Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 44. №3. C. 58-66. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.27.2

Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами

*Л. М. Энеева**

Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 360017, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А, Россия

Аннотация. Рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка с композицией лево- и правосторонних операторов дробных производных в главной части. Уравнения, содержащие композицию операторов дифференцирования дробного порядка с различными началами, появляются при моделировании различных физических и геофизических явлений. К их появлению приводит использование понятия эффективной скорости изменения параметров моделируемых процессов. В частности, уравнения рассматриваемого в работе вида возникают при описании диссипативных колебательных систем. Дробное дифференцирование понимается в смысле РиманаЛиувилля и Герасимова-Капуто. Для исследуемого уравнения изучается нелокальная краевая задача. Нелокальное краевое условие задано в форме интегрального оператора от искомого решения. При определенном условии на ядро оператора, фигурирующего в нелокальном условии, рассматриваемая задача эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Найдены достаточные условия разрешимости исследуемой задачи, включающее интегральное ограничение на переменный потенциал. В качестве следствия получено неравенство Ляпунова для решений рассматриваемой нелокальной задачи. Показано, что возникающее в решении задачи условие на ядро интегрального оператора из нелокального условия, является необходимым, в том смысле, что при нарушении этого условия единственность решения задачи теряется.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными с различными началами, нелокальная краевая задача, производная Римана–Лиувилля, производная Герасимова–Капуто, неравенство Ляпунова.

Получение: 20.10.2023; Исправление: 26.10.2023; Принятие: 28.10.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Энеева Л. М. Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 44. № 3. C. 58-66. EDN: YOUDLG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: eneeva72@list.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66

Research Article

Full text in Russian

MSC 26A33, 34B05

Nonlocal Boundary Value Problem for an Equation with Fractional Derivatives with Different Origins

L. M. Eneeva*

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. We consider a linear ordinary differential equation of fractional order with a composition of left- and right-sided fractional derivative operators in the principal part. Equations containing a composition of fractional order differentiation operators with different origins appear when modeling various physical and geophysical phenomena. Their appearance is caused by the use of the concept of the effective rate of change in the parameters of the simulated processes. In particular, equations of the type considered in this work arise when describing dissipative oscillatory systems. Fractional differentiation is understood in the sense of Riemann-Liouville and Gerasimov-Caputo. For the equation under study, a nonlocal boundary value problem is investigated. The nonlocal boundary condition is specified in the form of an integral operator of the desired solution. Under a certain condition on the kernel of the operator appearing in the nonlocal condition, the problem under consideration is equivalently reduced to the Fredholm integral equation of the second kind. Sufficient conditions for the unique solvability of the problem under study are found, including an integral constraint on the variable potential. As a corollary, the Lyapunov inequality for solutions to the nonlocal problem under consideration is obtained. It is shown that the condition on the kernel of the integral operator from the nonlocal condition that arises in the solution of the problem is necessary in the sense that if this condition is violated, the uniqueness of the solution to the problem is lost.

Key words: fractional differential equation with different origins, nonlocal boundary value problem, Riemann–Liouville derivative, Gerasimov–Caputo derivative, Lyapunov inequality.

Received: 20.10.2023; Revised: 26.10.2023; Accepted: 28.10.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Eneeva L. M. Nonlocal boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **44**: 3, 58-66. EDN: YOUDLG. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66.

Funding. The study was carried out without support from foundations

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

***Correspondence:** E-mail: eneeva72@list.ru

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - q(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $q(x)$ и $f(x)$ — заданные функции; $x \in]0,1[$; D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} — дробные производные порядка α $(0 < \alpha < 1)$ в смысле Римана–Лиувилля с началом в точке $x = 0$, и в смысле Герасимова–Капуто с началом в точке $x = 1$, соответственно [1]:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt,$$

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{-\alpha}\frac{d}{dt}u(t)dt.$$

Как известно [1], дробное исчисление и дифференциальные уравнения дробного порядка занимают особое место в математическом моделировании различных физических и геофизических процессов. При этом использование понятия эффективной скорости изменения параметров при моделировании различных физических систем приводит к уравнениям, содержащим композицию производных дробного порядка с различными началами [2], [3]. В частности, уравнения вида (1) возникают при моделировании диссипативных колебательных систем. Различные вопросы теории уравнений такого вида рассматривались в [4]–[10] (см. также библиографию в этих работах).

В данной работе исследуется нелокальная краевая задача для уравнения (1). Нелокальное краевое условие задается в форме интеграла от искомого решения. Рассматриваемая задача эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Указываются достаточные условия разрешимости исследуемой задачи. Как следствие, для исследуемой задачи получено неравенство Ляпунова. Кроме того, показано, что нарушение одного из найденных условий приводит к неединственности решения исследуемой задачи.

Постановка задачи

Далее, как обычно, $AC[0,1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u = u(x)$ из класса

$$u(x) \in AC[0,1], \qquad D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) \in AC[0,1],$$

удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Будем рассматривать следующую задачу: *найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(1) = a, \qquad \int_0^1 \omega(x)\,u(x)\,dx = b, \tag{2}$$

где $\omega \in L[0,1]$, $\omega \not\equiv 0$.

