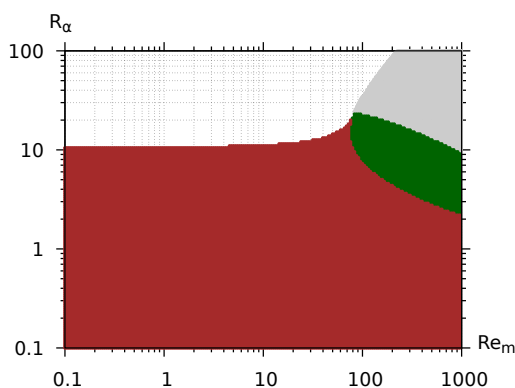


Рис. 1. Распределение решений системы (9) на фазовой плоскости управляющих параметров  $Re_m$  и  $R_\alpha$ : красная – устойчивые без осцилляций, зелёная – устойчивые с осцилляциями, белая – неустойчивые без осцилляций, серая – неустойчивые с осцилляциями [13].

[Figure 1. Distribution of solutions of the system (9) on the phase plane of the control parameters  $Re_m$  and  $R_\alpha$ : red – stable without oscillations, green – stable with oscillations, white – unstable without oscillations, gray – unstable with oscillations [13].]

В статье [13] исследовано решение системы (9) для значений управляющих параметров в выбранных границах их изменения в логарифмическом масштабе с шагом равным 0.05 и при условии, что значение амплитуды скорости  $u(t) = 1$  (рис.1). Полагая на каждом шаге численной схемы постоянными значения  $u(t)$ ,  $Z(t)$ ,  $Re_m$ ,  $R_\alpha$ , вышеописанный алгоритм определения устойчивости решения применили и к исходной системе (8) (количество шагов составляет объём полученной выборки – 1584620 значений). Вывод о неустойчивости решения системы в окрестности точки покоя делали на основании критерия: относительная частота появления устойчивого решения в выборке  $\omega < 0.5$ . Это исследование



показало значительные изменения в конфигурациях областей, ранее полученных для системы (9) [13]. Появление хаотического режима в результате подавления  $\alpha$ -эффекта и расходимости магнитного поля возможно в области неустойчивых осциллирующих решений системы (8) (рис.1). Таким образом, мы получаем первичные ограничения на значения управляющих параметров  $Re_m \geq 100$  и  $R_\alpha \geq 10$ . Однако в этой области помимо хаотического моделировались и другие режимы магнитного поля, сопровождающиеся осцилляциями (регулярный режим, динамо-всплеск, васцилляция, расходимость магнитного поля). Поэтому для сужения области, в которой возможно смоделировать хаотический режим, проведено дополнительное разбиение интервала значений  $\omega$ . А именно, рассматривали только интервал  $\omega \in [0, 0.5)$ , когда решение неустойчиво, и ввели следующее разбиение:  $\omega = 0$ ,  $\omega \in (0, 0.25]$  и  $\omega \in (0.25, 0.5)$ . Результаты численного расчёта характеристики устойчивости  $\omega$  системы (8) показали, что характеристика  $\omega = 0$  для осциллирующего решения при заданных ограничениях управляющих параметров отсутствует. Таким образом, для исследования осталось только два случая из трёх. На рисунке 1 серая область соответствует случаю  $\omega \in (0, 0.25]$  и тёмно-серая – случаю  $\omega \in (0.25, 0.5)$ . Воздействие процесса  $Z(t)$  привело к изменениям (рис.1) в области неустойчивых решений с осцилляциями (рис.2).

Варьирование значений параметров  $a$  и  $b$  незначительно влияет на изменение контуров области с характеристикой  $\omega \in (0, 0.25]$  (серая область на рис.1). В тёмно-серой области (рис.2), где характеристика устойчивости  $\omega \in (0.25, 0.5)$ , изменения значительны в зависимости от значений  $a$  и  $b$ . Увеличение значения параметра  $a$  до единицы уменьшает область (рис.2а,б). Дальнейшее увеличение значений  $a$  имеет обратную тенденцию (рис.2б,в).

Исследуем смоделированные в рассматриваемых областях режимы магнитного поля. Классификация режима как хаотического основана на алгоритме Бенеттина [26, 27], где критерием хаоса является положительный знак вычисленных значений показателей Ляпунова.

