


ФИЗИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-130-143>

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 551.16



К вопросу аналитической оценки некоторых внутренних размеров Земли

*С. О. Гладков**

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4, Россия

Аннотация. С помощью модельного представления о движении ядра Земли в вязком континууме, получено его уравнение движения, и аналитически найден линейный размер барисферы. Дана вполне адекватная оценка расстояния от центра Земли до центра масс ядра, не противоречащая современным геодезическим представлениям. Показано, что предложенная модель, не связанная с измерением скоростей продольных и поперечных сейсмических волн, позволяет вполне удовлетворительно определить ряд основных геометрических параметров барисферы и ядра. Все проведенные вычисления основаны на идее применения подвижного базиса, в котором динамические уравнения движения имеют весьма компактный и значительно более простой вид в отличие от декартовых координат. Помимо этого, главное преимущество подобного подхода связано еще и с возможностью аналитического решения полученных уравнений, что дает нам вполне обоснованную и объективную модель, позволяющую предсказать ряд геометрических параметров, касающихся внутреннего строения Земли, и дающих возможность их численной оценки. Описанный подход можно применить к решению отдельных геофизических задач, в качестве одной из которых можно рассмотреть, например, расплавленное внешнее ядро в виде ньютоновской жидкости, динамическая вязкость которой возрастает с увеличением расстояния от центра Земли.

Ключевые слова: уравнения движения, плотность Земли, литосфера, ядро Земли, барисфера.

Получение: 24.08.2023; Исправление: 19.09.2023; Принятие: 01.11.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Гладков С. О. К вопросу аналитической оценки некоторых внутренних размеров Земли // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 44. № 3. С. 130-143. EDN: BGYLAW. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-130-143>.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: ✉ E-mail: sglad51@mail.ru


Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Гладков С. О., 2023

© ИКИР ДВО РАН, 2023 (оригинал-макет, дизайн, составление)



PHYSICS

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-130-143>

Research Article

Full text in Russian

MSC 00A79



To the Question of an Analytical Estimate of Some Internal Sizes of the Earth

*S. O. Gladkov**

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

Abstract. Using a model representation of the motion of the Earth's core in a viscous continuum its equation of motion is obtained and the linear size of the barispheric is analytically found. A completely adequate estimate of the distance from the center of the Earth to the center of mass of the core is given which does not contradict modern geodetic ideas. It is shown that the proposed model, which is not related to the measurement of the velocities of longitudinal and transverse seismic waves, makes it possible to determine quite satisfactorily all the basic geometric parameters of the barisphere. In addition, the main advantage of this approach is also associated with the possibility of analytically solving the resulting equations, which gives us a completely justified and objective model that allows us to predict a number of geometric parameters relating to the internal structure of the Earth and making it possible to evaluate them numerically. The described approach can be applied to solving individual geophysical problems, one of which can be considered, for example, the molten outer core in the form of a non-Newtonian fluid, the dynamic viscosity of which increases with increasing distance from the center of the Earth.

Key words: equations of motion, density of the Earth, lithosphere, core of the Earth, barisphere.

Received: 24.08.2023; Revised: 19.09.2023; Accepted: 01.11.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Gladkov S. O. To the question of an analytical estimate of some internal sizes of the Earth. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, 44: 3, 130-143. EDN: BGYLAW. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-130-143>.

Funding. The study was carried out without support from foundations

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

*Correspondence:  E-mail: sglad51@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Gladkov S. O., 2023

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2023 (original layout, design, compilation)



Введение

Вопрос, на котором мы хотели бы остановимся в настоящем сообщении, относится к общим проблемам физики Земли, и посвящен оценке времени вращения Земли относительно собственной оси. Аналитического решения этой задачи мы не обнаружили во множестве просмотренных нами публикациях и монографиях [1–10], что заставило нас обратиться к этой теме с несколько иной точки зрения. Действительно, общепринятыми в настоящее время подходами к исследованию внутренней структуры Земли являются методики, предложенные Гутенбергом и Махоровичем, основанные на измерениях скоростей продольных и поперечных сейсмических волн (см., например, [11], [12]). С помощью такого подхода были определены основные геометрические характеристики внутреннего строения Земли и размеры жидкого и твердого ядра.

