МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-30-38
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.95

Об одном классе нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности

Ф. М. Нахушева[1], М. А. Керефов[1], С. Х. Геккиева[2*] М. М. Кармоков[1]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173,
[2] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 а, Россия

Аннотация. Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений, в том числе уравнения теплопроводности, стали объектом исследований достаточно давно. Интерес к такого рода задачам вызван необходимостью дальнейшего развития теории краевых задач со смещением (задач Нахушева), а также в связи с их многочисленными приложениями. Настоящая статья посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости одного класса нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности. Рассмотрена задача отыскания регулярного решения уравнения теплопроводности с дробной производной Римана– Лиувилля в граничных условиях. Рассмотрена задача Коши для уравнения, эквивалентного исходному уравнению, при этом доказано, что рассматриваемая краевая задача редуцируется к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности при условии, что задача Коши имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условиям А. Н. Тихонова. При этом решение представимо в виде интегрального уравнения, содержащим функцию Барретта в ядре. Также редукцией к системе дифференциальных уравнений с дробной производной Римана– Лиувилля решается вопрос единственности и существования решения поставленной задачи, когда в условии стоят значения решения на другом конце. Полученные в работе результаты послужат основой для дальнейшего исследования нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений параболического типа, лежащих в основе математического моделирования процессов в системах с фрактальной структурой, а также развития теории дифференциальных уравнений дробного порядка.

Ключевые слова: класс нелокальных краевых задач, условия Тихонова, регулярное решение, задача Коши, однородная задача, оператор дробного дифференцирования, дифференциальные уравнения дробного порядка.

Получение: 28.06.2023; Исправление: 27.10.2023; Принятие: 01.11.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Нахушева Ф. М., Керефов М. А., Геккиева С. Х., Кармоков М. М. Об одном классе нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 44. № 3. С. 30-38. EDN: WFBWCX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-30-38.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru, kerefov@mail.ru, gekkieva_s@mail.ru, mkarmokov@yandex.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-30-38

Research Article

Full text in Russian

MSC 35D99

On a Class of Non-Local Boundary Value Problems for the Heat Equation

***F. M. Nakhusheva*[1], *M. A. Kerefov*[1], *S. Kh. Gekkieva*[2*], *M. M. Karmokov*[1]**

[1] Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, 360004, Nalchik, Chernyshevsky st., 173, Russia

[2] Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. Non-local boundary value problems for parabolic equations, including the equations of thermal conductivity, have been the object of research for a long time. Interest in such problems is caused by the need for further development of the theory of boundary value problems with displacement (Nakhushev's problems), as well as in connection with their numerous applications. This article is devoted to the study of the question of the unambiguous solvability of one class of nonlocal boundary value problems for the heat equation. The problem of finding a regular solution of the thermal conductivity equation with a fractional Riemann – Liouville derivative under boundary conditions is considered. The Cauchy problem for an equation equivalent to the original equation is considered, and it is proved that the boundary value problem under consideration is reduced to the first boundary value problem for the heat equation, provided that the Cauchy problem has a unique solution in the class of functions satisfying the conditions of A. N. Tikhonov. In this case, the solution is represented as an integral equation containing the Barrett function in the kernel. Also, by reducing to a system of differential equations with a fractional Riemann – Liouville derivative, the question of the uniqueness and existence of a solution to the problem is solved when the values of the solution at the other end are in the condition. The results obtained in this work will serve as a basis for further research of nonlocal boundary value problems for parabolic differential equations underlying mathematical modeling of processes in systems with fractal structure, as well as the development of the theory of fractional differential equations.

Key words: class of nonlocal boundary value problems, Tikhonov conditions, regular solution, Cauchy problem, homogeneous problem, fractional differentiation operator, fractional differential equations.

Received: 28.06.2023; Revised: 27.10.2023; Accepted: 01.11.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Nakhusheva F. M., Kerefov M. B., Gekkieva S. Kh., Karmokov M. M. On a class of non-local boundary value problems for the heat equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **44**: 3, 30-38. EDN: WFBWCX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-30-38.

Funding. The study was carried out without support from foundations

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

***Correspondence:** E-mail: fatima-nakhusheva@mail.ru, kerefov@mail.ru, gekkieva_s@mail.ru, mkarmoko

Введение

Нелокальные задачи возникают во многих областях физики, биологии, теории влагопереноса. К первым работам по нелокальным задачам следует отнести работы Л. И. Камынина, А. Ф. Чудновского, В. А. Стеклова. К более поздним работам относятся работы А. В. Бицадзе, А. А. Самарского, А. М. Нахушева, Е. И. Моисеева, Н. И. Ионкина и др.

