МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-9-18

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

Задача Коши для нагруженного линейного уравнения с частными производными первого порядка

А. Х. Аттаев*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А, Россия

Аннотация. Как хорошо известно, наличие характеристик является очень существенным при исследовании задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными независимо от его порядка. В случае, если дифференциальное уравнение с частными производными является нагруженным, то для однозначной разрешимости задачи Коши возникают дополнительные условия разрешимости, зависящие от вида следа нагрузки. Эти условия возникают даже для простейших линейных нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными, начиная с первого порядка и выше. Основная цель данной работы – проиллюстрировать возникающие эффекты на примере исследования задачи Коши для линейного нагруженного уравнения в частных производных первого порядка. Так как корректность поставленной задачи Коши эквивалентным образом редуцируется к интегральному уравнению второго рода, то основной метод, применяемый для доказательства его разрешимости – метод последовательных подстановок. Основной вывод заключается в том, что разрешимость задачи Коши для нагруженного уравнения в частных производных существенным образом зависит от выбора следа нагрузки. В случае, когда разрешимость задачи Коши доказана, оказывается, что область влияния данных Коши не ограничивается только характеристиками, а появляются новые не характеристические линии, за которые данные Коши однозначно продолжаться не могут.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, нагруженное дифференциальное уравнение, задача Коши, интегральное уравнение, метод последовательных подстановок, характеристики дифференциального уравнения, корректная задача.

Получение: 04.10.2023; Исправление: 12.10.2023; Принятие: 30.10.2023; Публикация онлайн: 02.11.2023

Для цитирования. Аттаев А. Х. Задача Коши для нагруженного линейного уравнения с частными производными первого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 44. № 3. С. 9-18. EDN: ZIXUUH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-9-18.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-9-18

Research Article

Full text in Russian

MSC 35L02

The Cauchay Problem for a Loaded Partial Differential Equation of the First Order

A. Kh. Attaev*

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

Abstract. As is well known, the presence of characteristics is very significant in the study of the Cauchy problem for partial differential equations regardless of its order. In the case where the partial differential equation is loaded, additional conditions dependent on the type of load arise for the unique solvability of the Cauchy problem. These conditions arise even for the simplest first and higher order partial differential equations. The main purpose of this paper is to illustrate the effects arising from the study of the Cauchy problem for the linear loaded first-order partial differential equation. Since the correctness of the Cauchy problem is equivalently reduced to the integral equation of the second kind, the basic method is used to prove its solvability – method of successive substitutions. The main conclusion is that the solvability of the Cauchy problem for a loaded partial derivative equation essentially depends on the choice of the load. In the case when the solvability of the Cauchy problem is proven, it turns out that the area of influence of the Cauchy data is not limited to the characteristics only, but new non-characteristic lines appear, beyond which the Cauchy data cannot clearly be extended.

Key words: differential equations, loaded differential equation, Cauchy problem, integral equation, method of successive substitutions, characteristics of a differential equation, well-posed problem.

Received: 04.10.2023; Revised: 12.10.2023; Accepted: 30.10.2023; First online: 02.11.2023

For citation. Attaev A. Kh. The Cauchay problem for a loaded partial differential equation of the first order. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **44**: 3, 9-18. EDN: ZIXUUH. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-44-3-9-18.

Funding. The study was carried out without support from foundations

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

***Correspondence:** E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

Введение

В середине прошлого века вышло ряд работ [1]– [3], посвящённых граничным дифференциальным операторам, в которых исследовались вопросы существования и построения сопряженных к ним операторов, а также различные самосопряженные их расширения и сужения. Впоследствии термин «граничный оператор» начал заменяться на термин «нагруженный оператор».

В 1976 году в журнале дифференциальные уравнения вышла работа А.М. Нахушева [4], посвящённая задаче Дарбу, где было введено определение нагруженного дифференциального уравнения. Следствием интенсивного и глубокого исследования последних неполных 50-и лет в этой области явились огромное количество работ. Отметим лишь некоторые из них [5]– [14], в которых можно найти обширную библиографию работ, посвящённых данной тематике. Нагруженные уравнения применяются как метод математического моделирования нелокальных и фрактальных процессов и явлений, а также как метод эффективного поиска приближённых решений дифференциальных уравнений. Отдельно можно отметить применение нагруженных уравнений в математической биологии и экономике [15], [16].

