Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 44. №3. С. 39-57. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 514.113.5

Некоторые миниатюры с кубом

Б. П. Федоров, С.Б.Богданова, С.О.Гладков*

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4, Россия

Аннотация. Приводится подробное решение нескольких задач с кубом, в число которых входит ряд примеров, связанных с вычислением максимальных объемов для вписанных в куб симметричных фигур, таких как равносторонний цилиндр, правильный конус и сфера. Например, в одной из задач со сферой необходимо было найти объем внешней части сферы, выходящий за пределы боковых граней куба. Все рассмотренные примеры преследуют одну цель: научить школьников старших классов ориентироваться в стереометрических задачах, как одной из наиболее сложных частях элементарной математики, способствующей развитию у них пространственного мышления. Все приведенные в данной работе примеры направлены именно на это, а результаты всех вычислений используют хорошо знакомую школьникам терминологию, а также теорему косинусов, необходимую при решении ряда конкретных примеров. В конце каждой решенной задачи приводятся краткие ответы, формулировка которых отличается лаконичностью, говорящей о завершенности соответствующего раздела. Решения всех задач сопровождается подробными рисунками, иллюстрирующими их постановку, а все изображенные пространственные фигуры наглядно объясняют суть каждой из задач. Статья будет полезна преподавателям математики среднеобразовательных и педагогических учреждений, ведущих курс стереометрии для учеников старших классов. Все рассмотренные примеры должны способствовать лучшему усвоению материала благодаря подробно изложенным решениям каждой из приведенных задач. Подобная необходимость их последовательного изложения ориентирована прежде всего на развитие пространственного мышления у школьников старших классов. Это будет весьма полезно им при будущем изучении более сложных разделов математики.

Ключевые слова: гексаэдр, симметрия тел, комбинации и пересечение тел.

Получение: 25.09.2023; Исправление: 28.10.2023; Принятие: 30.10.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С.О. Некоторые миниатюры с кубом // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 44. № 3. С. 39-57. EDN: AUHQAH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: sonjaf@list.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57
Research Article
Full text in Russian
MSC 97G40

Some Miniatures With a Cube

B. P. Fedorov, *S. B. Bogdanova**, *S. O. Gladkov*

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

Abstract. A detailed solution to several problems with a cube is given including a number of examples related to the calculation of maximum volumes for symmetrical shapes inscribed in a cube such as an equilateral cylinder a regular cone and a sphere. For example, in one of the problems with a sphere it was necessary to find the volume of the outer part of the sphere that goes beyond the side faces of the cube. All the examples considered have one goal: to teach high school students to navigate stereometric problems as one of the most difficult parts of elementary mathematics contributing to the development of their spatial thinking. All the examples given in this paper are aimed at this and the results of all calculations use terminology well known to schoolchildren as well as the cosine theorem which is necessary for solving a number of specific examples. At the end of each solved problem brief answers are given the wording of which is concise indicating the completeness of the corresponding section. The solutions of all problems are accompanied by detailed drawings illustrating their formulation and all the spatial figures depicted clearly explain the essence of each of the tasks. The paper would be useful for mathematics teachers in secondary education and pedagogical institutions teaching a stereometry course for high school students. All the given examples should help with the material due to the detailed solutions provided for each of the problems given. First of all, such necessity for its coherent treatment is focused on developing the sparial thinking of the high school students. This would be very useful for their studying of more complicated branches of mathematics in the future.

Key words: hexahedron, the symmetry of the bodies, combinations and intersection of bodies.

Received: 25.09.2023; Revised: 28.10.2023; Accepted: 30.10.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Fedorov B. P., Bogdanova S. B., Gladkov S. O. Some miniatures with a cube . *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **44**: 3, 39-57. EDN: AUHQAH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57.

Funding. The study was carried out without support from foundations

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: sonjaf@list.ru

Введение

Настоящая работа продолжает серию авторских статей [1, 2] посвященных решению задач, предложенных в свое время для студентов педагогических вузов Б.П. Федоровым. На этот раз мы рассмотрим несколько задач из стереометрии, главным действующим лицом в которых будет куб. Рассмотренные ниже задачи не встречаются в классических учебниках по стереометрии [3–10], и именно поэтому они должны быть интересны не только старшеклассникам, но и учителям. Выбор куба в качестве основного «действующего лица» вполне естественно, поскольку его фигура чрезвычайно проста благодаря своей идеальной симметрии. Уместным здесь было бы упомянуть мысль Иоганна Кеплера (1571-1630), что «среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб ...» [11]. Первые пять задач конструктивно объединены одной идеей: тело некоторым образом расположено на диагонали куба и требуется вычислить его объем. Заключительные четыре задачи отражают случаи сложного пересечения куба со сферой, правильной четырехугольной пирамидой, конусом и цилиндром. Надеемся, что подробно выполненные ко всем задачам чертежи не только помогут пониманию решения задачи, но и доставят читателю эстетическое удовольствие.

Задачи с диагональю куба

Задача 1. *В куб со стороной a вписана правильная треугольная призма так, что диагональ куба проходит через центры оснований призмы. Следует найти максимальный объём вписанной призмы и объем призмы, у которой все ребра равны (см. рис. 1).*

Решение

Пусть $MK = x$ это сторона основания призмы, а $OO_1 = y$ - высота призмы. В прямоугольном треугольнике C_1B_1A и $AB_1 = \sqrt{2}a$, а значит,

$$\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\angle C_1AB_1 = \frac{AB_1}{B_1C_1} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}.$$

В свою очередь

$$\mathrm{ctg}\beta = \mathrm{ctg}\angle AC_1B_1 = \mathrm{ctg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обозначим центр описанной окружности около треугольника NMK точкой O. Тогда $OK = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$. Следовательно, из прямоугольного треугольника OKA получим, что

$$OA = \mathrm{ctg}\alpha \cdot OK = \sqrt{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Поскольку $C_1A = a\sqrt{3}$ представляет собой диагональ куба, то

$$C_1A = C_1O_1 + OO_1 + OA = \frac{\sqrt{6}}{6}x + y + \frac{x\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}x + y = a\sqrt{3}.$$