Предложенные А. М. Нахушевым в 1969 году нелокальные задачи нового типа положили начало важному этапу в становлении и развитии теории краевых задач, которые были названы краевыми задачами со смещением, а впоследствии — задачами Нахушева. Они обобщают задачу Трикоми и включают в себя класс задач с самосопряженными операторами. В работах, исследующих задачи со смещением для уравнений смешанного типа, краевые условия обычно содержат классические операторы. А в нелокальных краевых задачах содержатся операторы более сложной структуры и операторы дробного интегро-дифференцирования.

В последние годы появились работы по численным методам решения краевых задач с нелокальными условиями. Разработанная А. А. Самарским общая теория устойчивости разностных схем не применима к нелокальным задачам. Это связано с тем, что не имеет место положительность и самосопряженность соответствующих операторов, входящих в каноническую форму разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи с нелокальными условиями. Численным, в основном разностным, методам исследования нелокальных задач посвящены работы А. В. Гулина, Н. И. Ионкина, В. А. Морозова, В. Л. Макарова, М. Х. Шханукова-Лафишева и др. [5, 10]. Разностным методам решения нелокальных краевых задач для уравнений теплопроводности посвящены работы [6–9].

Постановка задачи

В области $\Omega_l = \{(x, y) : 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_y = u_{xx}. \tag{1}$$

Задача N_∞. *Найти регулярное и ограниченное в области* $\Omega_\infty = \{(x, y) : 0 < x < \infty,\ 0 < y < T\}$ *решение* $u(x, y)$ *со следующими свойствами:*

1. Функция $u(x, y)$ *является непрерывной при* $0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le T$*;*

2. Производная $u_x(x, y)$ *— непрерывна при* $0 \le x < \infty,\ 0 < y < T$ *и* $u_x(0, y) \in L[0, T]$*;*

3. $u(0, y)$ *имеет непрерывные и суммируемые при* $0 < y < T$ *производные порядка* ≤ 1*;*

4. Функция $u(x, y)$ *удовлетворяет условиям*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \le x < \infty, \tag{2}$$

$$\int_0^1 a(y,\alpha)D_{0y}^{\alpha}u(0,y)d\alpha + \sum_{i=0}^{m} a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}u(0,y) + b(y)u_x(0,y) = c(y), \quad 0 < y < T, \quad (3)$$

где $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m < 1$; D_{0y}^{α} — *оператор дробного дифференцирования порядка* α *с началом в точке* 0 *и концом в точке* y; $\varphi(x)$, $\alpha_i(y)$, $i = 0,1,\ldots,m$, $a(y,\alpha)$, $b(y)$ *и* $c(y)$ — *заданные непрерывные и ограниченные в замкнутой области их определения функции.*

Единственность и существование решения

Лемма 1. *Пусть существует решение* $u(x,y)$ *задачи* N_∞ *и* $\tau(y) = u(0,y)$, $\nu(y) = u_x(0,y)$. *Тогда пара* (τ,ν) *является решением следующей системы дифференциальных уравнений дробного порядка*

$$\int_0^1 a(y,\alpha)D_{0y}^{\alpha}\tau(y)d\alpha + \sum_{i=0}^{m} a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}\tau(y) + b(y)\nu(y) = c(y), \quad 0 < y < T, \quad (4)$$

$$D_{0y}^{1/2}\tau(y) + \nu(y) = \Phi(y), \quad 0 < y < T, \quad (5)$$

где

$$\Phi(y) = 2D_{0y}^{1/2}N_{0\infty}^{0,y}\varphi(x),$$

$$N_{0\infty}^{0,y}\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_0^\infty \varphi(x)\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right)dx.$$

Лемма 1 является следствием условий (3), (4) и следующей теоремы, доказанной А. М. Нахушевым [1].