В области с характеристикой  $\omega \in (0, 0.25]$  получено только расходящееся магнитное поле. Присутствует следующая закономерность: увеличение значения коэффициента затухания  $b$  увеличивает область устойчивых решений МГД-системы, а увеличение значения частоты  $a$  уменьшает (рис.1). Наличие такой закономерности приводит к увеличению области генерации неограниченно возрастающего магнитного поля при возрастании параметра  $a$  по сравнению с результатами для показательного ядра с таким же значением коэффициента затухания  $b$ . В области с характеристикой устойчивости  $\omega \in (0.25, 0.5)$  для функции ядра с параметрами  $a = b = 0.1$  получены режимы неограниченного увеличения магнитного поля (расходимость) и динамо-всплеск. Увеличение значений параметра  $a$  до единицы приводит к появлению либо хаотического режима, который постепенно переходит в регулярный режим, с незначительными осцилляциями в поле скорости, либо хаотического режима с осцилляциями большой амплитуды [13]. Дальнейшее увеличение значений  $a$  приводит лишь

к увеличению амплитуды осцилляций в поле скорости. Увеличение значений параметра  $b$  добавляет при  $b > 5$  хаотический режим с незначительными осцилляциями в поле скорости. Таким образом, можно сделать вывод о подавлении расходимости магнитного поля процессом  $Z(t)$  в области неустойчивых решений с осцилляциями при условии, что характеристика устойчивости  $\omega \in (0.25, 0.5)$  и значения  $R_\alpha \leq 70$ .