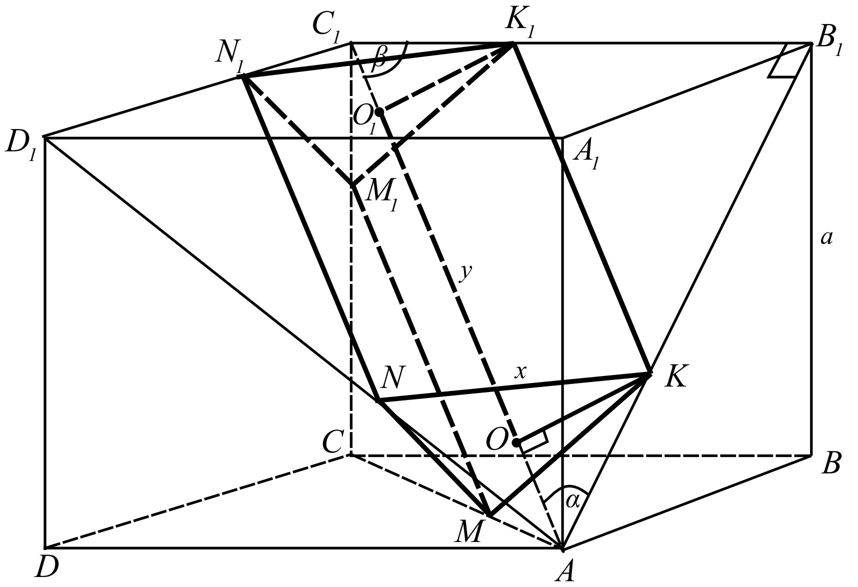


Рис. 1. На диагонали куба AC_1 лежит прямая OO_1, соединяющая центры оснований правильной треугольной призмы $NMKN_1M_1K_1$. Вершины призмы N, K, N_1, M_1, K_1 лежат на ребрах куба, а вершина M принадлежит диагонали нижнего основания.

[Fig. 1. On the diagonal of AC_1 cube, OO_1 is situated, joining the centers of bases of the proper triangular prism $NMKN_1M_1K_1$. The tops of the prism N, K, N_1, M_1, K_1 are found on the cube edges, and the top of M is appertained to diagonal line of the lower base.]

Отсюда следует, что $y = a\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}x$. Поэтому объем вписанной призмы можно найти как

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}\left(a\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}x\right) = \frac{3}{4}ax^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}x^3.$$

Вычислим теперь объем призмы, когда все рёбра призмы равны, т.е. $y = x$. Тогда условие $y = x$ перепишется как

$$a\sqrt{3} = x + \frac{x\sqrt{6}}{2} = \frac{x\left(\sqrt{6}+2\right)}{2},$$

откуда

$$x = a\sqrt{3}\left(\sqrt{6}-2\right).$$

Подставляя этот результат в формулу для объема

$$V = \frac{3}{4}ax^2 - \frac{3\sqrt{2}}{8}x^3,$$

получим искомый объем в виде

$$V = \frac{9\cdot\left(\sqrt{6}-2\right)^3}{4}a^3.$$

Исследуем теперь полученную функцию объема $V(x)$ на максимум. Действительно, для производной по аргументу имеем

$$V' = \frac{3}{2}ax - \frac{9}{8}\sqrt{2}x^2 = 0,$$

откуда и находим критические точки $x = 0$ или $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$. Ясно, что случай $x = 0$ рассматривать не стоит, а вот при $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$ наибольший объем вписанной призмы составит величину

$$V_{\max} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}a\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a\left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}a^3.$$

Таким образом, объем вписанной призмы с одинаковыми ребрами составляет $\frac{9 \cdot \left(\sqrt{6} - 2\right)^3}{4}a^3$. Максимальный же объем вписанной призмы будет тогда равен $\frac{2}{9}a^3$.

Задача 2. *Предположим теперь, что в куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *с ребром вписана правильная шестиугольная призма так, что её ось* OO_1 *лежит на диагонали* DB_1 *куба. В этой задаче следует найти наибольший объём вписанной призмы, а также ее объем при условии, что все ее рёбра равны между собой (см. рис. 2).*

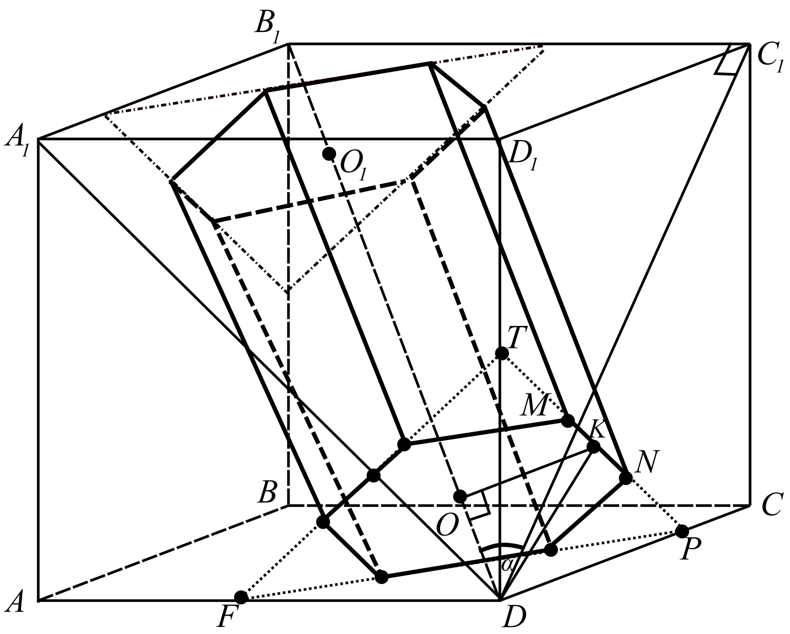


Рис. 2. На диагонали куба DB_1 лежит прямая OO_1, соединяющая центры оснований правильной шестиугольной призмы.