Теорема 1. *Пусть* $u(x,y)$ — *регулярное в области* Ω_∞ *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям А. Н. Тихонова*

$$u(x,y) = O\left(e^{\varepsilon x^2}\right), \quad u_x(x,y) = O\left(e^{\varepsilon x^2}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

и обладающее тем свойством, что

$$u(x,y) \in C(0 \le x < \infty,\ 0 < y \le T),\ u_x(x,y) \in C(0 \le x < \infty,\ 0 \le y \le T),\ u_x(0,y) \in L[0,T].$$

Тогда

$$u(0,y) + D_{0y}^{-1/2}u_x(0,y) = 2N_{0\infty}^{0,y}u(x,0).$$

Из (4) и (5) вытекает, что след $\tau(y)$ искомого решения $u(x,y)$ задачи N_∞ является решением непрерывного дифференциального уравнения

$$\int_0^1 a(y,\alpha)D_{0y}^{\alpha}\tau(y)d\alpha + \sum_{i=0}^{m} a_i(y)D_{0y}^{\alpha_i}\tau(y) - b(y)D_{0y}^{1/2} = f(y), \quad (6)$$

где $f(y) = c(y) - b(y)\Phi(y)$.

Как видно из (6) в случае, когда

$$a(y,\alpha)\equiv 0,\ \ a_1(y)=a_2(y)=\ldots=a_m(y),\ \ \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m,$$

искомая функция представляет собой решение дифференциального уравнения дробного порядка

$$a_0(y)\tau(y)+a_1(y)D_{0y}^{\alpha_1}\tau(y)-b(y)D_{0y}^{1/2}\tau(y)=f(y), \tag{7}$$

при $\alpha_1=1/2$ из (7) имеем

$$[a_1(y)-b(y)]\,D_{0y}^{1/2}\tau(y)+a_0(y)\tau(y)=f(y). \tag{8}$$

Вариант этого частного случая задачи N_∞, когда $a_1\equiv const\neq 1$, $b\equiv 1$, $\alpha=1/2$ был объектом исследования работы [2].

Уравнение (8) в случае, когда

$$a_1(y)\neq b(y),\ \ a_0(y)/\left[a_1(y)-b(y)\right]=\lambda=const$$

можно записать в виде

$$D_{0y}^{1/2}\tau+\lambda\tau=h(y), \tag{9}$$

где $h(y)=f(y)/\left[a_1(y)-b(y)\right]$.

Если $h(y)\in L[0,T]$, то любое решение (9) имеет вид (см. [3])

$$\tau(y)=k_1U_1(y;\lambda)+\int\limits_0^y h(t)U_1(y-t;\lambda)dt, \tag{10}$$

где $k_1=const$,

$$U_1(y;\lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{j-1}y^{j/2-1}}{\Gamma(j/2)} \tag{11}$$

— функция Барретта [11].

При $j=1$ с учётом (11) из (10) имеем

$$\tau(y)=\frac{k_1}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{h(t)}{(y-t)^{1/2}}dt.$$

Переходя к пределу, видно, что

$$\lim_{y\to 0}\sqrt{y}\tau(y)=k_1/\sqrt{\pi}.$$

Поэтому $k_1=0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{y\to 0}\sqrt{y}\tau(y)=0. \tag{12}$$

Единственное решение однородной задачи Коши (12) для уравнения (9) задается формулой

$$\tau(y)=\int\limits_0^y h(t)U_1(y-t;\lambda)dt.$$

На основании теоремы о среднем значении существует такое $\alpha_{m+1} \in [0,1]$, что уравнение (6) эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=0}^{m+1} a_i(y) D_{0y}^{\alpha_i} \tau - b(y) D_{0y}^{1/2} \tau = f(y), \tag{13}$$

где $a_{m+1}(y) = a(y, \alpha_{m+1})$.

Вопрос разрешимости уравнений вида (13) исследован в работе [4]. Поэтому, если задача Коши $\tau(0) = \varphi(0)$ для уравнения (13) имеет и притом единственное решение, то задача N_∞ редуцируется к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности.

Редукцией к системе дифференциальных уравнений дробного порядка решается вопрос единственности и существования решения задачи N_l, $l < \infty$, когда на участке $x = l$, $0 < y < T$ задается условие вида (3), где вместо $u(0,y)$ и $u_x(0,y)$ стоят $u(l,y)$ и $u_x(l,y)$ соответственно. В этом случае существенно используется необходимое нелокальное условие, которому удовлетворяют все решения уравнения (1) [1].

Заключение

Сформулирован класс нелокальных краевых задач для уравнения теплопроводности, исследован вопрос о её однозначной разрешимости. Если задача Коши для уравнения, эквивалентного исходному уравнению, имеет единственное решение, то задача N_∞ редуцируется к первой краевой задаче для уравнения теплопроводности.

