Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 44. №3. С. 67-85. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-67-85

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.642.2

Реализация модифицированного алгоритма Тест 0-1 для анализа хаотических режимов дробного осциллятора Дуффинга

Р. И. Паровик*[1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, Россия

[2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4, Узбекистан

Аннотация. В работе проведено исследование хаотических и регулярных режимов дробного осциллятора Дуффинга с помощью алгоритма Тест 0-1. Дробный осциллятор Дуффинга описывается нелинейным дифференциальным уравнением с производной Римана-Лиувилля дробного переменного порядка. С помощью явной численной конечно-разностной схемы получено численное решение модели, которое подается на вход алгоритма Тест 0-1 после процедуры прореживания – выделения локальных экстремумов. Далее с помощью пакета Matlab реализуется алгоритм Тест 0-1 и проводится визуализация результатов моделирования. Строятся бифуркационные диаграммы для коэффициента корреляции с учетом значений порядков дробной производной, строятся осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что алгоритм Тест 0-1 работает корректно при соответствующем выборе шага дискретизации.

Ключевые слова: Тест 0-1, модель, осциллятор Дуффинга, дробная производная Римана-Лиувилля, среднеквадратическое отклонение, корреляция, бифуркационная диаграмма

Получение: 01.09.2023; Исправление: 01.10.2023; Принятие: 05.10.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Паровик Р. И. Реализация модифицированного алгоритма Тест 0-1 для анализа хаотических режимов дробного осциллятора Дуффинга // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 44. № 3. С. 67-85. EDN: AREVER. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-67-85.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках гранта Президента РФ МД-758.2022.1.1 по теме "Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением"

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: romanparovik@gmail.com

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2023. vol. 44. no. 3. P. 67-85. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-67-85

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A08, 34A34

Implementation of the Modified Test 0-1 Algorithm for the Analysis of Chaotic Modes of the Fractional Duffing Oscillator

R. I. Parovik*[1,2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Pogranichnaya, 4, Russia

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4, Uzbekistan

Abstract. The work carried out a study of chaotic and regular modes of a fractional Duffing oscillator using the Test 0-1 algorithm. The fractional Duffing oscillator is described by a nonlinear differential equation with the Riemann-Liouville derivative of a fractional variable order. Using an explicit numerical finite-difference scheme, a numerical solution to the model was obtained, which is fed to the input of the Test 0-1 algorithm after the thinning procedure - identifying local extrema. Next, using the Matlab package, the Test 0-1 algorithm is implemented and the simulation results are visualized. Bifurcation diagrams are constructed for the correlation coefficient, taking into account the values of the orders of the fractional derivative, and oscillograms and phase trajectories are constructed. It is shown that the Test 0-1 algorithm works correctly with the appropriate selection of the sampling step.

Key words: Test 0-1, model, Duffing oscillator, Riemann-Liouville fractional derivative, standard deviation, correlation, bifurcation diagram

Received: 01.09.2023; Revised: 01.10.2023; Accepted: 05.10.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Parovik R. I. Implementation of the modified Test 0-1 algorithm for the analysis of chaotic modes of the fractional Duffing oscillator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **44**: 3, 67-85. EDN: AREVER. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-67-85.

Funding. The research was carried out within the framework of the grant of the President of the Russian Federation MD-758.2022.1.1 on the topic "Development of mathematical models of fractional dynamics in order to study oscillatory processes and processes with saturation"

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*__Correspondence:__ E-mail: romanparovik@gmail.com

Введение

Исследование регулярных и хаотических режимов динамических систем является важной практической задачей. Это связано с тем, что, исходя из решаемой задачи необходимо знать диапазоны изменений значений ее параметров, чтобы знать хаотические режимы или наоборот регулярные режимы. Хаотические и регулярные режимы возникают в различных нелинейных динамических системах, в том числе и колебательных [1]. В настоящее время развитие получили эредитарные или дробные динамические системы [2], которые обладают свойствами наследственности или памяти [3].

Существуют различные методики исследования хаотических и регулярных режимов различных дробных динамических систем [2]. Например, одними из основных являются: построение сечений Пуанкаре, построение максимальных показателей Ляпунова, исследование точек покоя системы, метод фрактальной размерности, энтропии, Тест 0-1 и т.д. Все эти методы обладают как достоинствами, так и недостатками, могут использоваться как по отдельности, так и совместно с друг другом.

Одним из перспективных методов исследования хаотического и регулярного поведения динамических на наш взгляд является Тест 0-1 [4–11]. В настоящей работе мы будем применять модифицированный алгоритм Тест 0-1, который был предложен в статьях [12,13] для исследования хаотических и регулярных режимов динамических систем.

Объектом нашего исследования в настоящей статье будет дробный осциллятор Дуффинга, который обладает эффектом памяти, исследование, которого проводилось в работах [14–17]. Необходимо отметить, что классический осциллятор Дуффинга обладает богатой динамикой: хаотическим и бистабильным поведением [18].

Эффект памяти включен в модельное уравнение в виде оператора дифференцирования дробного переменного порядка типа Римана-Лиувилля [19–21]. Дробные производные достаточно хорошо изучены и о них можно узнать из известных монографий [22–24]. С помощью численного алгоритма нелокальной явной конечно-разностной схемы было получено приближенное решение задачи Коши для дробного осциллятора Дуффинга [15] . Далее численное решение было исследовано в рамках модифицированного алгоритма Тест 0-1.

В настоящей работе с помощью модифицированного алгоритма Тест 0-1 и численного решения дробного осциллятора Дуффинга нелокальной явной конечно-разностной схемы были исследованы различные динамические режимы дробного осциллятора Дуффинга в зависимости от изменения значений порядка дробной производной и других важных параметров, проведена визуализация результатов моделирования и дана их интерпретация. Подтверждены результаты, которые были получены ранее, например, в статье [25] и в работах авторов [14–17]. Получены новые результаты, которые показывают, что динамика дробного осциллятора Дуффинга с производной дробного переменного порядка является более богатой, чем классического осциллятора Дуффинга [18].