[Fig. 2. On the diagonal DB_1 of cube, the OO_1 right line is lying, joining the centers of bases of the proper hexagonal prism.]

Решение

Обозначим сторону основания призмы через x, а высоту призмы OO_1 примем за y. Тогда

$$V = S \cdot y,$$

где площадь основания равна площади правильного шестиугольника со стороной x, т.е. $S = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3}$. Выразим теперь $OK = \sqrt{OM^2 - MK^2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ через ребро куба a Из прямоугольного треугольника B_1C_1D найдем, что

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{DC_1}{B_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника DOK (см. рис. 2) найдем

$$OD = OK \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{x\sqrt{6}}{2}.$$

Поскольку $B_1D = 2OD + OO_1$ и $B_1D = a\sqrt{3}$, то $y = a\sqrt{3} - x\sqrt{6}$. Поэтому объем вписанной призмы будет

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 y = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\left(a\sqrt{3} - x\sqrt{6}\right) = \frac{9}{2}\left(x^2 a - x^3\sqrt{2}\right).$$

Найдем наибольший из всевозможных объемов. Исследуем функцию $V(x)$ на максимум. Поскольку производная

$$V' = \frac{9}{2}\left(2ax - 3\sqrt{2}x^2\right)$$

то, приравнивая ее к нулю, находим два решения $x = 0$ и $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. И, следовательно, наибольший объем будет равен

$$V\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{9}{2}\left(\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot a - \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3\sqrt{2}\right) = \frac{9}{2}a^3\left(\frac{2}{9} - \frac{4}{27}\right) = \frac{9}{2}a^3 \cdot \frac{2}{27} = \frac{a^3}{3}.$$

Найдем теперь объем равносторонней призмы, т.е. призмы со всеми равными ребрами, $x = y$. Благодаря равенству $a\sqrt{3} = x\sqrt{6} + y$ следует, что

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6} + 1} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{6} - 1\right)}{5} = \frac{a\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{5}$$

и, значит, ее объем будет

$$V = \frac{3}{2}x^3\sqrt{3}$$

или

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a\left(3\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)}{5}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{125} \cdot a^3 \cdot \left(\sqrt{6} - 1\right)^3 = \frac{27}{250}a^3\left(9\sqrt{6} - 19\right).$$

Таким образом, объем вписанной призмы со всеми равными ребрами составляет $\frac{27}{250}a^3\left(9\sqrt{6}-19\right)$, а ее максимальный объем будет равен $\frac{a^3}{3}$.

Задача 3. *Пусть теперь в куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *с ребром* a *вписан конус так, что его высота лежит на диагонали куба. Здесь также, как и в предыдущей задаче, следует найти наибольший объём вписанного конуса и объем вписанного равностороннего конуса (см. рис. 3).*

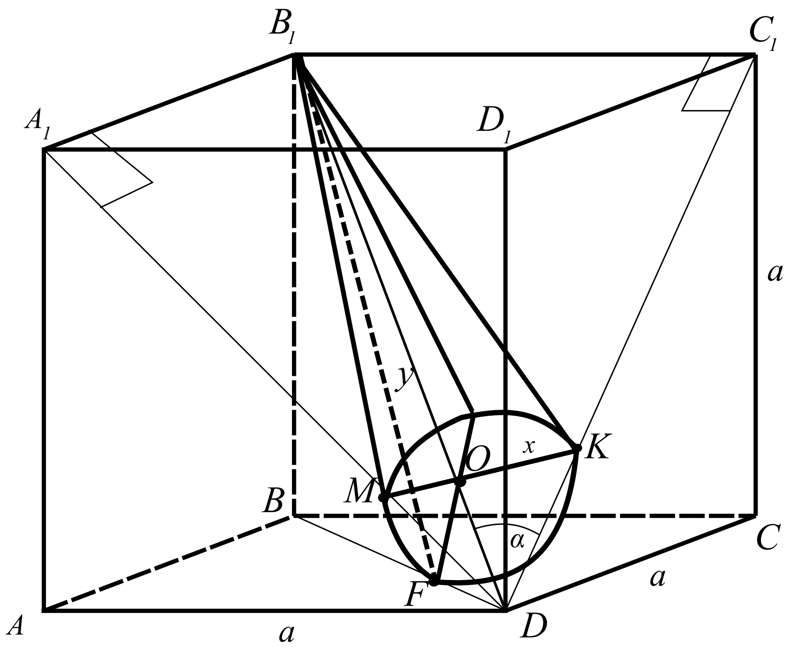


Рис. 3. На диагонали куба BD_1 лежит высота B_1O конуса, вписанного в куб так, что вершина B_1 конуса и куба совпадают, а основание конуса касается смежных боковых граней куба в точках K, M и F, принадлежащих диагоналям этих граней.

[Fig. 3. On the diagonal BD_1 of cube, the height of B_1O cone, inscribed in the cube so the height B_1 of the cone and the cube are equal. In addition, the base of the cone is tangent to neighbouring side faces of the cube in K, M and F points, occured to its faces diagonals.]

Решение

Напомним, что равносторонним считается конус, у которого образующая равна диаметру основания. Обозначим высоту конуса OB_1 через y, радиус основания OK через x. Как известно, объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Из прямоугольного треугольника DB_1C_1 найдем, что

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{DC_1}{B_1C_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OKD следует соотношение

$$OD = x\operatorname{ctg}\alpha = x\sqrt{2}.$$

Поскольку $DB_1 = a\sqrt{3}$ как диагональ куба и

$$DB_1 = y + OD = y + x\sqrt{2},$$

то

$$a\sqrt{3} = y + x\sqrt{2}.$$

Найдём теперь объём равностороннего конуса, т.е. $B_1K = 2x$. Т.к. осевое сечение равностороннего конуса представляет собой правильный треугольник, то $y = x\sqrt{3}$. Поэтому из равенства $a\sqrt{3} = y + x\sqrt{2}$ следует, что

$$a\sqrt{3} = x(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

и, значит,

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{1} = a\left(3-\sqrt{6}\right).$$