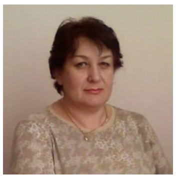
Также редукцией к системе дифференциальных уравнений дробного порядка решается вопрос единственности и существования решения задачи N_l, когда в условии стоят значения решения на другом конце.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
2. Шхануков М. Х., Керефов А. А., Березовский А. А. Краевые задачи уравнений теплопроводности с дробной производной в граничных условиях и разностные методы их численной реализации, *Украинский математический журнал*, 1993. Т. 45, № 9, С. 1289–1298.
3. Нахушев А. М. *Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях.* Нальчик: Логос, 1995. 50 с.
4. Нахушев А. М. Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегрального уравнения Вольтерра третьего рода, *Дифференциальные уравнения*, 1974. Т. 10, № 1, С. 100–111.
5. Шхануков М. Х., Митропольский Ю. А., Березовский А. А. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения, *Украинский математический журнал*, 1995. Т. 47, № 6, С. 790–800.
6. Алиханов А. А. Нелокальные краевые задачи в дифференциальной и разностной трактовках, *Дифференциальные уравнения*, 2008. Т. 44, № 7, С. 924–931.
7. Нахушева Ф. М., Кудаева Ф. Х., Кайгермазов А. А., Кармоков М. М. Разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоёмкостью, *Современные проблемы науки и образования (Электронный научный журнал)*, 2015. № 2-2, С. 1–7.

8. Нахушева Ф. М., Джанкулаева М. А., Нахушева Д. А. Уравнение теплопроводности с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью, *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*, 2017. № 8-1, С. 22–27.
9. Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Джанкулаева М. А., Гучаева З. Х. Численное решение уравнения диффузии с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью / *Сборник трудов Международной научной конференции*, Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики, 2019, С. 104–110.
10. Керефов М. А., Нахушева Ф. М., Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения влагопереноса Аллера – Лыкова с сосредоточенной теплоёмкостью, *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2018. Т. 24, № 3, С. 23–29.
11. Barrett J. H. Dielectric Constant in Perovskite Type Crystals, *Physical Review*, 1952. vol. 86, no. 1, pp. 118.

Информация об авторах



Нахушева Фатима Мухамедовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия, fatima-nakhusheva@mail.ru, ORCID 0000-0002-3750-1445.

Керефов Марат Асланбиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия, kerefov@mail.ru, ORCID 0000-0002-7442-5402.

Геккиева Сакинат Хасановна – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, gekkieva_@mail.ru, ORCID 0000-0002-2135-2115.

Кармоков Мухамед Мацевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия, mkarmokov@yandex.ru, ORCID 0000-0001-5189-6538.

References

[1] Nakhushev A. M. Equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaja shkola, 1995. 301 p. [Nahushev A. M. Uravnenija matematicheskoj biologii. M.: Vysshaja shkola, 1995. 301 s.] (In Russian).

[2] Shkhanukov M. Kh., Kerefov A. A., Berezovsky A. A. Boundary value problems of heat conduction equations with fractional derivative in boundary conditions and difference methods of their numerical implementation, Ukrainian Mathematical Journal. 1993. Vol. 45, no. 9. pp. 1289–1298. [Shhanukov M. H., Kerefov A. A., Berezovskij A. A. Kraevye zadachi uravnenij teploprovodnosti s drobnoj proizvodnoj v granichnyh uslovijah i raznostnye metody ih chislennoj realizacii, Ukrainskij matematicheskij zhurnal. 1993. T. 45, № 9. S. 1289–1298.] (In Russian).

[3] Nakhushev A. M. On the equations of state of continuous one-dimensional systems and their applications. Nalchik: Logos, 1995. 50 p . [Nahushev A. M. Ob uravnenijah sostojanija nepreryvnyh odnomernyh sistem i ih prilozhenijah. Nal'chik: Logos, 1995. 50 s.] (In Russian).

[4] Nakhushev A. M. Inverse problems for degenerate equations and Volterra integral equation of the third kind, Differential equations. 1974. Vol. 10, no. 1. pp. 100–111. [Nahushev A. M. Obratnye zadachi dlja vyrozhdajushhihsja uravnenij i integral'nogo uravnenija Vol'terra tret'ego roda, Differencial'nye uravnenija. 1974. T. 10, № 1. S. 100–111.] (In Russian).