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую модель дробного осциллятора Дуффинга [14–17]:

$$\ddot{x}(t) + \lambda D_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0. \quad (1)$$

Здесь $x(t) \in C^2[0,T]$ — функция смещения; $t \in [0,T]$ — время рассматриваемого процесса, $T > 0$ - время моделирования, λ — коэффициент трения, δ и ω — амплитуда и частота внешнего периодического воздействия, x_0 и y_0 — константы, заданные начальные условия, $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\ddot{x}(t) = d^2x/dt^2$. Оператор дробного дифференцирования в (1) понимается в смысле Римана-Лиувилля переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$:

$$D_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q(t))} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha(t)}} d\tau \quad (2)$$

Замечание 1. Задачи Коши (1) описывает нелинейные колебательные режимы с учетом переменной памяти. Если $\alpha(t)$ не зависит от времени, то мы получаем модель дробного осциллятора Дуффинга с постоянной памятью [2,25]. Если $\alpha(t) = 1$ мы приходим к классическому осциллятору Дуффинга [18].

Задача Коши (1) исследовалась в работах [14–17] с помощью численных методов теории конечно-разностных схем, а также с помощью качественных методов: сечений Пункаре и максимальных показателей Ляпунова. Построение конечно-разностных основывалось на аппроксимации оператора дробного дифференцирования (2) производной Грюнвальда-Летникова [19–21]:

$$D_{0t}^{\alpha(t)} x(t) \approx \frac{1}{\tau^{q_k}} \sum_{i=0}^{k-1} c_i^{\alpha_k} x_{k-i}, c_i^{\alpha_k} = (1 - (1+\alpha_k)/k)\, c_{i-1}^{\alpha_k}, c_0^{\alpha_k} = 1, k = 1..N-1. \quad (3)$$

Здесь N — количество расчетных узлов сетки или разбиений отрезка $[0,T]$. Для простоты рассмотрим нелокальную явную конечно-разностную схему [17]:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \tau y_0, \\ x_{k+1} = \left(2 + \tau^2 - \lambda\tau^{2-\alpha_k}\right) x_k - x_{k-1} - \lambda\tau^{2-\alpha_k} \sum_{i=1}^{k-1} c_i^{\alpha_k} x_{k-i} - \tau^2 x_k^3 + \delta\cos(\omega k\tau), \\ k = 1, ..., N-1. \end{cases} \quad (4)$$

где шаг дискретизации $\tau = N/T$.

Свойства схемы (4) рассмотрены в работе [17], рассмотрены вопросы устойчивости и сходимости. Далее, опираясь на схему (4) построим, алгоритм Тест 0-1 для исследования хаотических режимов [7].

Алгоритм Тест 0-1

Пусть мы имеем набор значений $x_k, k = 1, ..., N$, полученный по схеме (4). Реализуем следующие шаги алгоритма [7]:

1. Генерируем случайное число $\in (0, \pi)$ и переходим к новым переменным по формулам:

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cos(ck), q(n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sin(ck), n = 1, ..., N. \quad (5)$$

Замечание 2. Отметим, что возможно появление резонанса, если разложение Фурье полученных данных x содержит член, пропорциональный $\exp(-i\omega k)$, то существует резонанс при $c = \omega$, где $p(n) \sim n$, и, следовательно, среднеквадратическое отклонение $M(n) \sim n^2$, независимо от того, является ли динамика регулярной или хаотичной. Поэтому на практике часто выбирают $\in (\pi/5, 4\pi/5\ )$. График, построенный по точкам (p, q) — фазовая траектория дискретного временного ряда, также косвенно может указывать на хаотическую или регулярную динамику. В частности, если фазовая траектория имеет вид траектории диффузионного (броуновского) движения, то присутствует хаос, а если траектория замкнутая (ограниченная), то существует регулярный режим.

2. Вычисляем среднеквадратичное отклонение $M(n)$:

$$M(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (p(k+n) - p(k))^2 + (q(k+n) - q(k))^2 \quad (6)$$

и модифицированное среднеквадратическое отклонение

$$D(n) = M(n) - \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k\right)^2 \frac{1 - \cos(nc)}{1 - \cos(c)}. \quad (7)$$

Замечание 3. Заметим, что предел в (7) обеспечивается вычислением $M(n)$ только для $n \leq n_{cut}$, где $n_{cut} \ll N$. На практике можно выбрать $n_{cut} = N/10$. Если среднеквадратическое отклонение $M(n)$ ограничено, то мы имеем дело с регулярным режимов, а если линейно возрастает, то с хаотическим режимом.

3. Затем мы вычисляем асимптотическую скорость роста средне квадратичного отклонения K_c. Для этого воспользуемся корреляционным методом. Пусть известны векторы $\xi = (1, 2, ..., n_{cut}), \Delta = (D(1), D(2), ..., D(n_{cut}))$. Тогда ковариация и вариация определяются по формулам:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} (x(j) - \bar{x})(y(j) - \bar{y}),$$

$$\bar{x} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} x(j), \bar{y} = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} y(j), \operatorname{var}(x, x) = \operatorname{cov}(x, x).$$

Коэффициент корреляции между векторами ξ и Δ определяет асимптотическую скорость роста средне квадратичное отклонения:

$$K_c = \operatorname{corr}(\xi, \Delta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \Delta)}{\sqrt{\operatorname{var}(\xi) \operatorname{var}(\Delta)}} \in [-1, 1]. \quad (8)$$

Отметим, что существует регрессионный метод нахождения коэффициента корреляции K_c, который подробно рассмотрен в работе [7].

4. Шаги 1–3 выполняются для N_c значений c, выбранных случайно в интервале $(0, \pi)$. На практике достаточно взять $N_c = 100$. Затем мы вычисляем медиану эти N_c значений K_c, чтобы вычислить окончательный результат $K = \mathrm{median}\,(K_c)$.

Замечание 4. Заметим, что здесь именно медиана была выбрана, а не среднее значение, поскольку она устойчива к выбросам, которые связаны с резонансами. Тест утверждает, что значение $K \approx 0$ указывает на регулярную динамику, а значение $K \approx 1$ указывает на хаотическую динамику. В Таблице приведены различные сценарии динамических режимов по алгоритму Тест 0-1.

Таблица

Сценарии динамики по алгоритму Тест 0-1
[Dynamic scenarios according to the Test 0-1 algorithm]

Режимы	Динамика (p, q)	Динамика $M\,(n)$	K
Регулярный	ограниченный	ограниченный	0
Хаотический	диффузный	линейный рост	1

Проблема передискретизации в Тест 0-1 для непрерывных динамических систем

В случае, когда шаг дискретизации τ слишком мал, тогда система подвергается передискретизации, что дает неверные результаты [7]. Обычно оптимальный шаг дискретизации τ подбирается визуально по графику. Однако существуют более глубокие методы, например, метод первого локального минимума взаимной информации [26]. Взаимная информация между наборами значений $x\,(k)$ и $x\,(k+\tau)$ определяется по формуле:

$$I\,(\tau) = \sum_{x(k),x(k+\tau)} P\,(x\,(k), x\,(k+\tau)) \log\left(\frac{P\,(x\,(k), x\,(k+\tau))}{P\,(x\,(k))\,P\,(x\,(k+\tau))}\right), \tag{9}$$

где τ — временная задержка, $P\,(.)$ — соответствующие вероятности.