Поэтому искомый объем найдется как

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi x^3 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3\left(3-\sqrt{6}\right)^3 = \pi a^3\sqrt{3}\left(9\sqrt{3}-11\sqrt{2}\right).$$

Исследуем теперь вопрос о наибольшем из всевозможных объемов вписанного конуса. Запишем объем конуса как функцию аргумента x. Для этого из равенства

$$a\sqrt{3} = y + x\sqrt{2}$$

выразим y и подставим в выражение для объема конуса. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi x^2\left(a\sqrt{3} - x\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{3}x^2 - x^3\sqrt{2}\right).$$

Полученное выражение представляет собой искомую функцию от x, то есть

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(2xa\sqrt{3} - 3x^2\sqrt{2}\right).$$

и после приравнивая ее к нулю, находим два корня: один тривиальный $x = 0$ и второй $x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. В результате подстановки нетривиального решения в формулу для объема, мы находим наибольший объем конуса:

$$V\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^3\sqrt{2}\right) = \frac{\pi a^3}{27}\left(6\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}.$$

Значит, объем вписанного равностороннего конуса составляет $\pi a^3\sqrt{3}\left(9\sqrt{3}-11\sqrt{2}\right)$; а наибольший возможный объем вписанного конуса должен быть равен $\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

Задача 4. *Пусть теперь внутри куба, ребро которого равно* a, *помещается конус так, что его вершина совпадает с одной из вершин куба, а окружность основания касается трёх граней куба, сходящихся в противоположной вершине. Образующая конуса составляет с его осью угол* α . *Следует определить радиус основания конуса (см. рис. 4).*

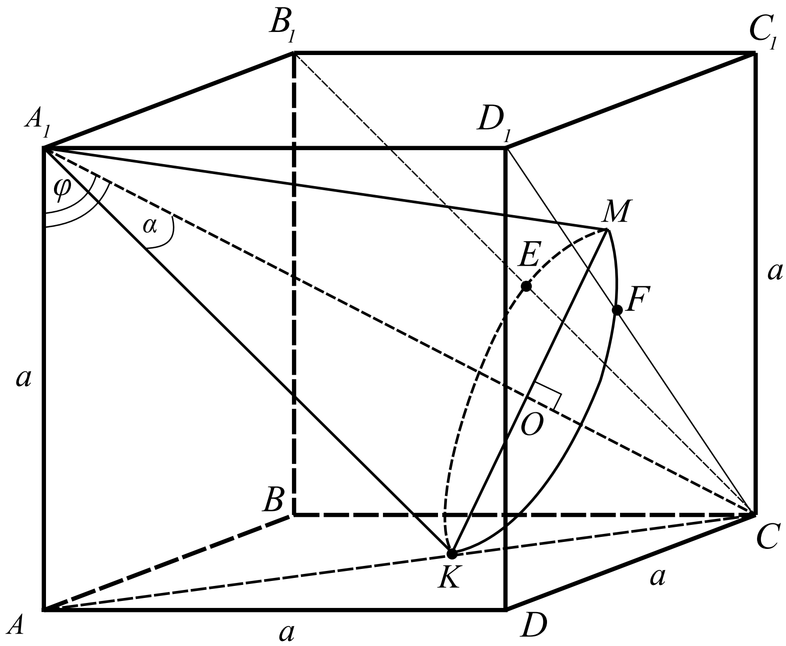


Рис. 4. На диагонали куба CA_1 лежит высота A_1O конуса, вписанного в куб так, что вершина A_1 конуса и куба совпадают, а основание конуса касается трех смежных боковых граней куба в точках K,F и E, принадлежащих диагоналям этих граней

[Fig. 4. On the diagonal CA_1 of cube, the height A_1O of the cone is lying, inscribed in the cube as the height A_1 of the cone and the cube are equal. Also, the base of the cone is tangent to three neighbouring side faces of the cube in K, F and E points, related to the faces diagonals.]

Решение

Пусть угол между образующей конуса и его осью $\widehat{OA_1K} = \alpha$, $AA_1 = a$, радиус основания конуса $R = OK$ и $\varphi = \angle AA_1C$. Тогда из треугольника A_1OK следует, что $R = OK = A_1K \sin\alpha$, а из треугольника AA_1K следует, что

$$A_1K = \frac{AA_1}{\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{a}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

В свою очередь из треугольника AA_1C находим, что $\cos\varphi = \frac{AA_1}{A_1C} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому $\sin\varphi = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$. И мы имеем равенство

$$R = \frac{a\sin\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

Раскроем знаменатель, используя формулу косинуса разности:

$$\cos(\varphi-\alpha) = \cos\varphi\cdot\cos\alpha+\sin\varphi\cdot\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha+\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha\right).$$

В итоге получаем

$$R = \frac{\sqrt{3}a\sin\alpha}{\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}a}{\mathrm{ctg}\alpha+\sqrt{2}}.$$

Это и есть искомый ответ для поставленной задачи, то есть радиус R основания вписанного конуса должен быть равен $\dfrac{\sqrt{3}a}{\mathrm{ctg}\alpha+\sqrt{2}}$.