[5] Shkhanukov M. H., Mitropolsky Yu. A., Berezovsky A. A. On a non-local problem for a parabolic equation, Ukrainian Mathematical Journal. Kiev, 1995. Vol. 47, no. 6. pp. 790–800. [Shkhanukov M. H., Mitropolsky Yu. A., Berezovsky A. A. Ob odnoj nelokal'noj zadache dlja parabolicheskogo uravnenija, Ukrainskij matematicheskij zhurnal. Kiev, 1995. T. 47, № 6. S. 790-–800.] (In Russian).

[6] Alikhanov A. A. Non-local boundary value problems in differential and difference interpretations, Differential Equations. 2008. vol. 44, no. 7. pp. 924–931. [Alihanov A. A. Nelokal'nye kraevye zadachi v differencial'noj i raznostnoj traktovkah, Differencial'nye uravnenija. 2008. T. 44, № 7. S. 924–931.] (In Russian).

[7] Nakhusheva F. M., Kudaeva F. H., Kaigermazov A. A., Karmokov M. M. Difference scheme for fractional order diffusion equation with concentrated heat capacity. Modern problems of science and education (Electronic scientific Journal). Moscow: RAE Publishing House. 2015, no. 2-2. pp. 1–7. [Nakhusheva F. M., Kudaeva F. H., Kaigermazov A. A., Karmokov M. M. Raznostnaja shema dlja uravnenija diffuzii drobnogo porjadka s sosredotochennoj teplojomkost'ju, Sovremennye problemy nauki i obrazovanija (Jelektronnyj nauchnyj zhurnal). M.: Izd. RAE. 2015, № 2-2. S. 1–7.] (In Russian).

[8] Nakhusheva F. M., Dzhankulaeva M. A., Nakhusheva D. A. The equation of thermal conductivity with a fractional derivative in time at a concentrated heat capacity, International Journal of Applied and Fundamental Research. 2017. No. 8-1. pp. 22–27. [Nakhusheva F. M., Dzhankulaeva M. A., Nakhusheva D. A. Uravnenie teploprovodnosti s drobnoy proizvodnoy po vremeni pri kontsentrirovannoy teploemkosti, Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh i fundamental'nykh issledovaniy. 2017. № 8-1. S. 22-27.] (In Russian).

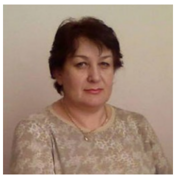
[9] Nakhusheva F. M., Vodakhova V. A., Dzhankulaeva M. A., Guchaeva Z. H. Numerical solution of the diffusion equation with a fractional derivative in time with a concentrated heat capacity. In the collection: Modern problems of applied mathematics, computer science and mechanics, Materials of the International Scientific Conference. 2019. pp. 104–110. [Karmokov M. M., Buzdova A. V. Chislennoe reshenie uravneniya diffuzii s drobnoy proizvodnoy po vremeni s sosredotochennoy teploemkost'yu. V sbornike: Sovremennye

problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki, Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. 2019. S. 104-110.] (In Russian).

[10] Kerefov M. A., Nakhusheva F. M., Gekkieva S. H. Boundary value problem for the generalized Aller–Lykov moisture transfer equation with concentrated heat capacity, Bulletin of Samara University. Natural Science series. 2018. Vol. 24. No. 3. pp. 23-29. [Kerefov M. A., Nakhusheva F. M., Gekkieva S. H. Kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya vlagoperenosa Allera – Lykova s sosredotochennoy teploemkost'yu, Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya. 2018. T. 24. № 3. S. 23-29.] (In Russian).

[11] Barrett J. H. Dielectric Constant in Perovskite Type Crystals, Physical Review. 1952. vol. 86, issue 1. pp. 118.

Information about authors



Nakhusheva Fatima Mukhamedovna – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Nalchik, Russia, fatima-nakhusheva@mail.ru, ORCID 0000-0002-3750-1445.

Kerefov Marat Aslanbievich – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Nalchik, Russia, kerefov@mail.ru, ORCID 0000-0002-7442-5402.

Gekkieva Sakinat Khasanovna – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia, gekkieva_s@mail.ru, ORCID 0000-0002-2135-2115.

Karmokov Mukhamed Matsevich – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Nalchik, Russia, mkarmokov@yandex.ru, ORCID 0000-0001-5189-6538.