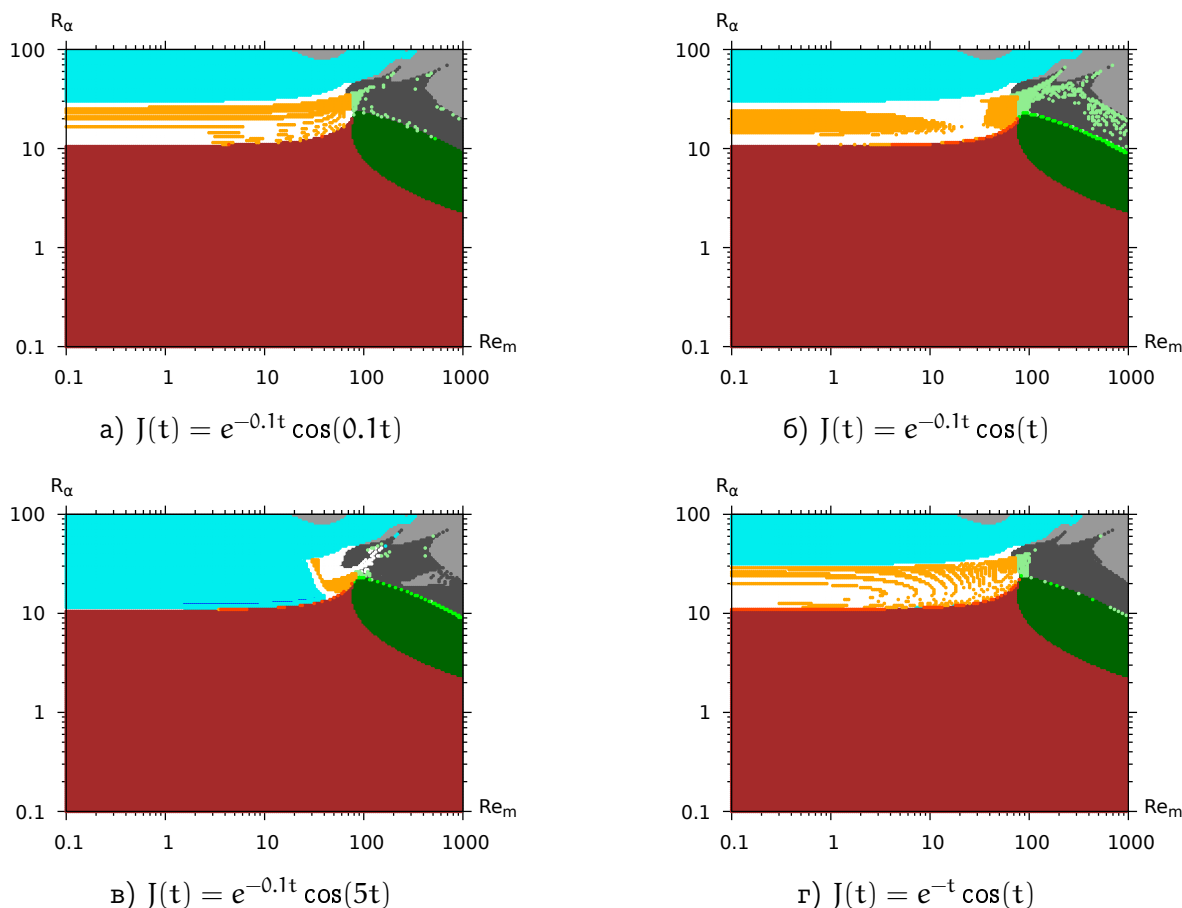


Рис. 2. Распределение решений системы (8) на основании критерия устойчивости по Ляпунову на фазовой плоскости управляющих параметров  $Re_m$  и  $R_\alpha$  (в двойном логарифмическом масштабе). Области неустойчивых решений: 1) с осцилляциями: серая  $w \in (0, 0.25]$ , тёмно-серая  $w \in (0.25, 0.5)$ , 2) без осцилляций: синяя  $w = 0$ , голубая  $w \in (0, 0.25]$ , белая  $w \in (0.25, 0.5)$ . Области устойчивых решений: 3) без осцилляций: тёмно-красная  $w = 1$ , красная  $w \in [0.75, 1)$ , оранжевая  $w \in [0.5, 0.75)$ , 4) с осцилляциями: тёмно-зелёная  $w = 1$ , зелёная  $w \in [0.75, 1)$ , светло-зелёная  $w \in [0.5, 0.75)$ .

[Figure 1. Distribution of solutions of the system (8) based on the Lyapunov stability criterion on the phase plane of parameters  $Re_m$  and  $R_\alpha$  (on a double logarithmic scale). Regions of unstable solutions: 1) with oscillations: light-gray  $w = 0$ , gray  $w \in (0, 0.25]$ , dark-gray  $w \in (0.25, 0.5)$ , 2) without oscillations: blue  $w = 0$ , light-blue  $w \in (0, 0.25]$ , white  $w \in (0.25, 0.5)$ . Regions of stable solutions: 3) without oscillations: dark-red  $w = 1$ , red  $w \in [0.75, 1)$ , orange  $w \in [0.5, 0.75)$ , 4) with oscillations: dark-green  $w = 1$ , green  $w \in [0.75, 1)$ , light-green  $w \in [0.5, 0.75)$ .]

## Результаты и обсуждение

Подавление интенсивности  $\alpha$ -эффекта посредством воздействия силы Лоренца, введённой в МГД-систему с помощью процесса  $Z(t)$  (1), позволило получить области с хаотическим режимом [10–13] по сравнению с результатами для показательной функции  $J(t) = e^{-bt}$  [9]. Хаотический режим всегда сопровождается инверсиями. Области с хаотическим режимом возникают либо на границе с областью неограниченного роста магнитного поля, либо при переходе из одной области в другую [11–13]. Использование характеристики устойчивости системы  $\omega$  [13] дало возможность выделить в области неустойчивых решений с осцилляциями подобласть  $\omega \in (0.25, 0.5)$  вероятного возникновения хаотического режима.

В результате варьирования параметров  $a$  и  $b$  в полученной подобласти был смоделирован хаотический режим магнитного поля с незначительными изменениями в поле скорости при значениях  $Re_m \leq 200$ . Отметим, что на вышеуказанном интервале значений  $Re_m$  в ряде случаев первоначально хаотическое поведение магнитного поля через некоторый промежуток времени сменялось регулярным. Но при дальнейшем увеличении воздействия крупномасштабного генератора ( $Re_m > 200$ ) режим постепенно переходит в хаотический, а затем магнитное поле неограниченно возрастает [13]. Увеличение значений любого из управляющих параметров приводит к постепенному увеличению осцилляций как в поле скорости, так и в магнитном. Увеличение значений параметров  $a$  и  $b$  ( $a, b \in (1, 10]$ ) характеризуется появлением осцилляций большой амплитуды в поле скорости. Увеличение значений  $a$  также приводит к увеличению частоты осцилляций. Увеличение значений параметра  $b$  ( $b > 1$ ) характеризуется уменьшением разнообразия моделируемых режимов магнитного поля. Таким образом, данная модель имеет ограничение на значения управляющих параметров  $R_\alpha \leq 40$  и  $Re_m \leq 200$  [13] для моделирования как хаотического, так и любого другого режима с незначительными изменениями в поле скорости.