Задача 5. *Предположим теперь, что в куб со стороной a вписан цилиндр, ось которого лежит на диагонали куба. Следует найти объём равностороннего цилиндра и максимальный объём вписанного цилиндра (см. рис. 5).*

Решение

Введем обозначения $OO_1 = y$, $OK = x$, $\angle D_1BA_1 = \alpha$. И по условию задачи $y = 2x$ (цилиндр равносторонний). Ясно тогда, что $BA_1 = a\sqrt{2}$ и из прямоугольного треугольника BA_1D_1 найдем, что

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{BA_1}{A_1D_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Поэтому из треугольника BOK следует, что $BO = x\cdot\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{BA_1}{A_1D_1} = x\sqrt{2}$ А потому, из простого соотношения $BD_1 = a\sqrt{3}$ получаем равенство $a\sqrt{3} = OO_1 + 2BO$,т.е.

$$a\sqrt{3} = y + 2x\sqrt{2}. \tag{1}$$

Вычислим вначале объем вписанного равностороннего цилиндра. Согласно формуле $V = \pi x^2 y$ и благодаря условию $y = 2x$, с учетом соотношения (1), имеем

$$a\sqrt{3} = 2x\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Откуда, после домножения числителя и знаменателя на сопряженно число, следует, что

$$x = \frac{a\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\right)}{2\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.$$

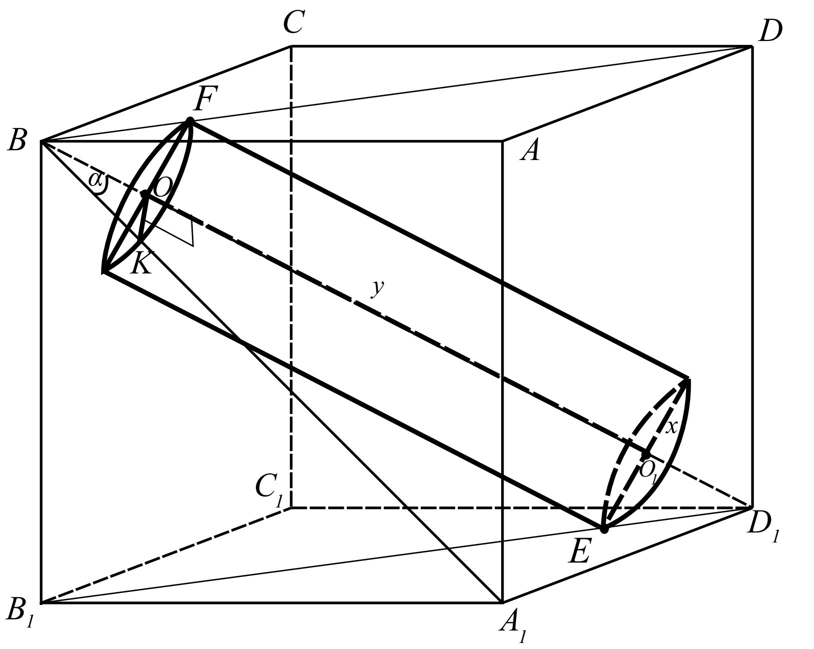


Рис. 5. Ось цилиндра OO_1 лежит на диагонали BD_1 куба, а основания цилиндра касаются граней куба в точках K, F и E, принадлежащих диагоналям граней.
[Fig. 5. The axis of OO_1 cylinder is situated on the BD_1 diagonal line of the cube, as the bases of the cylinder are touching the faces of the cube in K, F and E points, related to the faces diagonals.]

В результате

$$y = a\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Значит, объем равностороннего цилиндра

$$V = \pi\frac{3a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{4}\cdot a\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{3}{4}a^3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^3.$$

Теперь исследуем вопрос о наибольшем объеме V_{max} вписанного цилиндра. Для этого рассмотрим его, как функцию от радиуса основания цилиндра:

$$V(x) = \pi x^2 y = \pi x^2\left(a\sqrt{3}-2x\sqrt{2}\right) = \pi\left(ax^2\sqrt{3}-2x^3\sqrt{2}\right).$$

Вычисляя производную и полагая ее равной нулю, получаем . Откуда следует тривиальный случай и нетривиальный, когда $V' = \pi\left(2ax\sqrt{3}-6x^2\sqrt{2}\right) = 0$. Откуда следует тривиальный случай $x = 0$ и нетривиальный, когда $x_{max} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Подставив это значение в формулу (1), найдем, что

$$y_{max} = a\sqrt{3} - 2\frac{a\sqrt{6}}{6}\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{3}-a\sqrt{12}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

откуда

$$V_{max} = \pi x^2 y = \pi\frac{a^2}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}.$$

Значит, наибольший объем вписанного цилиндра должен быть равен

$$V_{\max} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{18}.$$

. Таким образом, мы приходим к заключению, что объем равностороннего цилиндра будет $V = \frac{3}{4}a^3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^3$, а наибольший объем вписанного цилиндра $V_{\max} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{18}$.

Некоторые другие задачи с кубом

Задача 6. *Пусть в куб вписан шар так, что он касается основания куба и рёбер верхнего основания. Ребро куба равно a. Найти объём части шара вне куба (см. рис. 6).*

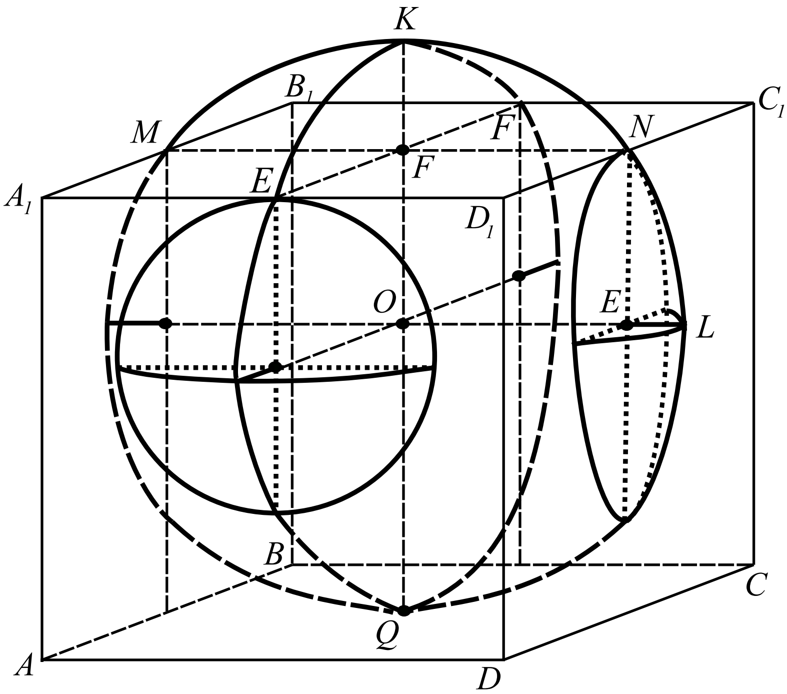


Рис. 6. Шар с центром в точке O касается нижней грани куба в точке Q и в серединах ребер верхнего основания M, N, F, E.