Редукция к интегральному уравнению

В работе [10] показано, что если $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $q(x) \in C[0,1]$, $f(x) \in L[0,1]$, и функция $u(x)$ является регулярным решением уравнения (1), то она удовлетворяет нагруженному интегральному уравнению

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t)q(t)u(t)dt = \tag{3}$$

$$= u(1) + K(x,0) \cdot \left[D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)\right]_{x=0} + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

Верно и обратное, всякое интегрируемое решение уравнения (3) является регулярным решением уравнения (1) (см. теорему 1 работы [10]). Здесь

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_{\max\{x,t\}}^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds. \tag{4}$$

Пусть $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (2). Умножая обе части уравнения (3) на $\omega(x)$ и интегрируя от 0 до 1, учитывая условия (2), после простых преобразований получаем

$$P(0)\left[D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}\,u(x)\right]_{x=0} = b - a - \int_0^1 P(t)q(t)u(t)\,dt - \int_0^1 P(t)f(t)\,dt, \tag{5}$$

где

$$P(t) = \int_0^1 \omega(x)K(x,t)dx. \tag{6}$$

В силу свойств функции $K(x,t)$ (см. [10]), (6) можно записать в виде

$$P(t) = D_{1t}^{-\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\omega(t). \tag{7}$$

Пусть $P(0) \neq 0$. Тогда из (3) и (5) получаем соотношение

$$u(x) - \int_0^1 G(x,t)\,q(t)\,u(t)dt = F(x), \tag{8}$$

где

$$G(x,t) = K(x,t) - K(x,0) \cdot \frac{P(t)}{P(0)} \tag{9}$$

и

$$F(x) = a\left[1 - \frac{K(x,0)}{P(0)}\right] + b\frac{K(x,0)}{P(0)} + \int_0^1 G(x,t)\,f(t)dt. \tag{10}$$

Таким образом, получаем, что всякое регулярное решение задачи (1), (2) является решением интегрального уравнения (8). Оказывается, верно и обратное. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть*

$$\alpha \in (1/2, 1), \quad q(x) \in C[0,1], \quad f(x),\ \omega(x) \in L[0,1], \tag{11}$$

и

$$[D_{1t}^{-\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\omega(t)]_{t=0} \neq 0. \tag{12}$$

И пусть $u(x)$ *— регулярное решение задачи* (1), (2). *Тогда* $u(x)$ *является решением интегрального уравнения* (8).

Обратно, при выполнении условий (11) *и* (12), *любое интегрируемое решение уравнения* (8) *является регулярным решением задачи* (1), (2).

Доказательство. Первая часть теоремы следует из приведенных выше рассуждений. Докажем вторую часть.

Учитывая, что $K(1,t) = 0$, а также определение (6), легко заметить, что

$$\lim_{x\to 1} G(x,t) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} F(x) = a,$$

и

$$\int_0^1 \omega(x)G(x,t)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 \omega(x)F(x)\,dx = b.$$

Поэтому, если $u(x)$ — решение интегрального уравнения (8), то непосредственно проверяется, что $u(x)$ удовлетворяет условиям (2).

Далее, учитывая обозначения (9) и (10) запишем уравнение (8) в виде

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t)q(t)u(t)dt = a + C\,K(x,0) + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt, \tag{13}$$

где

$$C = \frac{1}{P(0)}\left[b - a - \int_0^1 P(t)q(t)u(t)\,dt - \int_0^1 P(t)f(t)\,dt\right].$$

Действуя на обе части (16) оператором $D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}$ и устремляя x к нулю убеждаемся, что

$$C = \left[D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)\right]_{x=0}.$$

Учитывая первое из условий (2), это означает, что если функция $u(x)$ является решением уравнения (8), то она также является и решением уравнения (3). Следовательно, в соответствием с теоремой 1 работы [10], $u(x)$ является регулярным решением уравнения (1). Это завершает доказательство теоремы. □

Об условиях однозначной разрешимости

Как следует из доказанной выше теоремы, вопрос о существовании и единственности решения задачи (1), (2) эквивалентен вопросу об однозначной разрешимости интегрального уравнения (8), которое является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. Следовательно из единственности решения этого уравнения будет следует и его существование.