Время оборота Земли вокруг своей оси объясняется предположением о несовпадении плоскостей экватора и эклиптики, что при учете взаимодействия с Луной и приводит к вращающему моменту, порождающему, в свою очередь, суточное вращение Земли.

Ниже будут приведены подробные аналитические выкладки, с помощью которых можно также объяснить суточное вращение Земли вокруг своей оси, но не с точки зрения несовпадения плоскостей экватора и эклиптики, а с точки зрения внутренней динамики движения твердого ядра.

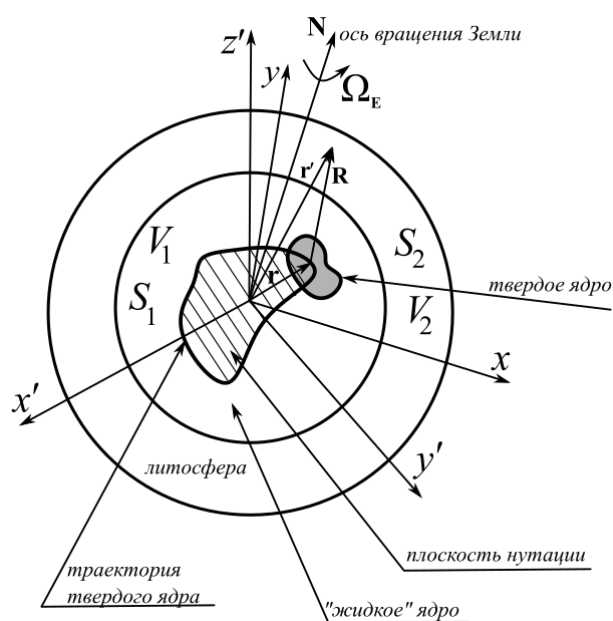


Рис. 1. Схематическое изображение внутреннего строения Земли.

[Fig. 1. Schematic representation of the internal structure of the Earth.]

Постановку нашей задачи удобно проиллюстрировать с помощью рис.1, на котором представлено схематическое изображение внутреннего строения Земли. Область 1 представляет собой область расплава (барисфера), в состав которой по

нашей терминологии считается включенным «жидкое ядро» + нижняя мантия, а относительно твердое ядро будем обозначать буквой N. Его центр масс расположен на некотором виртуальном расстоянии r (меняющимся в силу прецессии ядра вокруг оси нутации) от геометрического центра Земли, которую будем считать сферой.

Цифра 2 и все величины с этим индексом везде далее относятся к твердофазной области Планеты (литосфера).

Внутреннюю полость, заполненную расплавленным «жидким ядром» (барисфера), будем, также как и Землю, считать сферической. Что касается твердого ядра, то в нашем рассмотрении его форма не важна, и для него будет введен только центр масс и расстояние до него от начала координат (см. рис.1).

Задача будет решаться в двухмерном подвижном базисе, плоскость которой перпендикулярна априори известному направлению оси вращения Земли.

Основные уравнения и их анализ

Как видно из рис.1, сила гравитационного притяжения, действующая на ядро, формируется благодаря двум механизмам взаимодействия. Первый механизм – это взаимодействие твердого ядра с литосферой, а второй – взаимодействие твердого ядра с жидким ядром. Рассмотрим их по порядку.

1. Взаимодействие твердого ядра с литосферой.

В этом случае имеем

$$F_1 = -\nabla U = G m_N \rho_2 \int_{V-V_1} \nabla_r \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) dV_2, \quad (1)$$

где m_N – масса твердого ядра, G – гравитационная постоянная, V – полный объем Земли, V_1 – объем, занимаемый жидким ядром, то есть $V_2 = V - V_1$.

Поскольку

$$\nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3},$$

то

$$F_1 = -G m_N \rho_2 \int_{V-V_1} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} dV_2. \quad (2)$$

Для вычисления интеграла в (2) удобно воспользоваться сферическими координатами, полярную ось которых направим по фиксированному вектору \mathbf{r} . В результате

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 &= -Gm_N\rho_2 \int_{V-V_1} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} dV_R = \\
&= -2\pi Gm_N\rho_2 r \int_b^{R_0} R^2 dR \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(R^2 - 2rR \cos \theta + r^2)^3}} = \\
&= -2\pi Gm_N\rho_2 \frac{r}{r} \int_b^{R_0} R dR \left(\frac{1}{|R - r|} - \frac{1}{r + R} \right) = -2\pi Gm_N\rho_2 r \ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

где $0 \leq r < b$, а b — расстояние от центра Земли до границы барисферы.