[Fig. 6. The ball with a center in the O point makes touch in the greatest lower bound of the cube in the Q point, as well as in midpoint of the edges of the upper base of M, N, F, E.]

Решение

Из рисунка следует, что внешняя часть куба V складывается из нескольких шаровых сегментов:

$$V = V_1 + 4V_2 = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right) + 4\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где V_1 - объем верхнего сегмента шара, V_2 - объем боковых сегментов шара, R - радиус шара, а h и H - высоты шаровых сегментов, показанные на рисунке 7.

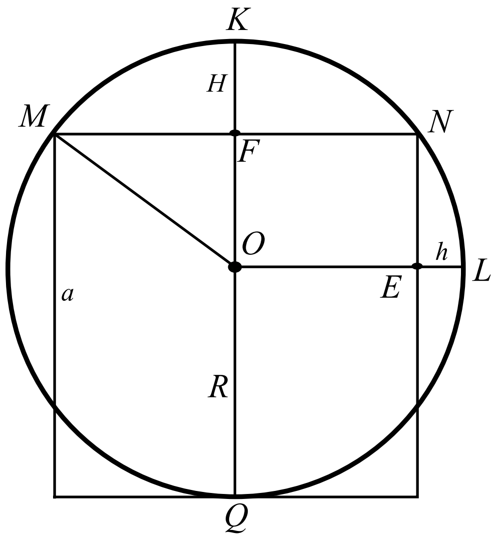


Рис. 7. Сечение куба плоскостью MNQ.
[Fig. 7. The section of the cube by MNQ plane.]

Из прямоугольного треугольника MFO следует, что

$$R^2 = MO^2 = MF^2 + FO^2 = MF^2 + (FQ - OQ)^2.$$

Или

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (a - R)^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2aR + R^2,$$

откуда следует, что

$$2aR = \frac{5}{4}a^2$$

и, значит,

$$R = \frac{5}{8}a.$$

Чтобы найти высоту верхнего шарового сегмента, воспользуемся соотношением $H = KF = KQ - FQ$. Откуда

$$H = 2R - a = \frac{10}{8}a - a = \frac{a}{4}.$$

Значит, объем верхнего шарового сегмента составит значение

$$V_1 = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3}H\right) = \pi\frac{a^2}{16}\left(\frac{5}{8}a - \frac{a}{12}\right) = \frac{\pi a^3}{32}.$$

Аналогично вычислим высоту бокового сегмента шара $h = LE = OL - OE$, т.е. $h = R - \frac{a}{2} = \frac{5}{8}a - \frac{a}{2} = \frac{a}{8}$. Поэтому объем бокового шарового сегмента будет равен

$$V_2 = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) = \pi\frac{a^2}{64}\left(\frac{5}{8}a - \frac{1}{24}a\right) = \frac{7\pi a^3}{32 \cdot 24}.$$

Окончательно, объем части шара вне куба вычисляется, как

$$V = V_1 + 4V_2 = \frac{\pi a^2}{32} + \frac{4 \cdot 7\pi a^3}{32 \cdot 24} = \frac{6\pi a^2 + 7\pi a^3}{32 \cdot 6} = \frac{13\pi a^3}{192}.$$

И, следовательно, окончательный ответ $V = \dfrac{13\pi a^3}{192}$.

Задача 7. *Пусть в правильной четырёхугольной пирамиде боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду помещен куб так, что вершины одной его грани совпадают с серединами рёбер основания пирамиды, а каждое ребро противолежащей грани куба пересекает одно из боковых рёбер пирамиды. Определить объём части куба вне пирамиды (см. рис. 8).*

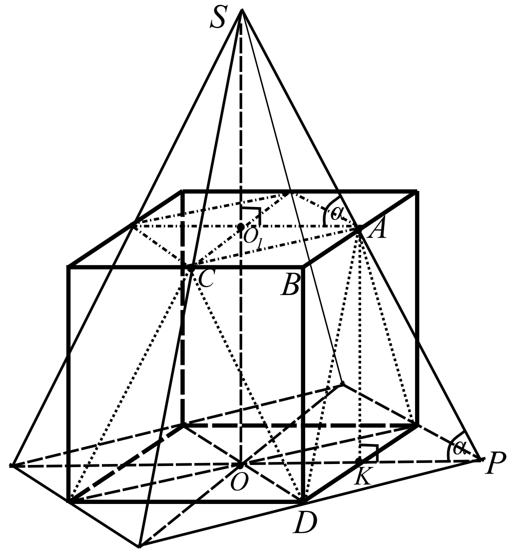


Рис. 8. Ось куба OO_1 лежит на высоте SO правильной четырехугольной пирамиды. Точки A, C, K являются серединами ребер куба.

[Fig. 8. The axis of OO_1 cube is liying on the SO height of the regular tetragonal pyramid. The points of A, C, K are the midpoints of the faces cube.]

Решение

Введем обозначения $SP = a$, $\angle SPO = \alpha$. Из рисунка ясно, что искомый объем можно вычислить, как

$$V = 4V_{ABCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} \cdot BD = 2S_{ABC} \cdot BD.$$

Пусть ребро куба равно x, тогда $BD = x$, а $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Т.к. треугольник ABC прямоугольный и $AB = BC = \dfrac{x}{2}$, то

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{x^3}{4}.$$

Выразим полученный объем через угол α. Из треугольника SO_1A следует, что

$$SA = \frac{O_1A}{\cos\alpha} = \frac{x}{2\cos\alpha},$$

где мы учли, что $O_1A = \frac{x}{2}$. Из прямоугольного треугольника AKP имеем

$$AP = \frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha},$$

поскольку $AK = x$. Тогда

$$SP = SA + AP = \frac{x}{2\cos\alpha} + \frac{x}{\sin\alpha} = a.$$

Откуда легко находится интересующее нас ребро куба

$$x = \frac{2a\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{a\sin 2\alpha}{2\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Подставляя в формулу $V = \dfrac{x^3}{4}$ полученное выражение для x, приходим к искомому ответу:

$$V = \frac{1}{4}\left(\frac{a\sin 2\alpha}{2\cos\alpha + \sin\alpha}\right)^3.$$

Это и есть интересующий нас ответ на поставленную задачу.