## Выводы

Исследование устойчивости (по Ляпунову) решений МГД-системы, описывающей крупномасштабную модель  $\alpha\Omega$ -динамо с аддитивным регулятором  $Z(t)$  интенсивности  $\alpha$ -эффекта, показало, что область подавления расходимости магнитного поля определяется значениями характеристики устойчивости  $\omega \in (0.25, 0.5)$ . Значения управляющих параметров в этой области попадают в интервалы  $Re_m \in [100, 1000]$  и  $R_\alpha \in [10, 70]$ .

В вышеуказанной области смоделирован хаотический режим генерации магнитного поля на фоне слабо изменяющегося поля скорости при ограничениях на значения управляющих параметров  $Re_m \leq 200$  и  $R_\alpha \leq 40$ . Ограничения связаны с увеличением амплитуды осцилляций в поле скорости как при увеличении значений управляющих параметров, так и параметров процесса  $Z(t)$ .


## Список литературы

1. Водинчар Г.М. Использование собственных мод колебаний вязкой вращающейся жидкости в задаче крупномасштабного динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(7), С. 33–42 DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42.
2. Водинчар Г. М., Фещенко Л.К. 6-труйная кинематическая модель геодинамо, *Научные ведомости БелГУ. Математика Физика*, 2014. № 5, С. 94–102.
3. Водинчар Г. М., Фещенко Л.К. Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. № 2(11), С. 45–54 DOI: 10.18454/2079-6641-2015-11-2-45-54.
4. Feshchenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2015. vol. 22, no. 4, pp. 361-369 DOI: 10.5194/npg-22-361-2015.
5. Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core, *Magnetohydrodynamics*, 2016. vol. 52, no. 1, pp. 287-300.
6. Водинчар Г. М., Годомская А. Н., Шереметьева О. В. Инверсии магнитного поля в динамической системе со стохастическими  $\alpha\Omega$ -генераторами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2017. № 4(20), С. 76–82 DOI: 10.18454/2079-6641-2017-20-4-76-82.
7. Водинчар Г. М., Паровик Р. И., Пережогин А. С., Шереметьева О. В. Работы по моделированию физических процессов и систем в институте космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, *История науки и техники*, 2017. № 8, С. 100–112.
8. Godomskaaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversals in the low-mode model dynamo with  $\alpha\Omega$ -generators, *E3S Web of Conferences*, 2018. vol. 62, pp. 02016 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202016.
9. Шереметьева О. В., Годомская А. Н. Моделирование режимов генерации магнитного поля в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо с изменяющейся интенсивностью  $\alpha$ -эффекта, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2021. Т. 14, № 2, С. 27–38 DOI: 10.14529/mmp210203.
10. Godomskaaya A. N., Sheremetyeva O. V. The modes of magnetic field generation in a low-mode model of  $\alpha\Omega$ -dynamo with  $\alpha$ -generator varying intensity regulated by a function with an alternating kernel, *EPJ Web of Conferences*, 2021. vol. 254, pp. 02015 DOI: 10.1051/epjconf/202125402015.
11. Шереметьева О. В. Режимы генерации магнитного поля в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо с динамическим подавлением  $\alpha$ -эффекта энергией поля, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. № 4(37), С. 92–103 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-92-103.
12. Шереметьева О. В. Динамика изменения режимов генерации магнитного поля в зависимости от частоты осцилляций процесса подавления  $\alpha$ -эффекта энергией поля в модели  $\alpha\Omega$ -динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. № 4(41), С. 107–119 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119.
13. Sheremetyeva O. Magnetic Field Dynamical Regimes in a Large-Scale Low-Mode  $\alpha\Omega$ -Dynamo Model with Hereditary  $\alpha$ -Quenching by Field Energy, *Mathematics*, 2023. vol. 11(10), pp. 2297 DOI: 2023.10.3390/math11102297..
14. Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System, *Mathematics*, 2023. vol. 11(13), pp. 3000 DOI: 10.3390/math11133000..
15. Колесниченко А. В., Маров М. Я. *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*. М: БИНОМ, 2009. 632 с.
16. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996. 531 pp.
17. Желиговский В. А., Чертовских Р. А. О кинематической генерации магнитных мод блоховского типа, *Физика Земли*, 2020. № 1, С. 103–116 DOI: 10.31857/S0002333720010159.
18. Rozenknop, L.M.; Reznikov, E.L. On the free oscillations of a rotating viscous in the outer Earth core, *Vychislitel'naya Seismologiya: Pryanuy Zadachi Matematicheskoi Fiziki*, 1998. no. 30, pp. 121–132.
19. Водинчар Г. М., Фещенко Л.К. Библиотека программ для исследования «Маломодовой модели геодинамо» «LowModedGeodynamoModel». Св-во о гос. рег. № 50201100092, 2011.
20. Водинчар Г. М. База данных «Параметры собственных мод свободных колебаний МГД полей в ядре Земли». Св-во о гос. рег. № 2019620054, 10.01.2019.