2. Взаимодействие твердого ядра с жидким

В этом случае почти аналогично предыдущему имеем

$$\mathbf{F}_2 = -Gm_N\rho_1 \int_{V_1} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'.$$

Простое вычисление в сферических координатах дает

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{4\pi}{3} Gm_N\rho_1 \mathbf{r}. \tag{4}$$

Значит, с учетом (3) и (4) уравнение движения ядра $m_N \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ после сокращения на m_N будет иметь вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \left[\ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] \mathbf{r} = 0, \tag{5}$$

где частота $\omega_0 = \sqrt{2\pi G\rho_2}$.

Решение уравнения (5) удобно искать в проекциях на орты $\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}$ мгновенного базиса, показанного на рис.2.

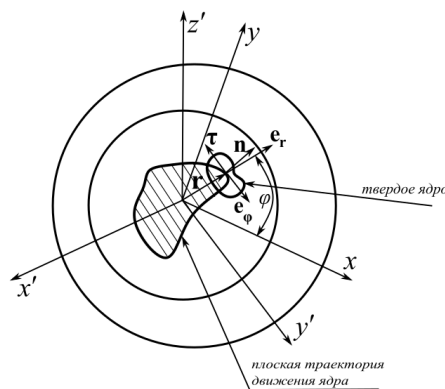


Рис. 2. Схематическое изображение внутреннего строения Земли в проекциях.
 [Fig. 2. Schematic representation of the internal structure of the Earth in projections.]

Чтобы их найти, следует вспомнить, что скорость (см., например, [13])

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}, \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{r_0}\mathbf{n}, \quad (7)$$

где r_0 — радиус кривизны в данной точке траектории.

Далее, поскольку $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, где \mathbf{e}_r — единичный вектор, направленный вдоль радиуса — вектора \mathbf{r} , то с учетом (7) уравнение (5) примет вид

$$\dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{r_0}\mathbf{n} + \left[\ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] r\omega_0^2 \mathbf{e}_r = 0, \quad (8)$$

Чтобы разложить теперь базис $\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi$ по базису $\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}$ запишем выражение для скорости \mathbf{v} в базисе $\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\varphi$.

Имеем для нее

$$\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi. \quad (9)$$

Откуда немедленно следует, что

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{r}}{v}\mathbf{e}_r + \frac{r\dot{\varphi}}{v}\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{n} = -\frac{r\dot{\varphi}}{v}\mathbf{e}_r + \frac{\dot{r}}{v}\mathbf{e}_\varphi. \end{cases} \quad (10)$$

А интересующее нас обратное преобразование будет, следовательно, таким

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \frac{\dot{r}}{v}\boldsymbol{\tau} - \frac{r\dot{\varphi}}{v}\mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_\varphi = \frac{r\dot{\varphi}}{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{r}}{v}\mathbf{n}. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя теперь верхнюю формулу в (11) в уравнение (8), будем иметь

$$\dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{r_0}\mathbf{n} + \frac{r\omega_0^2}{v} \left[\ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] (r\boldsymbol{\tau} - r\dot{\varphi}\mathbf{n}) = 0. \quad (12)$$

Отсюда в проекциях на орты $\boldsymbol{\tau} - \mathbf{n}$ немедленно получается следующая система уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} + \frac{r\dot{r}\omega_0^2}{v} \left[\ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] = 0, \\ \frac{v^3}{r_0} - r^2\dot{\varphi}\omega_0^2 \left[\ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + \frac{2}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Верхнее уравнение, как это и должно быть, представляет собой закон сохранения энергии, и его первый интеграл есть

$$v^2 + \omega_0^2 \left[r^2 \ln \left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2} \right) + b^2 \ln (b^2 - r^2) - R_0^2 \ln (R_0^2 - r^2) + \frac{\rho_1 r^2}{3\rho_2} \right] = C_1 = \text{const.} \quad (14)$$

Используя граничное условие $v(0) = 0$, то есть при $r = 0$ линейная скорость в центре Земли равна нулю, из решения (14) получаем

$$v^2 = \omega_0^2 \left[R_0^2 \ln(R_0^2 - r^2) - r^2 \ln\left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2}\right) - b^2 \ln(b^2 - r^2) + \frac{\rho_1 r^2}{3\rho_2} + 2R_0^2 \ln R_0 - 2b^2 \ln b \right], \quad (15)$$

где учтено, что $C_1 = 2R_0^2 \ln R_0 - 2b^2 \ln b$.