Задача 8. *Предположим, что ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка K - середина стороны AA_1, точка L - середина стороны CC_1. В куб вписан цилиндр так, что ось цилиндра OO_1 лежит на прямой KL. Необходимо вычислить объём цилиндра, а также его боковую и полную поверхность (см. рис. 9).*

Решение

Как и в предыдущих задачах, введем сокращенные обозначения $OO_1 = y$ и $ON = x = \dfrac{a}{2}$. Понятно, что $MN = 2x = a$, а поскольку $OK = AM = \dfrac{a}{2} = x$ и $AC = a\sqrt{2}$, то ясно, что $y = a\left(\sqrt{2}-1\right)$. В результате объем вписанного цилиндра будет

$$V = \pi x^2 y \pi\frac{a^2}{4}\cdot a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}.$$

Площадь же боковой поверхности составит тогда величину

$$S = 2\pi xy = 2\pi\frac{a}{2}\cdot a\left(\sqrt{2}-1\right) = \pi a^2\left(\sqrt{2}-1\right),$$

а площадь полной поверхности вписанного цилиндра оказывается равной

$$S_{\mathrm{full}} = 2\pi x^2 + 2\pi xy = 2\pi\frac{a^2}{4} + 2\pi\frac{a}{2}\cdot a\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

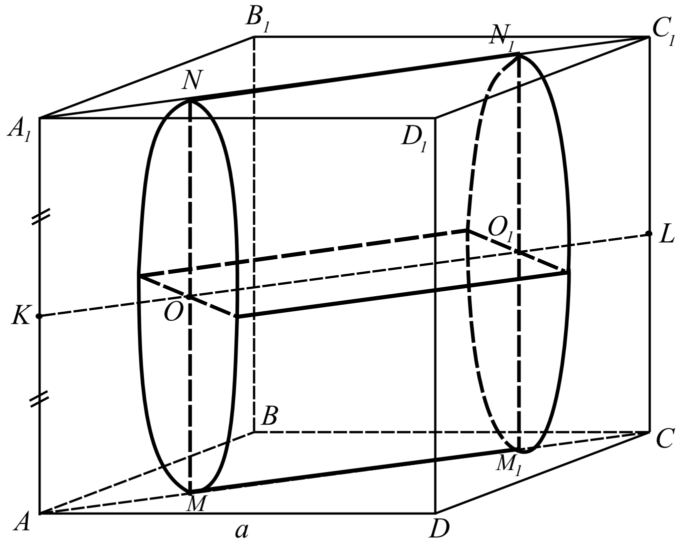


Рис. 9. Образующие цилиндра NN_1 и MM_1 лежат на диагоналях верхней и нижней граней куба.

[Fig. 9. The forming parts NN_1 and MM_1 of the cylinder are found on the diagonal lines of the top and bottom faces of the cube.]

Ответ: $V = \frac{\pi a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$, $S_{\text{full}} = \frac{\pi a^2}{2} + \pi a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Задача 9. *В этой задаче предположим, что в конус вписан куб* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *со стороной* a *так, что его ребро* DD_1 *лежит в основании конуса (см. рис. 10). Следует найти радиус основания и высоту конуса.*

Решение

Пусть $AB = a$ - ребро куба, тогда $AC = KO = a\sqrt{2}$, CQ - половина диагонали куба, т.е. $QO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, а $QC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Плоскость AA_1C_1C пересекает боковую поверхность конуса по окружности с центром в точке Q и радиусом $AQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. На чертеже показана дуга AEF этой окружности, при этом, ясно, что $EQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Из треугольника BEF найдем, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BF}{EF} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}-a}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2},$$

где α - угол наклона образующей конуса к плоскости его основания. А из треугольника BTD следует, что $TD = BD \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда несложно найти радиус конуса. Действительно, т.к. $R = TO = TD + DO$, а $DO = \dfrac{a}{2}$, то радиус

$$R = \frac{a}{2} + a\sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{a}{2}\left(2\sqrt{3}-1\right).$$