Нагруженным уравнением в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ называется уравнение $Lu(x) = f(x)$, где L — оператор, содержащий след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих $\overline{\Omega}$ многообразиях размерности меньше n [6]. Пусть Γ — искомый заданный след, а F — образующее отображение, то есть $F\colon \overline{\Omega} \to \Gamma$.

Существенную роль для корректной постановки различных задач, а в особенности задачи Коши для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных играют два фактора: первый — выбор вида следа, второй — выбор следообразующего отображения. Впервые идеальное сочетание этих двух факторов было продемонстрировано в работе [4] при исследовании задачи Дарбу для вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Фактически А.М. Нахушев указал класс «нагрузок» для гиперболических операторов, возмущающие свойства которых расширяют класс корректных задач. Эта идея была подхвачена многими исследователями и воплощена в ряде работ [17]– [22].

Разрешимость различных задач для нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными с «нехорошей нагрузкой» как правило эквивалентным образом редуцируется к разрешимости интегро-дифференциальных функциональных уравнений, при исследовании которых возникают принципиальные трудности. Особенно эти трудности возникают для нагруженных дифференциальных уравнений, у которых есть характеристические кривые, в частности нагруженные гиперболические уравнения.

Задача Коши для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического типа в частных производных является недостаточно исследованной. При исследовании задачи Коши для уравнений с одним или двумя семействами характеристик принципиальных отличий нет. Разница в технической реализации. Поэтому в данной работе объектом исследования является линейно нагруженное дифференциальное уравнение с одним семейством характеристик, причём след Γ зависит от некоторого параметра x_0.

Основная часть

Будем рассматривать уравнение

$$u_x + u_y = \lambda u(x_0, y), \tag{1}$$

λ, x_0 — произвольные действительные постоянные, $\lambda \neq 0$.

Для уравнения (1) мы будем исследовать следующую задачу.

Задача Коши. *Найти регулярное решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$u(x, kx) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

где k *— произвольное неотрицательное число, принимающее значение вплоть до* $+\infty$.

Сделав в (1) замену $v(x, y) = u(x, y) - \lambda \int_0^y u(x_0, t)dt$ и выразив $u(x_0, t)$ через $v(x_0, t)$, нетрудно показать, что следующее выражение есть общее решение уравнения (1)

$$u(x, y) = f(x - y) + \lambda \int_0^y K(y, t) f(x_0 - t)dt, \tag{3}$$

где $K(y, t) = e^{\lambda(y-t)}$, а $f(x - y)$ есть общее решение уравнения $v_x + v_y = 0$.

Пусть $\Omega = \{(x, y) \colon 0 < x - y < l,\ x_0 - l < y < x_0\}$.

Так как решение поставленной задачи будет зависеть от значения k, а при фиксированном k – от значения x_0, то дальнейшее изложение разобьём на несколько пунктов.

1^0. $k = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \in C^1((0, l)) \cap C([0, l])$. *Тогда решение* $u(x, y)$ *задачи Коши из класса* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *в области* Ω *для любого* $0 \leqslant x_0 \leqslant l$ *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x, y) = \varphi(x - y) + \lambda \int_0^y K(y, t)\varphi(x_0 - t)dt. \tag{4}$$

Доказательство формулы (4) очевидно.

2^0. $0 < k \leqslant 1/2$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^1(0, l) \cap C[0, l]$. *Тогда для любого* $x_0 \in [kl,\ (1 - k)\, l]$ *решение* $u(x, y)$ *из класса* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *в области* Ω *существует и единственно.*

Доказательство.

Удовлетворяя (3) условию (2), получим

$$f(x-kx)+\lambda\int_0^{kx}K(kx,t)f(x_0-t)dt=\varphi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l.$$

Сделав замены, одну под интегралом $x_0-t=t$, другую – в уравнении $x-kx=z$, получим

$$f(z)=\varphi\left(\frac{z}{1-k}\right)+\lambda\int_{x_0-\alpha z}^{x_0}K(\alpha z,x_0-t)f(t)dt,\quad 0\leqslant z\leqslant(1-k)\,l. \tag{5}$$

где $\alpha=\frac{k}{1-k}$.

Уравнение (5) является интегро-функциональным уравнением. Будем решать его методом последовательных подстановок.