Чтобы теперь воспользоваться нижним уравнением в системе (13), запишем общее выражение для радиуса кривизны в полярных координатах. Согласно, например, [14], имеем

$$r_0 = \pm \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr'}, \quad (16)$$

где «штрих» указывает на дифференцирование по полярному углу φ .

Поскольку линейная скорость через полярные координаты выражается как

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}, \quad (17)$$

то с учетом (16) и (17) находим из нижнего уравнения системы (13)

$$\pm (r^2 + 2r'^2 - rr') \dot{\varphi}^2 - r^2 \omega_0^2 \left[\ln\left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2}\right) + \frac{2\rho_1}{3\rho_2} \right] = 0. \quad (18)$$

Из уравнения (18) видно, что физический смысл может иметь только знак «плюс».

Поэтому отсюда следует

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{r^2 \omega_0^2}{(r^2 + 2r'^2 - rr')} \left[\ln\left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2}\right) + \frac{2\rho_1}{3\rho_2} \right]. \quad (19)$$

Согласно (15) и (17) с учетом (19) приходим к уравнению первого порядка, описывающему траекторию движения твердого ядра с учетом всех действующих на него гравитационных сил

$$\frac{r^2 + 2r'^2 - rr'}{r^2 + r'^2} = \frac{1}{\psi(r)}, \quad (20)$$

где функция

$$\psi(r) = \frac{\left[R_0^2 \ln(R_0^2 - r^2) - r^2 \ln\left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2}\right) - b^2 \ln(b^2 - r^2) + \frac{\rho_1 r^2}{3\rho_2} + 2R_0^2 \ln R_0 - 2b^2 \ln b \right]}{r^2 \left[\ln\left(\frac{R_0^2 - r^2}{b^2 - r^2}\right) + \frac{2\rho_1}{3\rho_2} \right]} \quad (21)$$

Решая уравнение (20) относительно производной, получаем

$$r' = \frac{r\psi}{2(2\psi - 1)} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3\psi - \psi^2 - 1}}{\psi} \right). \quad (22)$$

Как видно из уравнения (22), в силу положительности подкоренного выражения функция $\psi(r)$ должна быть «зажата» условиями

$$\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq \psi(r) \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \quad (23)$$

Неравенства (23), как и должно быть, указывают на замкнутость траектории движения. Поскольку уравнение (22) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными, то фактически его решение можно считать заданным в виде неявной квадратурной зависимости $\varphi(r)$, а именно

$$\varphi(r) = 2 \int_{r_{\min}}^r \left[\frac{r\psi}{(2\psi - 1)} \left(1 \pm \frac{\sqrt{3\psi - \psi^2 - 1}}{\psi} \right) \right]^{-1} dr. \quad (24)$$

Для определения внутреннего размера внешнего жидкого ядра b , в котором «плавает» твердое ядро, воспользуемся условием минимума полной внутренней энергии рассматриваемой системы: «твердое ядро + жидкое ядро».

Формула (19) говорит нам о том, что частота неравномерного вращения ядра существенно отличается от собственной частоты гравитационных колебаний Земли. Причем плоскость этого вращения определяет перпендикулярное к ней направление оси вращения. Поскольку в процессе многомиллионных лет эволюции, связанных с различными внутренними катаклизмами, происходящими в недрах Земли, невозможно аналитически точно предсказать расположение плоскости вращения ядра, обусловленного гравитационным взаимодействием, природа которого восходит еще ко временам становления Планеты из раскаленного вращающегося газового облака, то направление оси вращения Земли (ось нутации) по отношению к плоскости ее движения вокруг Солнца может быть определена, к сожалению, только экспериментально.