21. Vodinchar G. M. Using symbolic calculations to calculate the eigenmodes of the free damping of a geomagnetic field, *E3S Web of Conferences*, 2018. vol.62, pp. 02018 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202018.
22. Соколов Д. Д., Нефедов С. Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо, *Выч. мет. программирование*, 2007. Т. 8, №2, С. 195–204.
23. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. *Системы гидродинамического типа и их применение*. М.: Наука, 1981. 368 с.
24. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М: Наука, 1965. 424 с.
25. Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М: Наука, 1968. 431 с.
26. Benettin, G., Galgani, L., Giorgilli, A., Strelcyn, J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory, *Messaica*, 1980. no. 15(1), pp. 9–20.
27. Кузнецов С. П. *Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике*. М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.

### Информация об авторе



*Шереметьева Ольга Владимировна* ✉ – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Россия,  ORCID 0000-0001-9417-9731.


## References

- [1] Vodinchar G. M. Using Modes of Free Oscillation of a Rotating Viscous Fluid in the Large-Scale Dinamo, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 7, no. 2, pp. 33–42. DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42 (In Russian)
- [2] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. 6-jet kinematic model of geodinamo, Nauchnye Vedomosti BelGU Matematika Fizika, 2014, no. 5, pp. 94–102. www.bsuedu.ru (In Russian)
- [3] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Reversals in the 6-cells convection driven, Bull. KRASEC. Phys.& Math. Sci., 2015, vol. 11, no. 2, pp. 41–50. DOI: 10.18454/2313-0156-2015-11-2-41-50
- [4] Feshchenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory, Nonlinear Processes in Geophysics, 2015, vol. 22, no. 4, pp. 361–369. DOI: 10.5194/npg-22-361-2015
- [5] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core, Magnetohydrodynamics, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 287–300.
- [6] Vodinchar G. M., Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversal of magnetic field in the dynamic system with stochastic  $\alpha\Omega$ -generators, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 76–82. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-20-4-76-82 (In Russian)
- [7] Vodinchar G. M., Parovik R. I., Perezhogin A. S., Sheremetyeva O. V. Simulation of physical processes and systems in institute of cosmophysical research and radio wave propagation FEB RAS [Raboty po modelirovaniyu fizicheskikh processov i sistem v institute kosmofizicheskikh issledovaniy i rasprostraneniya radiovoln DVO RAN], History of Science and Engineering [Istoriya nauki i tehniki], 2017, no. 8, pp. 100–112. (In Russian)
- [8] Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversals in the low-mode model dynamo with  $\alpha\Omega$ -generators, E3S Web of Conferences, 2018, vol. 62, no. 02016. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202016
- [9] Sheremetyeva O. V., Godomskaya A. N. Modelling the magnetic field generation modes in the low-mode model of the  $\alpha\Omega$ -dynamo with varying intensity of the  $\alpha$ -effect, Bulletin of the South Ural State University, Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software», 2021, vol. 14, no. 2, pp. 27–38. DOI: 10.14529/mmp210203 (In Russian)
- [10] Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. The modes of magnetic field generation in a low-mode model of  $\alpha\Omega$ -dynamo with  $\alpha$ -generator varying intensity regulated by a function with an alternating kernel, EPJ Web of Conferences, 2021, vol. 254, no. 02015. DOI: 10.1051/epjconf/202125402015
- [11] Sheremetyeva O. V. Modes of magnetic field generation in the low-mode  $\alpha\Omega$ -dynamo model with dynamic regulation of the  $\alpha$ -effect by the field energy, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 37, no. 4, pp. 92–103. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-92-103 (In Russian)
- [12] Sheremetyeva O. V. Dynamics of generation modes changes in magnetic field depending on the oscillation frequency of the  $\alpha$ -effect suppression process by field energy in the  $\alpha\Omega$ -dynamo model, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki, 2022, vol. 41, no. 4, pp. 107–119. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119 (In Russian)
- [13] Sheremetyeva O. Magnetic Field Dynamical Regimes in a Large-Scale Low-Mode  $\alpha\Omega$ -Dynamo Model with Hereditary  $\alpha$ -Quenching by Field Energy, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 10, pp. 2297. DOI: 2023.10.3390/math11102297.
- [14] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 13, pp. 3000. DOI: 10.3390/math11133000.