Значение τ, соответствующее первому локальному минимуму взаимной информации $I\,(\tau)$, является оптимальным временем выборки. Таким образом, мы можем преобразовать исходные данные измерений $x\,(k)$ в точно выбранные данные измерений следующим образом:

$$\varphi\,(k) = x\,(k + i\tau)\,, k = 1, ..., N, i = 1, 2, ..., M. \tag{10}$$

После этого преобразования новый набор значений (10) уже не подвержен передискретизации.

В работе [9,10] авторы предлагаю исследовать спектры сигналов. В случае, если спектр сигнала является непрерывным в определенном интервале частот, то мы имеет признак того, что в системе может быть хаос. Далее, если минимальная

частота спектра f_{min}, максимальная f_{max}, тогда при выполнении условия $f_s < 4(f_{max} - f_{min})$, где $f_s = 1/\tau$, τ — шаг расчетной сетки, дает гарантию того, что количество дискретных значений соответствующих K_c значениям, близким к 1, составят более 50% всех значений в интервале $(\pi/5\ , 4\pi/5\ )$. В результате медиана будет близка к 1, что правильно укажет на хаотическую природу анализируемого сигнала.

В работе [12] авторы предложили «проредить» исходный сигнал, выбрав локальные минимумы и максимумы. Эта модификация не меняет динамику системы. Следовательно, если исходный сигнал регулярен, то прореженный также регулярен, а если он хаотична, то прореженный также остается хаотичной. В этом случае мы получаем другой набор значений: φ_k, $k = 1, ..., L < N$, который подаем на вход алгоритма Тест 0-1.

Мы в своей работе выберем для исследования прореженный сигнал [12], для этого надо найти локальные минимумы и максимумы по знаку производной.

Результаты моделирования

Моделирование проводилось в математическом пакете Matlab. Рассмотрим некоторые примеры работы алгоритма Тест 0-1.

Пример 1. Случай классического осциллятора Дуффинга, когда в уравнении (1) $\alpha(t) = \alpha = 1$ [18]. Значения параметров выберем следующим: $\delta = 0.3, \omega = 1, x_0 = 0.2, y_0 = 0.3$. Значения параметра λ были выбраны из отрезка $[0, 1]$ с шагом $h = 0.001$. Результат работы алгоритма Тест 0-1 приведен на рис.1.

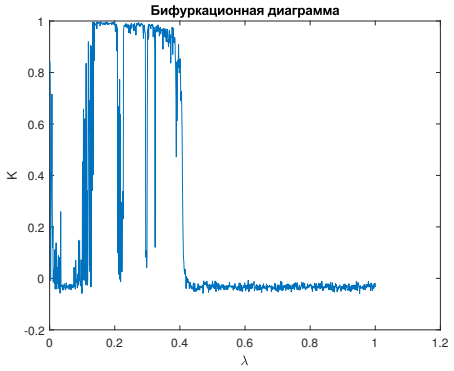

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма зависимости коэффициента корреляции $K(\lambda)$ от $\lambda \in [0, 1]$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 1. Bifurcation diagram of the dependence of the correlation coefficient $K(\lambda)$ on $\lambda \in [0, 1]$ for the classical Duffing oscillator.]

На рис.1 представлена бифуркационная диаграмма, показывающая переход между хаотичным и регулярным режимами. Видно, что примерно в диапазоне изменений $\lambda \in [0.4, 1] \cup [0, 0.1]$ мы наблюдаем регулярные режимы. В диапазоне $\lambda \in (0.1, 0.4)$ — хаотические режимы. Посмотрим, как ведут себя другие характеристики для разных режимов из диапазонов указанных выше (рис.2-4).

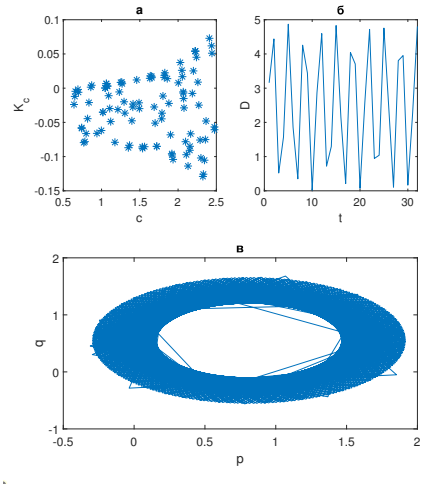

Рис. 2. Коэффициент корреляции K_c для $\lambda = 0.1$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $\lambda = 0.1$; в) фазовая траектория (p, q) при $\lambda = 0.1$.

[Fig. 2. Correlation coefficient K_c for $\lambda = 0.1$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $\lambda = 0.1$; c) phase trajectory (p, q) for $\lambda = 0.1$.]

На рис.2 приведены при фиксированном значении $\lambda = 0.1$: коэффициенты корреляции (рис.2а), среднеквадратическое отклонение (рис.2б) полученное по формуле (7), также фазовая траектория временного ряда (рис.2в), построенная по координатам (p, q), которые определяются по формулам (5). Согласно Таблице сценариев динамических режимов мы имеем дело с регулярным режимом. Это также подтверждается осциллограммой и фазовой траекторией (рис.3).

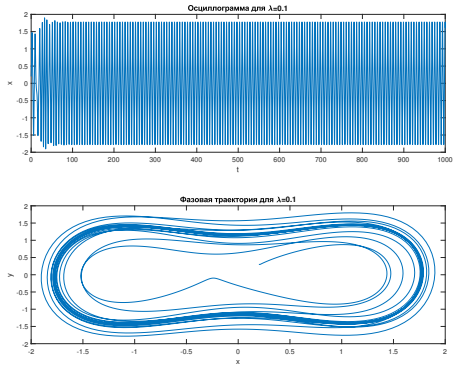

Рис. 3. Осциллограмма и фазовая траектория при $\lambda = 0.1$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 3. Oscillogram and phase trajectory at $\lambda = 0.1$ for the classical Duffing oscillator.]