Оценка линейного размера области вязкого континуума b

Размер области «жидкого ядра» (цифра 1 на рис.1) мы можем определить, исходя из условия минимума энергии взаимодействия, с учетом специфики задачи (см. ниже). В нашем распоряжении имеются три основных гравитационных взаимодействия. Одно из них представляет собой взаимодействие твердого ядра с литосферой, другое – взаимодействие с ней «жидкого ядра» и третье – взаимодействие твердого ядра с жидким. Рассмотрим их по порядку.

А). Гравитационное взаимодействие твердого ядра с литосферой (см. рис.1) Будет обозначать массу твердого ядра как m_N . Тогда

$$U_1(r) = -Gm_N \rho_2 \int_{V_2} \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (25)$$

Этот интеграл легко вычисляется путем перехода в сферическую систему координат. В результате имеем из (25)

$$\begin{aligned} U_1(r) &= -2\pi G m_N \rho_2 \int_b^{R_0} r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r'^2 - 2rr' \cos \theta + r^2}} = \\ &= -\frac{2\pi G m_N \rho_2}{r} \int_b^{R_0} r' dr' (r + r' - |r' - r|) = -2\pi m_N \rho_2 G (R_0^2 - b^2). \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что взятие градиента от выражения (26) приводит к равенству $F_1 = 0$. Однако, вычисления, приведенные выше в выражении (3), указывают на то, что эта сила не равна нулю и, более того, она должна зависеть от радиального расстояния, хотя потенциальная энергия (26) найдена верно и является постоянной. В сказанном можно легко убедиться непосредственно из вычислений (3) и (26).

В). Гравитационное взаимодействие «жидкого ядра» с литосферой Вводя плотность жидкой фазы ρ_1 , имеем согласно рис.1

$$U_2 = -G \int \frac{dm' dm''}{R} = -G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dV' dV''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} = -G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} dV' \int_{V_2} \frac{dV''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|}.$$

Переходя во внутреннем интеграле к сферическим координатам, получаем

$$\begin{aligned} U_2 &= -G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} dV' \int_{V_2} \frac{dV''}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|} = -2\pi G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} dV' \int_b^{R_0} r''^2 dr'' \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r''^2 - 2r'r'' \cos \theta + r'^2}} = \\ &= -2\pi G \rho_1 \rho_2 \int_{V_1} \frac{dV'}{r'} \int_b^{R_0} r'' (r'' + r' - |r'' - r'|) dr''. \end{aligned}$$

Поскольку $r'' \geq r'$, а также учитывая, что объем $V_1 = \frac{4\pi b^3}{3}$, окончательно имеем

$$U_2(b) = -\frac{8\pi^2}{3} \rho_1 \rho_2 G b^3 (R_0^2 - b^2). \quad (27)$$

В). Взаимодействие «жидкого ядра» с твердым ядром
Для этого взаимодействия аналогично (26) находим

$$\begin{aligned} U_3(r) &= -2\pi G m_N \rho_1 \int_0^b r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r'^2 - 2rr' \cos \theta + r^2}} = \\ &= -\frac{2\pi G m_N \rho_1}{r} \int_0^b r' dr' (r + r' - |r' - r|) = \\ &= -\frac{2\pi G m_N \rho_1}{r} \left[\int_0^r r' dr' (r + r' - |r' - r|) + \int_r^b r' dr' (r + r' - |r' - r|) \right] = \\ &= -2\pi m_N \rho_1 G \left(b^2 - \frac{r^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Сумма выражений (26)-(26) с учетом «статической части» кинетической энергии твердого ядра и определяет интересующую нас полную энергию «основного состояния» системы. Однако, это еще не вся энергия, которую необходимо учесть. Дело в том, что поскольку в области «жидкого ядра» давление весьма велико (см. [11], [12]), то еще одно дополнительное слагаемое следует представить, как

$$U_3 = -P \left(V_1 - \frac{m_N}{\rho_N} \right), \quad (29)$$

где ρ_N – плотность твердого ядра.