Взяв в качестве начальной функции $\varphi\left(\frac{z}{1-z}\right)$ и последовательно подставляя вместо $f(z)$ его значение из уравнения (5), получим

$$\begin{gathered}f(z)=\varphi\left(\frac{z}{1-k}\right)+\lambda\int_{x_0-\alpha z}^{x_0}K(\alpha z,x_0-t)\varphi\left(\frac{t}{1-k}\right)dt+\\+\lambda^2\int_{x_0-\alpha z}^{x_0}K(\alpha z,x_0-t)\int_{x_0-\alpha t}^{x_0}K(\alpha t,x_0-t_1)\varphi\left(\frac{t_1}{1-k}\right)dt_1dt+\ldots\end{gathered}\tag{6}$$

Общий член этого ряда имеет вид

$$\begin{gathered}V_n(z)=\lambda^n\int_{x_0-\alpha z}^{x_0}K(\alpha z,x_0-t)\int_{x_0-\alpha t}^{x_0}K(\alpha t,x_0-t_1)\cdots\\\cdots\int_{x_0-\alpha t_{n-2}}^{x_0}K(\alpha t_{n-2},x_0-t_{n-1})f\left(\frac{t_{n-1}}{1-k}\right)dt_{n-1}\cdots dt_1dt.\end{gathered}$$

Так как $|K(\alpha z,x_0-t)|\leqslant M$, $|f(t)|\leqslant N$, то

$$|V_n(z)|\leqslant\lambda^n\int_{x_0-\alpha z}^{x_0}\int_{x_0-\alpha t}^{x_0}\cdots\int_{x_0-\alpha t_{n-2}}^{x_0}dt_{n-1}\cdots dt_1dt.$$

Так как $\alpha=\frac{k}{1-k}\leqslant1$ при $k\leqslant\frac12$, то $\frac{k}{1-k}z\leqslant z$. Поэтому

$$|V_n(z)|\leqslant\lambda^n\int_0^z\int_0^t\cdots\int_0^{t_{n-2}}dt_{n-1}\cdots dt_1dt\leqslant|\lambda|^n N\frac{[Ml\,(1-k)]^n}{n!}.$$

Эта оценка гарантирует абсолютную и равномерную сходимость ряда (6).

Теорема 2 доказана. □

Нарушение условия $x_0\in[kl,(1-k)\,l]$ приводит к нарушению единственности решения задачи Коши. Действительно, пусть $x_0\in[0,kl]$, тогда функция

$$f\,(z)=\begin{cases}F\left(\frac{1-k}{k}(x_0-z)\right)+\frac{1}{\lambda}F'\left(\frac{1-k}{k}(x_0-z)\right), & x_0-\frac{k}{1-k}z\leqslant0,\\0, & 0\leqslant z\leqslant\frac{1-k}{k}x_0,\\F(z), & \frac{1-k}{k}x_0\leqslant z\leqslant(1-k)\,l,\end{cases}$$

где $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющее условию

$$F\left(\frac{1-k}{k}x_0\right) = F''\left(\frac{1-k}{k}x_0\right), \tag{7}$$

является решением однородного уравнения

$$f(z) - \int_{x_0-\frac{k}{1-k}z}^{x_0} e^{\lambda\left(x_0-\frac{k}{1-k}z-t\right)} f(t)dt = 0. \tag{8}$$

Аналогично строится пример функции $f(z)$ при $x_0 \in [(1-k)\,l, l]$.

3^0. $1/2 < k < 1$.

Теорема 3. *Решение задачи Коши (1), (2), для любого* $k \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *и для любого* $x_0 \in [0, l]$ *существует, но не является единственным.*

Доказательство.

Пусть $x_0 \in (0, l)$, тогда очевидно, что функция

$$f\,(z) = \begin{cases} F\left(\frac{1-k}{k}(x_0-z)\right) + \frac{1}{\lambda}F'\left(\frac{1-k}{k}(x_0-z)\right), & x_0 - \frac{k}{1-k}z \leqslant 0, \\ 0, & 0 \leqslant z \leqslant x_0, \\ F(z), & x_0 \leqslant z \leqslant (1-k)\,l, \end{cases}$$

где $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (7) является решением уравнения (8).