На рис.4 для значения $\lambda = 0.2$ приведены характеристики: $K_c, D(n)$ и фазовая траектория (p, q).

Согласно Таблице сценариев мы можем сделать вывод о том, что при $\lambda = 0.2$ возникает хаотический режим и согласно бифуркационной диаграмме рис.1

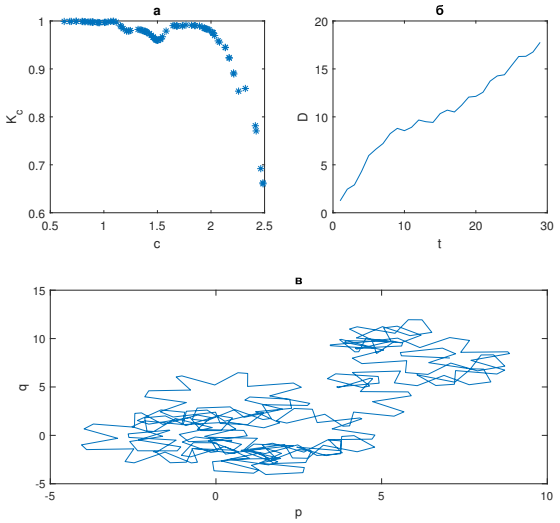

Рис. 4. Коэффициент корреляции K_c для $\lambda = 0.2$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $M(n)$ для $\lambda = 0.2$; в) фазовая траектория (p, q) при $\lambda = 0.2$.

[Fig. 4. Correlation coefficient K_c for $\lambda = 0.2$; b) standard standard deviation $M(n)$ for $\lambda = 0.2$; c) phase trajectory (p, q) at $\lambda = 0.2$.]

медианное значения коэффициента корреляции $K \approx 1$. Осциллограмма и фазовая траектория для $\lambda = 0.2$ приведены на рис.5.

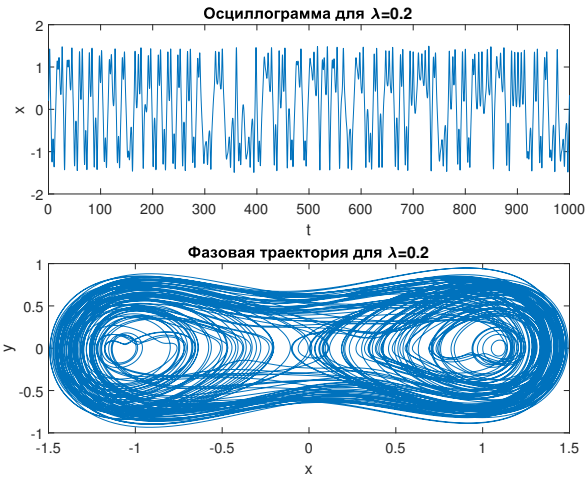

Рис. 5. Осциллограмма и фазовая траектория при $\lambda = 0.2$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 5. Oscillogram and phase trajectory at $\lambda = 0.2$ for the classical Duffing oscillator.]

Таблицу). Осциллограмма и фазовая траектория также указывает на регулярный режим (рис.7).

На (рис.6) для значения $\lambda = 1$ приведены характеристики: $K_c, D(n)$ и фазовая траектория (p, q). Мы видим, что в этом случае возникает регулярный режим (см.

Пример 2. Случай, когда $x(t) = \alpha \in [0, 1]$ есть $\alpha \in [2, 25]$. Выберем значения параметров: $t \in [0.1000]$, для расчетной сетки $N = 3.5 \cdot 10^4$, $\lambda = 0.15$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1$,

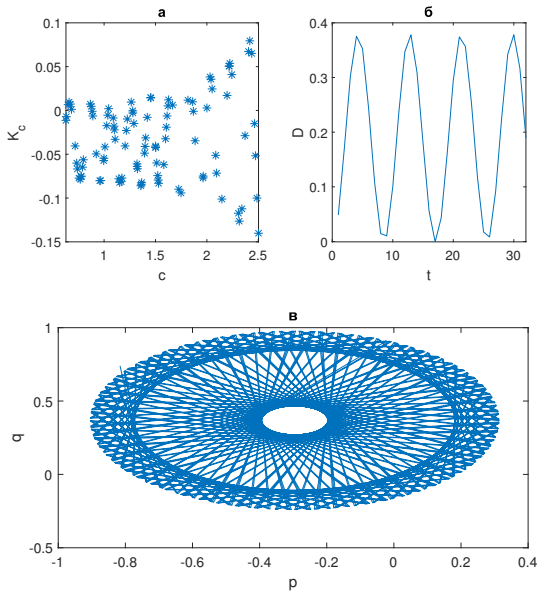

Рис. 6. Коэффициент корреляции K_c для $\lambda = 1$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $\lambda = 1$; в) фазовая траектория (p, q) при $\lambda = 1$.

[Fig. 6. Correlation coefficient K_c for $\lambda = 1$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $\lambda = 1$; c) phase trajectory (p, q) for $\lambda = 1$.]

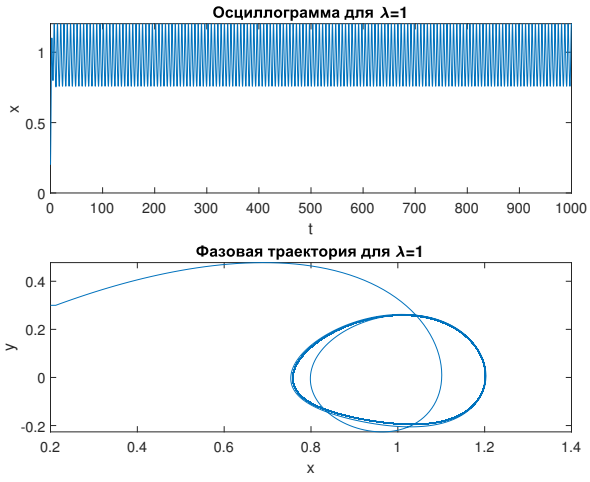

Рис. 7. Осциллограмма и фазовая траектория при $\lambda = 1$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 7. Oscillogram and phase trajectory at $\lambda = 1$ for the classical Duffing oscillator.]

На рис.8 представлена бифуркационная диаграмма коэффициента корреляции в зависимости от значения дробной производной α. Мы видим область существования хаоса: $\alpha \in [0.78, 1]$ и область существования регулярного режима

$x_0 = 0.2$, $v_0 = 0.3$. Порядок дробной производной α будем менять с шагом $h = 0.01$.