- [15] Kolesnichenko A. V., Marov M. Ya. Turbulence and self-organization. Problems of modeling space and natural environments [‘Turbulentnost’ i samoorganizatsiya. Problemy modelirovaniya kosmicheskikh i prirodnykh sred]. Voscov: BINOM, 2009, 632 pp. (In Russian)
- [16] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. Academic Press: London, 1996, 531 pp.
- [17] Zheligovsky V. A., Chertovskih R. A. On the kinematic generation of magnetic modes of the bloch type, *Izvestiya Phys. Solid Earth*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 118–132. DOI: 10.31857/S0002333720010159 (In Russian)
- [18] Rozenknop L. M., Reznikov E. L. On the free oscillations of a rotating viscous in the outer Earth core, *Vychislitel'naya Seismologiya: Pryamye Zadachi Matematicheskoi Fiziki*, 1998, no. 30, pp. 121–132. (In Russian)
- [19] Vodinchar G. M., Feshenko L. K. Library of Programs for the Research of «Low-Mode Geodynamo Model»: «LowModedGeodinamoModel», Certificate of State Registration No. 50201100092, 2011.
- [20] Vodinchar G. M. Database «Parameters of Eigenmodes of Free Oscillations of MHD Fields in the Earth’s Core», Certificate of State Registration No. 2019620054, 10.01.2019.
- [21] Vodinchar G. M. Using symbolic calculations to calculate the eigenmodes of the free damping of a geomagnetic field, *E3S Web of Conferences*, 2018, vol. 62, no. 02018. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202018
- [22] Sokoloff D. D., Nefedov S. N. A small-mode approximation in the stellar dynamo problem, *Num. Meth. Prog.*, 2007, vol. 8, no. 2, pp. 195–204. <http://mi.mathnet.ru/vmp485> (In Russian)
- [23] Gledzer E. B., Dolzhanskiy F. V., Obukhov A. M. *Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primeneniye* [Hydrodynamic Type Systems and Their Application]. Nauka: Moscow, 1981, 368 pp. (In Russian)
- [24] Elsholts L. E. *Differential Equations and Calculus of Variations*. Nauka: Moscow, Russia, 1965, 424 pp. (In Russian)
- [25] Kurosh A. G. *Course of Higher Algebra*. Nauka: Moscow, Russia, 1968, 431 pp. (In Russian)
- [26] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory, *Meccanica*, 1980, vol. 15, no. 1, pp. 9–20.
- [27] Kuznetsov S. P. *Dynamic Chaos and Hyperbolic Attractors: From Mathematics to Physics*. Institute of Computer Science Izhevsk: Izhevsk, Russia, 2013, 488 pp. (In Russian)

### Information about author



*Sheremetyeva Olga Vladimirovna* ✉ – Cand.Sci.(Tech.), Research Scientist, Laboratory of Physical Process Modeling, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia,  ORCID 0000-0001-9417-9731.