□

При $x_0 = 0$ и при $x_0 = l$ аналогично можно построить функцию $f(z)$.

4^0. $k = 1$.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *и выполняется условие* $\varphi'(x_0) = \lambda\varphi(x_0)$, $\lambda \neq 0$. *Тогда решение* $u(x, y)$ *задачи Коши из класса* $C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *в области* Ω *существует, единственно и представимо в виде*

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda}\varphi'(x_0 - x + y) - \varphi(x_0 - x + y) + \varphi(y). \tag{9}$$

Доказательство.

Удовлетворяя (3) условию (2) при $k = 1$, получим

$$f(0) + \lambda\int_0^x e^{\lambda(x-t)} f(x_0 - t)dt = \varphi(x).$$

Так как $f(0) = \varphi(0)$, то из последнего равенства легко получается, что

$$f(x - y) = \frac{1}{\lambda}\varphi'(x_0 - x + y) - \varphi(x_0 - x + y) + \varphi(0).$$

Подставляя полученное значение $f(x - y)$ в (3), после нескольких преобразований, получаем (9).

□

Заключение

Выделим некоторые аспекты влияния нагрузки на исследуемую задачу

1. Как известно, область определения данных Коши в задаче (2) для уравнения (1) при $\lambda = 0$ представляет собой бесконечную полосу $\{(x, y) : 0 < x-y < l\}$. В случае, если $\lambda \neq 0$ и задача (2) для уравнения (1) корректно, то область определения данных Коши представляет собой параллелограмм $\{(x, y) : 0 < x - y < l, x_0 < y < (k-1)l + x_0\}$.

2. За счёт влияния нагрузки задача Коши при $k = 1$ для уравнения (1) имеет единственное решение, хотя хорошо известно, что при $\lambda = 0$ эта задача имеет бесчисленное множество решений.

3. Из приведенных представлений задачи Коши нетрудно заметить, что для любых фиксированных x_0 и k можно однозначно определить отрезок $[a, b] \in [0, l]$, задание $u(x, y)$ на котором делает задачу Коши корректной.

Список литературы

1. Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. Math.*, 1952. vol. 55, pp. 468–519.
2. Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959. vol. 90, no. 2, pp. 193–254.
3. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems, *Rocky Mountain J. Math.*, 1975. vol. 5, no. 4, pp. 493–542.
4. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1, С. 103–108.
5. Бородин А.В. Об одной оценке для уравнений в частных производных второго порядка и ее приложении, *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1, С. 12–21.
6. Бородин А.В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка. I, *Дифференц. уравнения*, 1979. Т. 15, № 1, С. 18–25.
7. Бородин А.В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка. II, *Дифференц. уравнения*, 1980. Т. 16, № 1, С. 20–33.
8. Борок В.М., Житомирский Я.И. Задача Коши для одного класса нагруженных уравнений, *Успехи математических наук*, 1979. Т. 34, № 1(205), С. 221–222.
9. Борок В.М., Житомирский Я.И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений, I. Единственность, *Известия вузов*, 1981. № 9, С. 5–12.
10. Борок В.М., Житомирский Я.И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений, II. Корректность, *Известия вузов*, 1981. № 10, С. 3–9.
11. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1, С. 181–184.
12. Казиев В.М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева–Бицадзе, *Дифференц. уравнения*, 1979. Т. 15, № 1, С. 173–175.
13. Шхануков М.Х. Разностный метод решения одного нагруженного уравнения параболического типа, *Дифференц. уравнения*, 1977. Т. 13, № 1, С. 163–167.
14. Ланин И.Н. Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка, *Дифференц. уравнения*, 1981. Т. 17, № 1, С. 97–106.
15. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
16. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения математической экономики, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2010. Т. 12, № 1, С. 91–97.
17. Казиев В.М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1981. Т. 17, № 2, С. 313–319.
18. Огородников Е. Н. Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003. № 19, С. 22–28.

19. Аттаев А. Х. Задача Гурса для локально-нагруженного уравнений со степенным параболическим вырождением, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2008. Т. 10, № 2, С. 14–16.
20. Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с оператором Геллерстедта в главной части, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 1, С. 7–21.
21. Аттаев А. Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2013. Т. 15, № 2, С. 25–28.
22. Аттаев А. Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2014. Т. 16, № 3, С. 9–12.