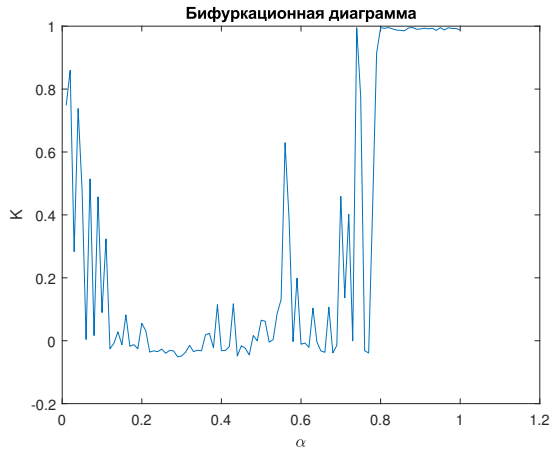

Рис. 8. Бифуркационная диаграмма зависимости коэффициента корреляции $K(\alpha)$ от $\alpha \in [0,1]$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 8. Bifurcation diagram of the dependence of the correlation coefficient $K(\alpha)$ on $\alpha \in [0,1]$ for the classical Duffing oscillator.]

$\alpha \in [0.1, 0.78)$. Рассмотрим более подробно каждый из случаев. На рис.9 приведены характеристики: $K_c, D(n), (p,q)$ для $\alpha = 1$.

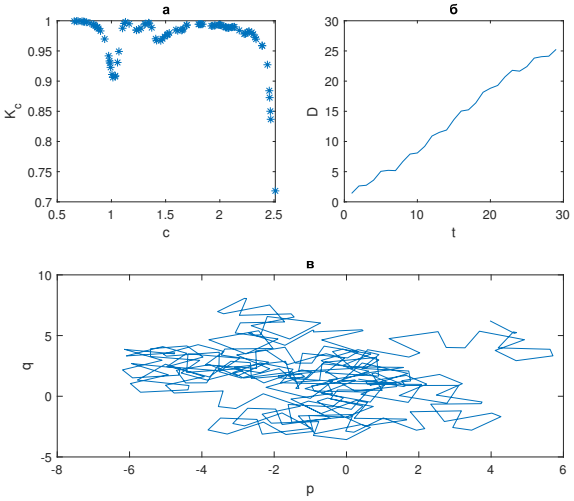

Рис. 9. Коэффициент корреляции K_c для $\alpha = 1$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $\alpha = 1$; в) фазовая траектория (p,q) при $\alpha = 1$.

[Fig. 9. Correlation coefficient K_c for $\alpha = 1$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $\alpha = 1$; c) phase trajectory (p,q) for $\alpha = 1$.]

Рис.9 и 10 подтверждают хаотический режим. На рис.11 и 12 приведен случай для $\alpha = 0.2$.

Пример 3. Общий случай, когда $\alpha(t)$ является функцией времени t [14–17]. Пусть функция $\alpha(t)$ периодическая и имеет вид: $\alpha(t) = a\cos^2(\varphi t)$, $a \in [0,1]$.

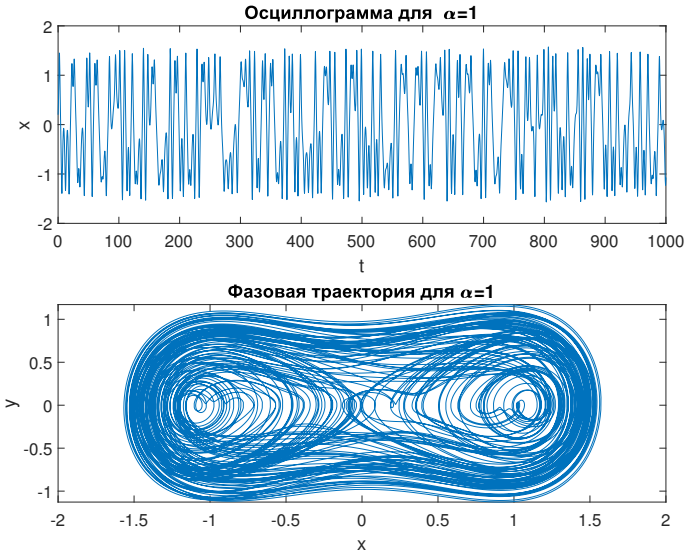

Рис. 10. Осциллограмма и фазовая траектория при $\alpha = 1$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 10. Oscillogram and phase trajectory at $\alpha = 1$ for the classical Duffing oscillator.]

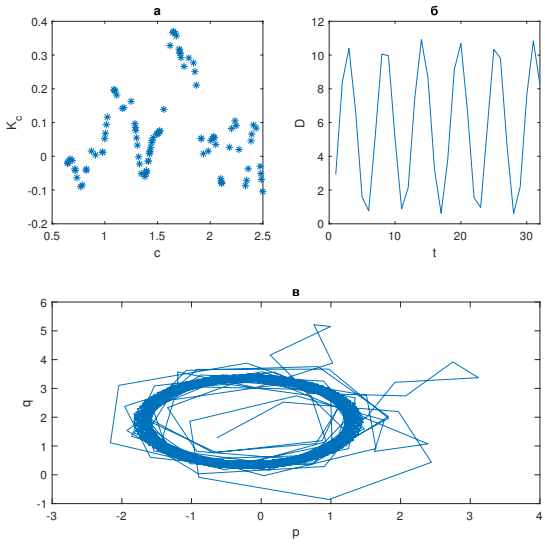

Рис. 11. Коэффициент корреляции K_c для $\alpha = 0.2$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $\alpha = 0.2$; в) фазовая траектория (p, q) при $\alpha = 0.2$.

[Fig. 11. Correlation coefficient K_c for $\alpha = 0.2$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $\alpha = 0.2$; c) phase trajectory (p, q) at $\alpha = 0.2$.]

Здесь $t \in [0.1700]$, $N = 2.5 \cdot 10^4$, $\varphi = 1.5$, остальные параметры будут взяты из предыдущего примера. Применим алгоритм Тест 0-1 и найдем зависимость

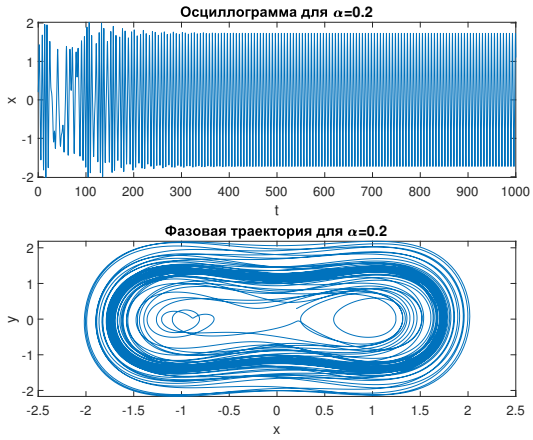

Рис. 12. Осциллограмма и фазовая траектория при $\alpha = 0.2$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 12. Oscillogram and phase trajectory at $\alpha = 0.2$ for the classical Duffing oscillator.]