Согласно решению (15), «статическая» часть кинетической энергии есть

$$E_c = 2\pi G \rho_2 m_N (R_0^2 \ln R_0 - b^2 \ln b). \quad (30)$$

В результате полная энергия должна определяться суммой пяти составляющих (26)-(30), то есть

$$\begin{aligned} E(b) = & 2\pi G \rho_2 m_N (R_0^2 \ln R_0 - b^2 \ln b) - \\ & - 2\pi m_N \rho_2 G (R_0^2 - b^2) - \frac{8\pi^2}{3} \rho_1 \rho_2 G b^3 (R_0^2 - b^2) - \\ & - 2\pi m_N \rho_1 G \left(b^2 - \frac{r^2}{3} \right) - P \left(\frac{4\pi b^3}{3} - \frac{m_N}{\rho_N} \right). \quad (31) \end{aligned}$$

Результат дифференцирования функции (31) по параметру b дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial b} = & -2\pi G \rho_2 m_N b \ln \left(\frac{b^2}{e} \right) + 4\pi m_N (\rho_2 - \rho_1) G b - \\ & - 8\pi^2 \rho_1 \rho_2 G b^2 \left(R_0^2 - \frac{5}{3} b^2 \right) - 4\pi P b^2 = 0. \quad (32) \end{aligned}$$

Откуда немедленно следует искомое уравнение для определения линейного размера внутреннего «жидкого ядра»

$$\ln \left(\frac{\lambda}{\sqrt{e}} \right) + \frac{3\rho_1}{2\bar{\rho}} \frac{M}{m_N} \lambda \left(1 - \frac{5}{3} \lambda^2 \right) + \frac{P R_0 \lambda}{G \rho_2 m_N} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (33)$$

где параметр

$$\lambda = \frac{b}{R_0} < 1, \quad (34)$$

и введена масса Земли $M = \frac{4\pi \bar{\rho} R_0^3}{3}$, где $\bar{\rho}$ – ее средняя плотность, которую можно положить равной $\bar{\rho} = 5.5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Как легко проверить из вида функции (31), вторая производная $\frac{\partial^2 E}{\partial b^2}$ в условиях выполнения уравнения (32), оказывается положительной, что действительно указывает на минимум выражения (31). Если считать массу твердого ядра не известной, то, к большому сожалению, аналитически решить уравнение (33) не удастся. Однако, если воспользоваться справочными экспериментальными

данными, которые позаимствованы нами из монографии [12], то массу ядра можно принять примерно равной значению $m_N \approx 1.9 \cdot 10^{27}$ г, а массу Земли равной $M \approx 6 \cdot 10^{27}$ г. Согласно [12] средняя плотность Земли $\bar{\rho} \approx 5.5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, плотность мантии $\rho_2 \approx 14.4 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$, а плотность «жидкого ядра» $\rho_1 \approx 12.2 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$. Давление в области «жидкого ядра» можно принять согласно [12] примерно равным $P \approx 1.4 \cdot 10^{11} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}$. Примем также, что $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{SGS}$, $R_0 \approx 6.38 \cdot 10^8$ см.

В результате подстановки всех этих численных значений в (33) приходим к такому уравнению

$$\ln \left(\frac{\lambda}{\sqrt{e}} \right) + 1.55\lambda (1 - 1.67\lambda^2) + 0.433\lambda = 0.3572. \quad (35)$$

Или окончательно

$$2\lambda - 2.59\lambda^3 + \ln \left(\frac{\lambda}{1.65} \right) = 0.3572. \quad (36)$$

Численное решение уравнения (36) показывает, что

$$\lambda \approx 0.6 \quad (37)$$

И, следовательно, согласно определению (33), искомый параметр

$$b \approx 3,83 \cdot 10^8 \quad (38)$$

То есть 3830 км. Приведенная оценка вполне неплохо коррелирует со всеми известными к настоящему моменту времени измерениями [10–12].

Оценка расстояния \bar{R}

С целью определения расстояния \bar{R} от оси вращения до центра масс твердого ядра, форма которого в нашем рассмотрении произвольная, следует вспомнить, что при плоском движении под действием центрального поля сохраняется z — компонента момента импульса L_z , где ось z направлена по оси вращения Земли. Это означает, что

$$L_z = m_N r^2 \dot{\phi} = C_2 = \text{const.}$$

Поэтому угловая частота $\dot{\phi}$, как функция расстояния, должна меняться по закону

$$\dot{\phi} = \frac{\text{const}}{m_N r^2}. \quad (39)$$

Полагая константу равной $m_N \bar{R}^2 \omega_0$, где частота ω_0 дается формулой (5), получаем

$$\dot{\phi} = \left(\frac{\bar{R}}{r} \right)^2 \Omega. \quad (40)$$

Таким образом, частота стационарного вращения ядра должна убывать к границе области $r = b$ по закону (40). В силу стационарного увлечения ядром

жидкого континуума, скорость «приклеившегося» к ядру континуума также должна определяться выражением (40) (практически идентичная задача была подробно рассмотрена в работе [15]).