Информация об авторе

Аттаев Анатолий Хусеевич – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом «Уравнения смешанного типа», Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, Россия, ORCID 0000-0001-5864-6283.

References

[1] Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. Math., 1952, vol. 55, pp. 468–519

[2] Phillips R. S. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 1959, vol. 90, no. 2, pp. 193–254

[3] Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems, Rocky Mountain J. Math., 1975, vol. 5, no. 4, pp. 493–542.

[4] Nakhushev A. M., The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation, Differ. Uravn., 1976, vol. 12, no. 1. pp. 103–108 (In Russian).

[5] Borodin A. V. An estimate for second-order partial differential equations and its application, Differ. Uravn., 1978, vol. 14, no. 1. pp. 12–21 (In Russian).

[6] Borodin A. V., Differentiability with respect to the parameter of the solutions of nonlinear loaded boundary value problems for second-order partial differential equations. I, Differ. Uravn., 1979, vol. 15, no. 1. pp. 18–25 (In Russian).

[7] Borodin A. V. Differentiability with respect to the parameter of the solutions of nonlinear loaded boundary value problems for second-order partial differential equations. II, Differ. Uravn., 1980, vol. 16, no. 1. pp. 20–33 (In Russian).

[8] Borok V. M., Zhitomirskii Ya. I. The Cauchy problem for a certain class of loaded equations, Russian Math. Surveys, 1979, vol. 34, no. 1, pp. 219–220 DOI: 10.1070/RM1979v034n01ABEH002877

[9] Borok V. M., Zhitomirskii Ya. I. The Cauchy problem for linear loaded differential equations. I. Uniqueness, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1981, no. 9, pp. 5–12 (In Russian).

[10] Borok V. M., Zhitomirskii Ya. I. The Cauchy problem for linear loaded differential equations. II. Well-posedness, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1981, no. 10, pp. 3–9 (In Russian).

[11] Kaziev V. M. The Darboux problem for a certain second order loaded integro-differential equation, Differ. Uravn., 1978, vol. 14, no. 1. pp. 181–184 (In Russian).

[12] Kaziev V. M. The Goursat problem for a loaded integro-differential equation, Differ. Uravn., 1979, vol. 15, no. 1. pp. 173–175 (In Russian).

[13] Shkhanukov M. Kh. A difference method for the solution of a certain loaded parabolic type equation, Differ. Uravn., 1977, vol. 13, no. 1. pp. 163–167 (In Russian).

[14] Lanin I. N. A boundary value problem for loaded third-order hyperbolic-parabolic equation, Differ. Uravn., 1981, vol. 17, no. 1. pp. 97–106 (In Russian).

[15] Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoj biologii [Equations of mathematical biology]. Moskva: Vysshaya Shkola, 1995, p. 301 (In Russian).

[16] Nakhushev A. M. Loaded equations of mathematical economics, Adyghe Int. Sci. J., 2010, vol. 12, no. 1, pp. 91–97 (In Russian).

[17] Kaziev V. M. The Goursat problem for a loaded integro-differential equation, Differ. Uravn., 1981, vol. 17, no. 2. pp. 313–319 (In Russian).

[18] Ogorodnikov E. N. Some characteristic problems for loaded systems of differential equations and their relationship with non-local boundary value problems, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2003, vol. 19 pp. 22–28 DOI: 10.14498/vsgtu134 (In Russian).

[19] Attaev A. Kh. Goursat problem for locally loaded equation with parabolic power degeneracy, Adyghe Int. Sci. J., 2008, vol. 10, no. 2, pp. 14–16 (In Russian).

[20] Attaev A. Kh. Goursat problem for loaded degenerate second order hyperbolic equation with Gellerstedt operator in principal part, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 1, pp. 7–21 DOI: 10.14498/vsgtu1452 (In Russian).

[21] Attaev A. Kh. Problem with data on parallel characteristics for a loaded wave equation, Adyghe Int. Sci. J., 2013, vol. 15, no. 2, pp. 25–28 (In Russian).

[22] Attaev A. Kh. Goursat problem for the loaded hyperbolic equation, Adyghe Int. Sci. J., 2014, vol. 16, no. 3, pp. 9–12 (In Russian).

Information about author

Attaev Anatoliy Khuseevich – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Department «Equations of Mixed Type», Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0001-5864-6283.