медианного коэффициента корреляции K от амплитуды a. Значения амплитуд a будем менять с шагом $h = 0.001$.

Бифуркационная диаграмма для этого примера представлена на рис.13, а на рис.14-17 показаны основные характеристики модифицированного алгоритма Тест 0-1, включая осциллограмму и фазовую траекторию.

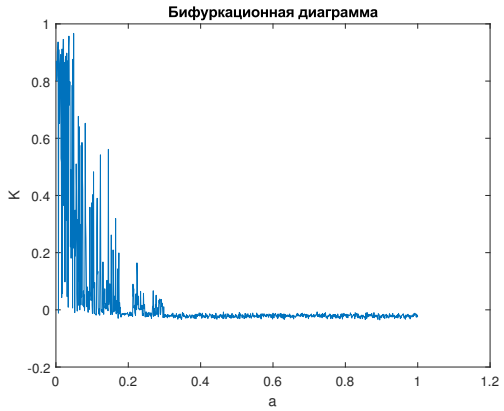

Рис. 13. Бифуркационная диаграмма зависимости коэффициента корреляции $K(a)$ от $a \in [0, 1]$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 13. Bifurcation diagram of the dependence of the correlation coefficient $K(a)$ on $a \in [0, 1]$ for the classical Duffing oscillator.]

Из рис.13 мы видим, что в достаточно широком диапазоне значений a на $[0.2, 1]$ должны существовать регулярные режимы. В качестве подтверждения построим для $a = 1$ коэффициент корреляции K_c, стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $a = 1$ и фазовая траектория (p, q) (рис.14).

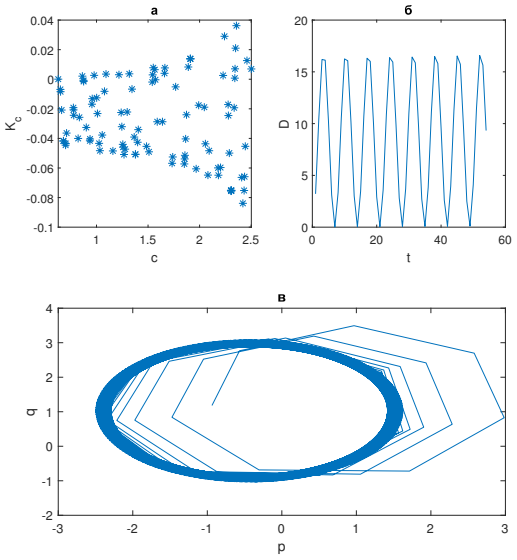

Рис. 14. Коэффициент корреляции K_c для $\alpha = 1$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $\alpha = 1$; в) фазовая траектория (p, q) при $\alpha = 1$.

[Fig 14. Correlation coefficient K_c for $\alpha = 1$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $\alpha = 1$; c) phase trajectory (p, q) for $\alpha = 1$.]

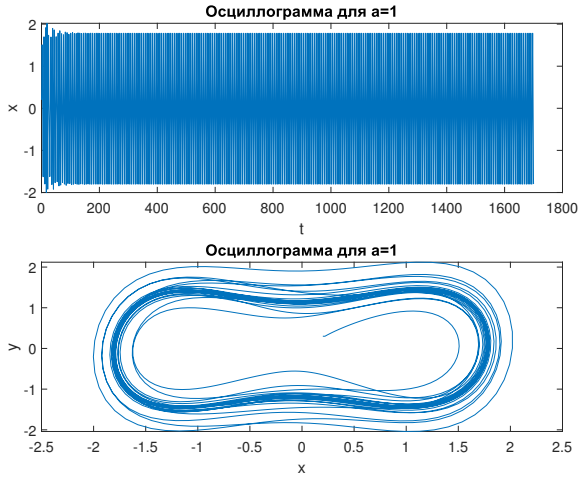

Рис. 15. Осциллограмма и фазовая траектория при $\alpha = 1$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 15. Oscillogram and phase trajectory at $\alpha = 1$ for the classical Duffing oscillator.]

На рис.14 и 15 при $\alpha = 1$ приведены графики, которые соответствуют регулярному режиму (см. Таблицу). На рис.15 мы видим, что фазовая траектория выходит на предельный цикл, также на замкнутую траекторию выходит

траектория (p, q) рис.14в. На рис.16 и 17 приведен случай для $a = 0.01$, который соответствует хаотическому (предхаотическому) режиму.

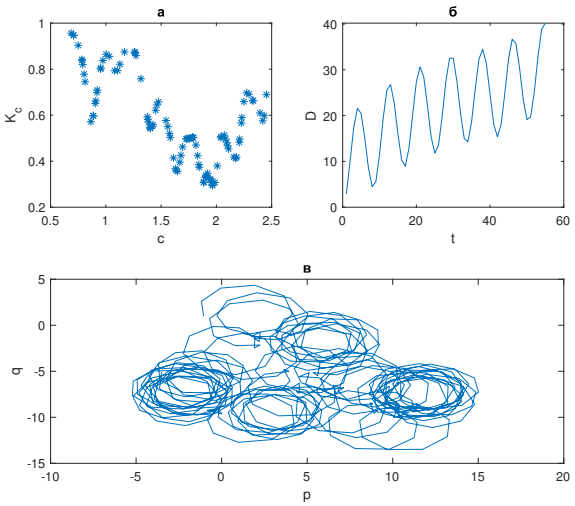

Рис. 16. Коэффициент корреляции K_c для $a = 0.01$; б) стандартное среднеквадратическое отклонение $D(n)$ для $a = 0.01$; в) фазовая траектория (p, q) при $a = 0.01$.

[Fig. 15. Correlation coefficient K_c for $a = 0.01$; b) standard standard deviation $D(n)$ for $a = 0.01$; c) phase trajectory (p, q) at $a = 0.01$.]