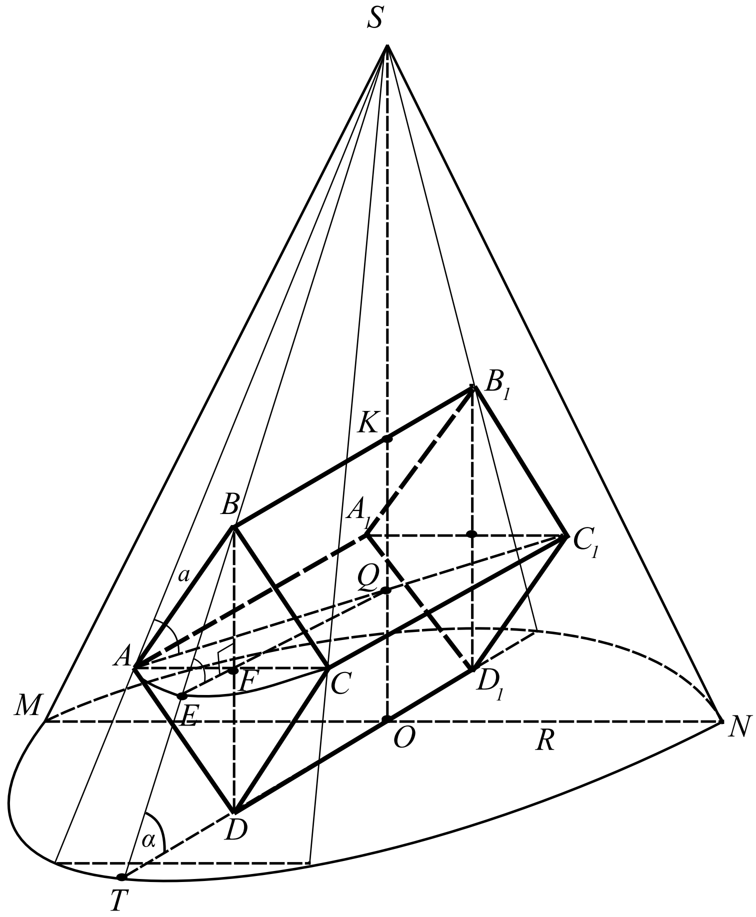


Рис. 10. Боковое ребро DD_1 куба лежит на диаметре основания конуса, а вершины куба A, B, C, A_1, B_1, C_1 принадлежат образующим конуса.
[Fig. 10. The side edge DD_1 of the cube is one the base diameter of the cone, and the cube corners A, B, C, A_1, B_1, C_1 are relative to the forming parts of the cone.]

А поскольку из треугольника TDS следует, что $H = R\operatorname{tg}\alpha$, то высота

$$H = \frac{a}{2}\left(2\sqrt{3}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $H = \frac{a\sqrt{2}\left(5+\sqrt{3}\right)}{4}$, $R = \frac{a}{2}\left(2\sqrt{3}-1\right)$.

Заключение

В заключение работы хотелось бы еще раз обратиться к И. Кеплеру, и привести окончание его цитаты, приведенной в самом начале нашей статьи: «среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб ... а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколько у куба граней» [11]. Все задачи с октаэдром будут составлять суть уже другой нашей работы ...

Список литературы

1. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О.О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 37, № 4, С. 216–234 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234.
2. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О.О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. II., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 39, № 2, С. 197–221 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221.
3. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике. Решение задач*, Учебное пособие для 11 кл.. Москва: Просвещение, 1991. 384 с.
4. Сканави М. И. *Сборник задач по математике для поступающих в вузы.* М.: Мир и Образование, 2013. 608 с.
5. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. *Сборник задач по элементарной математике.*. Москва: Физматлит, 1960. 928 с.
6. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Избранные вопросы элементарной математики*, Пособие по математике для поступающих в вузы. Москва: Наука, 1976. 638 с.
7. Черкасов О. Ю., Якушев А. Г. *Математика*, Интенсивный курс подготовки к экзамену. Москва: Рольф, 1997. 384 с.
8. Прасолов В. В. *Задачи по стереометрии*, Учебное пособие. Москва: МЦНМО, 2016. 352 с.
9. Литвиненко В. Н. *Сборник задач по стереометрии с методами решений*, Пособие для учащихся. Москва: Просвещение, 1998. 255 с.
10. Рыбкин Н. А. *Сборник задач по геометрии. Стереометрия*, Т. 2. Москва: Учпедгиз, 1960. 88 с.
11. Веннинджер М. *Модели многогранников*, Пер. с англ. В.В. Фирсова. Москва: Мир, 1974. 236 с.

Информация об авторах

Федоров Борис Павлович – преподаватель кафедры математики (1967 – 2000) Государственного гуманитарно - технологического университета, г. Орехово – Зуево, Россия.

Богданова Софья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследоательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0001-8503-1794.

Гладков Сергей Октябринович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследоательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0002-2755-9133.

References

[1] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 37, no. 4, pp. 216–234. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234 (In Russian)

[2] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 2. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, vol. 39, no. 2, pp. 197–221. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221 (In Russian)

[3] Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyy kurs po matematike: Resheniye zadach [Optional course in mathematics: Problem solving]. Moscow, Prosveshcheniye, 1991, 384 pp. (In Russian)

[4] Ckanavi M. I. Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh v vuzy [Collection of problems in mathematics for those entering universities]. Moscow, Mir i Obrazovaniye, 2013, 608 pp. (In Russian)

[5] Antonov N. P., Vygodskiy M. YA., Nikitin V. V., Sankin A. I. Sbornik zadach po elementarnoy matematike [Collection of problems in elementary mathematics]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 928 pp. (In Russian)

[6] Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. X. Posobiye po matematike dlya postupayushchikh v vuzy (izbrannyye voprosy elementarnoy matematiki) [A manual on mathematics for those entering universities (selected questions of elementary mathematics)]. Moscow, Nauka, 1976, 638 pp. (In Russian)

[7] Cherkasov O. YU., Yakushev A. G. Matematika. Intensivnyy kurs podgotovki k ekzamenu [Mathematics. Intensive exam preparation course]. Moscow, Rolf, 1997, 384 pp. (In Russian)

[8] Prasolov V. V. Zadachi po stereometrii: Uchebnoye posobiye. [Problems in stereometry: Textbook]. Moscow, MCNMO, 2016, 352 pp. (In Russian)

[9] Litvinenko V. N. Sbornik zadach po stereometrii s metodami resheniy: Posobiye dlya uchashchikhsya. [Collection of problems on stereometry with methods of solutions: A manual for students.Mathematics]. Moscow, Enlightenment, 1998, 255 pp. (In Russian)

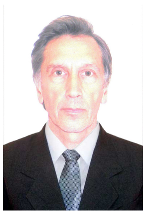
[10] Rybkin N. A. Sbornik zadach po geometrii. Ch.2: Stereometriya. [Collection of problems in geometry. Part 2: Stereometry]. Moscow, Uchpedgiz, 1960, 88 pp. (In Russian)

[11] Wenninger M. Polyhedron models. Cambridge. Cambridge University Press, 1971.

Information about authors

Fedorov Boris Pavlovich (1931-2003) – Lecturer at the Department of Mathematics (1967 to 2000) at the State Humanitarian and Technological University, Orekhovo-Zuevo, Russia.

Bogdanova Sofya Borisovna – Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0001-8503-1794.



Gladkov Sergey Oktyabrinovich – D.Sc. (Phys. & Math.), Professor, Associate Professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0002-2755-9133.