Далее примем обозначение

$$M = \sup_{0<x,t<1}\left|K(x,t) - K(x,0)\cdot\frac{P(t)}{P(0)}\right|. \tag{14}$$

Нетрудно заметить, что $M \neq 0$ ни для какой функции $\omega(x)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (11), (12) *и*

$$\int_0^1 |q(t)|\,dt < \frac{1}{M}. \tag{15}$$

Тогда интегральное уравнение (8) *имеет и притом единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что однородное уравнение

$$u(x) - \int_0^1 G(x,t)\,q(t)\,u(t)dt = 0 \tag{16}$$

имеет отличное от нуля решение интегрируемое решение. Тогда, учитывая свойства ядра $G(x,t)$, можно заключить, что это решение будет непрерывным на отрезке $[0,1]$. Пусть $u_m = \max_{[0,1]}|u(x)|$. По нашему предположению $u_m > 0$. Далее, из (16) следует, что

$$u_m \leq u_m M \int_0^1 |q(t)|\,dt, \tag{17}$$

что противоречит (15). Следовательно, уравнение (16) не имеет отличных от нуля решений. Отсюда следует, что единственность решения интегрального уравнения (8), что в свою очередь, следует его существование. □

Из доказанных выше теорем следует теорема о существовании и единственности задачи (1), (2).

Теорема. *Пусть выполнены условия* (11), (12) *и* (15). *Тогда решение задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

Следствием этой теоремы является аналог неравенства Ляпунова для задачи (1), (2).

Следствие. Пусть выполнены условия (11) и (12). Если однородная задача (1), (2) (т.е. $f \equiv 0$, $a = b = 0$) имеет отличное от тождественного нуля решение, то

$$\int_0^1 |q(t)|\,dt \geq \frac{1}{M}. \tag{18}$$

Доказательство. Если неравенство (18) нарушено, то имеет место (15), и из доказанной теоремы следует, что $u \equiv 0$. Но это противоречит условию теоремы о существовании отличного от нулю решения. Следовательно неравенство (18) не может быть нарушено. □

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} D_{0t}^{-\alpha}\omega(t)\,dt \neq 0. \tag{19}$$

О неединственности решения

Условие (12) оказывается существенным и его нарушение приводит к неединственности решения задачи (1), (2). Более точно, если условие (12) нарушено, то есть если

$$[D_{1t}^{-\alpha} D_{0t}^{-\alpha}\omega(t)]_{t=0} = 0, \tag{20}$$

то задача

$$D^{\alpha}_{0x}\partial^{\alpha}_{1x}u(x) - q(x)u(x) = 0, \tag{21}$$

$$u(1) = 0, \qquad \int_0^1 \omega(x)\, u(x)\, dx = 0, \tag{22}$$

имеет бесконечное число отличных от тождественного нуля решений.

Действительно, как следует из теоремы 1 работы [10] и равенств (6) и (7), при справедливости равенства (20), всякое решение уравнения

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t)q(t)u(t)dt = CK(x,0) \tag{23}$$

будет и решением задачи (1), (22).

Как известно [10], если

$$\int_0^1 |q(t)|\, dt < (2\alpha - 1)\Gamma^2(\alpha),$$

то интегральное уравнение (23) для любого C будет иметь отличное от нуля решение, которое и будет нетривиальным решением задачи (1), (22).

Заключение

Таким образом, для уравнения (1), содержащего композицию лево- и правосторонних производных Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто, решена нелокальная краевая задача (2). При выполнении условия (12) задача эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению (8), однозначная разрешимость которого обеспечивается условием (15). Одним из следствием данного факта является неравенство Ляпунова (18) для решений задачи (1), (2). Кроме того, обнаружено, что при нарушении условия (12), однородная задача (1), (22) имеет бесконечное число отличных от тождественного нуля решений.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М:: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма в ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37.
3. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования, *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194–197.
4. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 3, № 2(11), С. 39–44.
5. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série,*, 2006. vol. 80(94), pp. 259–272.
6. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2007. vol. 10, no. 2, pp. 139–150.
7. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2014. vol. 13, no. 1, pp. 125–142.
8. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator, *Documenta Mathematica*, 2016. vol. 21, pp. 1503–1514.

9. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems, *Mathematics*, 2020. vol. 8(12), pp. 2122.
10. Энеева Л. М. Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 36, № 3, С. 65–71.
11. Энеева Л. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 40, № 3, С. 64–71.

Информация об авторе

Энеева Лиана Магометовна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0003-2530-5022.

References

[1] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye. [Fractional calculus and its application]. Moscow. Fizmatlit, 2003. 272 p.(In Russian).

[2] Rekhviashvili S. Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics, Technical Physics Letters, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 33–37.

[3] Rekhviashvili S. Sh. Fractional derivative physical interpretation, Nonlinear world, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–197.(In Russian).

[4] Eneeva L. M. Boundary value problem for differential equation with fractional order derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, vol. 3, no. 2(11), pp. 39–44.(In Russian).

[5] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006. T. 80(94), C. 259–272.

[6] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. T. 10, №2, C. 139–150.

[7] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. T. 13, №1, C. 125–142.

[8] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator Documenta Mathematica, 2016. T. 21, C. 1503–1514.

[9] Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems. Mathematics, 2020. T. 8(12), C. 2122.

[10] Eneeva L. M. Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 36, no. 3, pp. 65–71.(In Russian).

[11] Eneeva L. M. Solution of a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, no. 3(40), pp. 64–71.(In Russian).

Information about author

Eneeva Liana Magometovna – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0003-2530-5022.