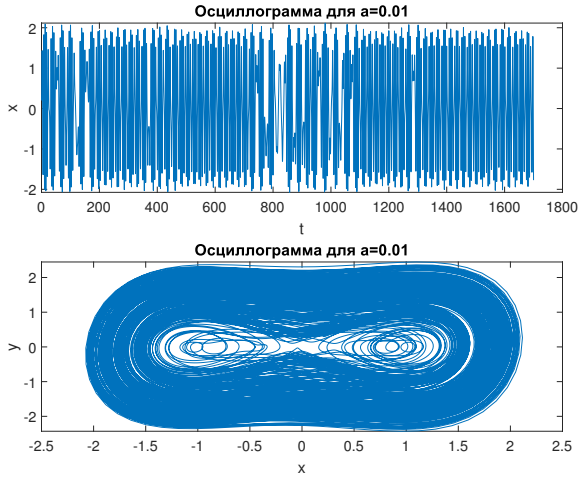

Рис. 17. Осциллограмма и фазовая траектория при $a = 0.01$ для классического осциллятора Дуффинга.

[Fig. 17. Oscillogram and phase trajectory at $a = 0.01$ for the classical Duffing oscillator.]

Мы здесь видим, что визуализация результатов исследования при $a = 0.01$ с учетом Таблицы сценариев указывает на хаотический характер поведения дробного осциллятора Дуффинга (1).

Заключение

В работе с помощью модифицированного алгоритма Тест 0-1 был исследован дробный осциллятор Дуффинга (1) на наличие регулярных и хаотических режимов. Показано, что алгоритм Тест 0-1 дает приемлемые результаты, если удается избежать эффекта передискретизации. Были подтверждены результаты работ [2, 25], когда порядок дробной производной является константой, а также когда порядок равен единице (классический случай). Были получены новые результаты, когда порядок дробной производной $\alpha(t)$ в уравнении (1) является периодической функцией. В этом случае также могут существовать хаотические и регулярные режимы. Необходимо отметить, что также представляет интерес применение других численных методов решения задачи Коши (1), например, метода Адамса-Башфорта-Моултона или нелокальной неявной конечно-разностной схемы [17, 27–29]. Это позволит несколько уточнить, полученные результаты. Более детальное исследования хаотических и регулярных режимов можно провести с помощью построение карт и атласов по аналогии с работой [30]. В этом случае необходимо использовать большие вычислительные ресурсы с привлечением технологии параллельного программирования [10].

Список литературы

1. Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. *Regular and chaotic dynamics*, vol. 38. New York: Springer Science & Business Media, 2013. 692 DOI:10.1007/978-1-4757-2184-3 pp.
2. Petras I *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 DOI:10.1007/978-3-642-18101-6 pp.
3. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
4. Gottwald G. A., Melbourne I. Testing for chaos in deterministic systems with noise, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2005. vol. 212, no. 1-2, pp. 100-110 DOI:10.1016/j.physd.2005.09.011.
5. Hu J., Tung W. W., Gao J., Cao Y. Reliability of the 0-1 test for chaos, *Physical Review E*, 2005. vol. 72, no. 5, 056207 DOI:10.1103/PhysRevE.72.056207.
6. Falconer I., Gottwald G. A., Melbourne I., Wormnes K. Application of the 0-1 test for chaos to experimental data, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2007. vol. 6, no. 2, pp. 395-402 DOI:10.1137/060672571.
7. Gottwald G. A., Melbourne I. On the implementation of the 0–1 test for chaos, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2009. vol. 8, no. 1, pp. 129-145 DOI:10.1137/080718851.
8. Gottwald G. A., Melbourne I. The 0-1 test for chaos: A review, *Chaos detection and predictability*, 2016, pp. 221-247 DOI:10.1007/s40430-015-0453-y.
9. Marszalek W., Walczak M., Sadecki J. Testing deterministic chaos: Incorrect results of the 0–1 test and how to avoid them, *IEEE Access*, 2019. vol. 7, pp. 183245-183251 DOI:10.1109/ACCESS.2019.2960378.
10. Walczak M., Marszalek W., Sadecki J. Using the 0-1 test for chaos in nonlinear continuous systems with two varying parameters: Parallel computations, *IEEE Access*, 2019. vol. 7, pp. 154375-154385 DOI:10.1109/ACCESS.2019.2948989.
11. Ouannas A., Khennaoui A. A., Momani S., Grassi G., Pham V. T., El-Khazali, R., Vo Hoang D. A quadratic fractional map without equilibria: Bifurcation, 0–1 test, complexity, entropy, and control, *Electronics*, 2020. vol. 9, no. 5, 748 DOI:10.3390/electronics9050748.
12. Fouda J. S.A.E., Bodo B., Sabat S. L., Effa J. Y. A modified 0-1 test for chaos detection in oversampled time series observations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014. vol. 24, no. 5, 1450063 DOI:10.1142/S0218127414500631.
13. Wontchui T. T., Effa J. Y., Fouda H. P. E., Fouda, J. S. A. E. Dynamical behavior of Peter-De-Jong map using the modified (0-1) and 3ST tests for chaos. Annual Review of Chaos Theory, *2017*. vol. 7, pp. 1-21.

14. Kim V., Parovik R. Mathematical model of fractional Duffing oscillator with variable memory, *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 11 DOI:10.3390/math8112063.
15. Kim V., Parovik R. Application of the Explicit Euler Method for Numerical Analysis of a Nonlinear Fractional Oscillation Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 5 DOI:10.3390/fractalfract6050274.
16. Kim V., Parovik R. Some aspects of the numerical analysis of a fractional duffing oscillator with a fractional variable order derivative of the Riemann-Liouville type, *AIP Conference Proceedings*, 2022. vol. 2467 DOI:10.1063/5.0092344.
17. Kim V., Parovik R. Implicit finite-difference scheme for a Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order of the Riemann-Liouville type, *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 3 DOI:10.3390/math11030558.
18. Kovacic I., Brennan M. J. *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. New York: John Wiley & Sons, 2011. 623 pp.
19. Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der Physik*, 2003. vol. 12, no. 11–12, pp. 692–703 DOI:10.1002/andp.200310032.
20. Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019. vol. 71, pp. 231–243 DOI:10.1016/j.cnsns.2018.12.003.
21. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020. vol. 476, no. 2234, 20190498 DOI:10.1098/rspa.2019.0498.
22. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
23. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006. 523 pp.
24. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Background and Theory*, T. I. Berlin: Springer, 2013. 373 DOI:10.1007/978-3-642-33911-0 с.
25. Syta A., Litak G., Lenci, S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2014. vol. 24, no. 1 DOI:10.1063/1.4861942.
26. Xin B., Li Y. 0-1 Test for Chaos in a Fractional Order Financial System with Investment Incentive, *Abstract and Applied Analysis*, 2013. vol. 2013, 876298 DOI:10.1155/2013/876298.
27. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics*, 2002. vol. 29, no. 1-4, pp. 3-22 DOI:10.1023/A:1016592219341.
28. Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system, *ANZIAM Journal*, 2005. vol. 47, pp. 168-184 DDOI:10.21914/anziamj.v47i0.1037.
29. Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. Mathematics, 2018. vol. 6, no. 2, 016 DOI:10.3390/math6020016.
30. Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022. vol. 2373, 52022 DOI:10.1088/1742-6596/2373/5/052022.