Это означает, что при $r = b$ внутренняя область контакта жидкой фазы с твердой фазой передает ей вращение, которое должно происходить с частотой

$$\Omega_E = \left(\frac{\bar{R}}{b}\right)^2 \omega_0, \quad (41)$$

и которая, в свою очередь, представляет собой частоту вращения Земли вокруг своей оси. В результате с учетом формулы $\omega_0 = \sqrt{2\pi G \rho_2}$ из выражения (41) немедленно получаем, что

$$\bar{R} = b \sqrt{\frac{\Omega_E}{\omega_0}}. \quad (42)$$

Для оценки численного значения расстояния \bar{R} нам следует «привязаться» к известному значению частоты вращения Земли, то есть к значению $\Omega_E = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0.73 \cdot 10^{-4} \frac{1}{c}$.

Воспользовавшись оценкой (38), согласно которой $b \approx 3.83 \cdot 10^8$ см, и учитывая, что частота $\omega_0 = \sqrt{2\pi G \rho_2} = \sqrt{2\pi \cdot 6.67 \cdot 10^{-8} \cdot 12.2} \approx 1.1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{c}$, получаем интересующее нас значение для искомого геометрического параметра:

$$\bar{R} = b \approx 3.83 \cdot 10^8 \sqrt{\frac{7.3 \cdot 10^{-5}}{1.1 \cdot 10^{-3}}} = 3.83 \cdot 2.58 \cdot 10^7 \approx 10^8 \text{ см} = 1000 \text{ км}. \quad (43)$$

Приведенная оценка (43) говорит о том, что расстояние от центра масс твердого ядра до точки вращения, то есть до начала координат, должна составлять примерно 1000 км. Это означает, что размер ядра не должен превышать, по крайней мере, 3000 км, что находится в полном соответствии с приведенным выше численным значением размера барисферы $b \approx 3,83 \cdot 10^8$ см, поскольку с хорошим запасом выполняется неравенство $b > 2\bar{R}$.

Заключение

Кратко резюмируя вышеизложенное, необходимо отметить:

1. Предложено подробное модельное представление, позволяющее оценить некоторые основные параметры возможного внутреннего строения Земли, в частности, расстояние от геометрического центра до ядра, соответствующее согласно оценке (43) значению $\bar{R} = 1000$ км.

2. Приведена аналитическая оценка размера барисферы, который согласно (38) составляет примерное значение, равное $b \approx 3.83 \cdot 10^8$ см, что хорошо согласуется с результатами экспериментов по измерению скорости звуковых волн;

3. С физической точки зрения предложено вполне удовлетворительное объяснение эффекта вращения Земли вокруг своей оси, связанное с «увлечением» «жидкого ядра», вращающимся твердым ядром в соответствии с аналогичной задачей, подробно рассмотренной в работе [15].

Благодарности


Автор выражает искреннюю признательность доценту кафедры №311 МАИ Софье Борисовне Богдановой за помощь в графической иллюстрации.