Информация об авторе

Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, заведующий международной интегративной научно-исследовательской лабораторией экстремальных явлений Камчатки, КамГУ имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Lichtenberg A. J., Lieberman M. A. Regular and chaotic dynamics. vol. 38. New York: Springer Science & Business Media. 2013. 692 p.DOI:10.1007/978-1-4757-2184-3

[2] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. Berlin: Springer, 2011. 218 p. DOI:10.1007/978-3-642-18101-6

[3] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 2005, 288 p.

[4] Gottwald G. A., Melbourne I. Testing for chaos in deterministic systems with noise. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2005. vol. 212, no. 1-2. 100-110. DOI:10.1016/j.physd.2005.09.011

[5] Hu J., Tung W. W., Gao J., Cao Y. Reliability of the 0-1 test for chaos. 2005. Physical Review E. vol. 72. no. 5. 056207. DOI:10.1103/PhysRevE.72.056207

[6] Falconer I., Gottwald G. A., Melbourne I., Wormnes K. Application of the 0-1 test for chaos to experimental data. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2007. vol. 6. no. 2. 395-402. DOI:10.1137/060672571

[7] Gottwald G. A., Melbourne I. On the implementation of the 0–1 test for chaos. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2009. vol. 8. no. 1. 129-145. DOI:10.1137/080718851

[8] Gottwald G. A., Melbourne I. The 0-1 test for chaos: A review. Chaos detection and predictability. 2016. 221-247. DOI:10.1007/s40430-015-0453-y

[9] Marszalek W., Walczak M., Sadecki J. Testing deterministic chaos: Incorrect results of the 0–1 test and how to avoid them. IEEE Access. 2019. vol. 7. 183245-183251. DOI:10.1109/ACCESS.2019.2960378

[10] Walczak M., Marszalek W., Sadecki J. Using the 0-1 test for chaos in nonlinear continuous systems with two varying parameters: Parallel computations. IEEE Access. 2019. vol. 7. 154375-154385. DOI:10.1109/ACCESS.2019.2948989

[11] Ouannas A., Khennaoui A. A., Momani S., Grassi G., Pham V. T., El-Khazali, R., Vo Hoang D. A quadratic fractional map without equilibria: Bifurcation, 0–1 test, complexity, entropy, and control. Electronics. 2020. vol. 9. no. 5. 748. DOI:10.3390/electronics9050748

[12] Fouda J. S. A. E., Bodo B., Sabat S. L., Effa J. Y. A modified 0-1 test for chaos detection in oversampled time series observations. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. vol. 24. no. 5. 1450063. DOI:10.1142/S0218127414500631

[13] Wontchui T. T., Effa J. Y., Fouda H. P. E., Fouda, J. S. A. E. Dynamical behavior of Peter-De-Jong map using the modified (0-1) and 3ST tests for chaos. Annual Review of Chaos Theory. Bifurcations and Dynamical Systems. 2017. vol 7. 1-21.

[14] Kim V., Parovik R. Mathematical model of fractional Duffing oscillator with variable memory. Mathematics. 2020. vol. 8 no. 11, DOI:10.3390/math8112063

[15] Kim V., Parovik R. Application of the Explicit Euler Method for Numerical Analysis of a Nonlinear Fractional Oscillation Equation. Fractal and Fractional. 2022. vol. 6. no. 5, DOI:10.3390/fractalfract6050274

[16] Kim V., Parovik R. Some aspects of the numerical analysis of a fractional duffing oscillator with a fractional variable order derivative of the Riemann-Liouville type. AIP Conference Proceedings. 2022. vol. 2467. DOI:10.1063/5.0092344

[17] Kim V., Parovik R. Implicit finite-difference scheme for a Duffing oscillator with a derivative of variable fractional order of the Riemann-Liouville type. Mathematics. 2023. vol. 11, no. 3.DOI:10.3390/math11030558

[18] Kovacic I., Brennan M. J. The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour. New York: John Wiley & Sons, 2011, 623 p.

[19] Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators. Annalen der Physik. 2003. vol. 12. no. 11–12. 692–703.DOI:10.1002/andp.200310032
[20] Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. vol. 71. 231–243. DOI:10.1016/j.cnsns.2018.12.003
[21] Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review. Proceedings of the Royal Society A. 2020. vol. 476. no. 2234. 20190498. DOI:10.1098/rspa.2019.0498
[22] Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 (In Russian).
[23] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. vol. 204. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006, 523 p.
[24] Uchaikin V. V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. vol. I. Background and Theory. Berlin: Springer. 2013. 373 p. DOI:10.1007/978-3-642-33911-0
[25] Syta A., Litak G., Lenci, S., Scheffler M. Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2014. vol. 24. no. 1. DOI:10.1063/1.4861942
[26] Xin B., Li Y. 0-1 Test for Chaos in a Fractional Order Financial System with Investment Incentive. Abstract and Applied Analysis. 2013. vol. 2013. 876298. DOI:10.1155/2013/876298
[27] Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. Nonlinear Dynamics. 2002. vol. 29. no. (1-4). 3-22. DOI:10.1023/A:1016592219341
[28] Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system. ANZIAM Journal. 2005. vol. 47. 168-184. DOI:10.21914/anziamj.v47i0.1037
[29] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial. Mathematics. 2018. vol. 6. no. 2. 016. DOI:10.3390/math6020016.
[30] Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package. Journal of Physics: Conference Series. 2022. vol. 2373. 52022. DOI:10.1088/1742-6596/2373/5/052022

Information about author

Parovik Roman Ivanovich✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading researcher, laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Head of the International Integrative Research Laboratory of Extreme Phenomena of Kamchatka, Kamchatka State University named after Vitus Bering, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.