Список литературы

1. Furth R. On the equation of state of solids, *Proc. Roy. Soc.*, 1944. vol. 183, pp. 223 – 234.
2. Козловская С.В. Сравнительный анализ внутреннего строения и состава земных планет и спутников, *ДАН СССР*, 1953. Т. 92, № 5, С. 903-906.
3. Левин Б. Ю. Состав Земли / *Труды Геофизического института*, Т. 26, АН СССР, 1955.
4. Жарков В.Н. Физика ядра Земли / *Труды института физики Земли*, Т. 20, 1962.
5. Магницкий В. А. *Основы физики Земли*. М.: Геодиздат, 1963.
6. Стишов С. М. О внутреннем строении Земли, *Геохимия*, 1962. № 8.
7. Жарков В. Н. *Внутреннее строение Земли и Планет*. М.: Наука, 1978. 191 с.
8. Киселев В.М. *Неравномерность суточного вращения Земли*. Новосибирск: Наука, 1980. 160 с.
9. Магницкий В. А. *Общая геофизика*. М.: Издательство МГУ, 1995. 318 с.
10. Овчинников В.М., Краснощеков Д.Н. Сейсмические исследования ядра Земли, *Физика Земли*, 2021. № 2, С. 3-26 DOI: 10.31857/S0002333721020083.
11. Магницкий В. А. *Внутреннее строение и физика Земли*. М.: Недра, 1965. 379 с.
12. Стейси Ф. *Физика Земли*. М.: Мир, 1972. 342 с.
13. Сивухин Д. В. *Общий курс физики. Механика*, Т. 1. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
14. Смирнов В. И. *Курс высшей математики*, Т. 1. М.: Наука, 1967. 479 с.
15. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра, *Журнал технической физики*, 2018. Т. 59, № 3, С. 377 – 341 DOI: 10.21883/JTF.2018.03.45587.2349.

Информация об авторе




Гладков Сергей Октябрьнович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия,  ORCID 0000-0002-2755-9133.

References

- [1] Furth R. On the equation of state of solids. Proc. Roy. Soc. 1944. vol. 183. pp. 223 – 234.
- [2] Kozlovskaya S. V. Sravnitel'nyy analiz vnutrennego stroyeniya i sostava zemnykh planet i sputnikov. DAN SSSR. 1953. vol. 92. no. pp. 903-906.(In Russian).
- [3] Levin B. Yu. Sostav Zemli. Trudy Geofizicheskogo instituta [Composition of the Earth]. 1955. vol. 26. AN SSSR.(In Russian).
- [4] Zharkov V. N. Fizika yadra Zemli [Physics of the Earth's core]. Trudy instituta fiziki Zemli. 1962. vol. 20.(In Russian).
- [5] Magnitskiy V. A. Osnovy fiziki Zemli [Fundamentals of Earth physics]. Moscow. Geodezizdat, 1963.(In Russian).
- [6] Stishov S. M. O vnutrennem stroyenii Zemli. Geokhimiya.1962. no. 8.(In Russian).
- [7] Zharkov V. N. Vnutrenneye stroyeniye Zemli i Planet [Internal structure of the Earth and Planets]. Moscow. Nauka, 1978. 191 p.(In Russian).
- [8] Kiselev V. M. Neravnomernost' sutochnogo vrashcheniya Zemli [Irregularity of the Earth's daily rotation]. Novosibirsk. Nauka, 1980. 160 p.(In Russian).
- [9] Magnitskiy V. A. Obshchaya geofizika [General geophysics]. Moscow. Izdatel'stvo MGU, 1995. 318 p.
- [10] Ovtchinnikov V. M., Krasnoshchekov D. N. Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2021. vol. 57. no. 2. pp. 141-162. DOI:10.1134/S1069351321020087
- [11] Magnitskiy V. A. Vnutrenneye stroyeniye i fizika Zemli [Internal structure and physics of the Earth]. Moscow. Nedra. 1965. 379 p.(In Russian).
- [12] Steysi F. Fizika Zemli [Physics of the Earth]. Moscow. Mir, 1972. 342 p.(In Russian).
- [13] Sivukhin D. V. Obshchiy kurs fiziki. Mekhanika [General physics course. Mechanics]. vol. 1. Moscow. Fizmatlit, 2010. 560 p.(In Russian).
- [14] Smirnov V. I. Kurs vysshey matematiki [Course of higher mathematics]. vol. 1. Moscow. Nauka, 1967. 479 p.(In Russian).
- [15] Gladkov S. O. On Calculating the Stopping Time of a Cylindrical Body Rotating in a Viscous Continuum and the Time of Entrainment of a Coaxial External Cylinder. Technical Physics. 2018. vol. 63. no. 3. pp. 325-330. DOI:10.1134/S1063784218030088.

Information about author



Gladkov Sergey Oktyabrinovich✉ – D.Sc. (Phys. & Math.), Professor, Associate Professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,
 ORCID 0000-0002-2755-9133.