МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-43-2-20-30

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.912, 519.85

Об уточнении метода сведения системы линейных дифференциальных уравнений к одному уравнению высшего порядка, позволяющего найти общее решение исходной

Д. Н. Баротов[1], Р. Н. Баротов[2]*

[1] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, 109456, г. Москва, 4-й Вешняковский проезд, д. 4, Россия

[2] Худжандский государственный университет им. академика Бободжона Гафурова, 735700, г. Худжанд, пр. Мав-лонбекова , д. 1, Таджикистан

Аннотация. Теория дифференциальных уравнений в настоящее время представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями. При изучении конкретных дифференциальных уравнений, которые возникают в процессе решения физических задач, создаются методы, обладающие большой общностью и применяющиеся к широкому кругу математических проблем. Задачи интегрирования дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами оказали большое влияние на развитие линейной алгебры. В настоящее время задача решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $x'(t) = A \cdot x(t)$ является одной из важнейших проблем как теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и линейной алгебры. Одним из наиболее известных методов решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка, позволяющему находить решения исходной системы в виде линейных комбинаций производных только одной функции. В данной работе исследована следующая задача: для каких матриц A компоненты системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ при любом начальном условии $x(t_0) = x_0$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций производных только одной заданной компоненты $x_k(t)$. Сформулирован новый простой критерий выразимости и подробно доказана его корректность. Полученный результат может быть также применен при исследовании решений системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ на периодичность и при изучении линейных систем на полную наблюдаемость.

Ключевые слова: однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка, критерий выразимости, алгоритм.

Получение: 28.03.2023; Исправление: 29.06.2023; Принятие: 03.07.2023; Публикация онлайн: 08.07.2023

Для цитирования. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. Об уточнении метода сведения системы линейных дифференциальных уравнений к одному уравнению высшего порядка, позволяющего найти общее решение исходной // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 43. № 2. С. 20-30. EDN: KJHTVW. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-43-2-20-30.

Финансирование. Работа выполнялась без поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: dnbarotov@fa.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-43-2-20-30

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A30, 90C90

On the Refinement of the Method of Reducing a System of Linear Differential Equations to a Single Higher-order Equation, Which Makes it Possible to Find a General Solution to the Original

D. N. Barotov[1]*, R. N. Barotov[2]

[1] Financial University under the Government of the Russian Federation, 109456, Moscow,4-th Veshnyakovsky Passage, 4, Russia

[2] Khujand state university named after academician Bobojon Gafurov, 683032, 735700, Khujand, Mavlonbekov ave., 1, Tajikistan

Abstract. The theory of differential equations is currently an exceptionally content-rich, rapidly developing branch of mathematics, closely related to other areas of mathematics and its applications. When studying specific differential equations that arise in the process of solving physical problems, methods are created that have great generality and are applied to a wide range of mathematical problems. The problem of integrating differential equations with constant coefficients had a great influence on the development of linear algebra. At present, the problem of solving a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients $x'(t) = A \cdot x(t)$ is one of the most important problems in both the theory of ordinary differential equations and linear algebra. One of the most well-known methods for solving a system of linear ordinary differential equations with constant coefficients is the method of reducing a system of linear equations to a single higher-order equation, which makes it possible to find solutions to the original system in the form of linear combinations of derivatives of only one function. In this paper, we study the following problem: for which matrices A the components of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ under any initial condition $x(t_0) = x_0$ can be expressed as linear combinations of derivatives of only one given component $x_k(t)$. A new simple expressibility criterion is formulated, and its correctness is proved in detail. The result obtained can also be applied in the study of solutions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ for periodicity and in the study of linear systems for complete observability.

Key words: homogeneous system of linear differential equations with constant coefficients, method for reducing a system of linear equations to a single higher-order equation, expressibility criterion, algorithm

Received: 28.03.2023; Revised: 29.06.2023; Accepted: 03.07.2023; First online: 07.07.2023

For citation. Barotov D. N., Barotov R. N. On the refinement of the method of reducing a system of linear differential equations to a single higher-order equation, which makes it possible to find a general solution to the original. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **43**: 2, 20-30. EDN: KJHTVW. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-43-2-20-30.

Funding. The work was carried out without the support of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: dnbarotov@fa.ru

Введение

Задача решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является одной из важнейших проблем как теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и линейной алгебры. Поэтому, с одной стороны, для таких систем разрабатываются новые методы и алгоритмы, а с другой стороны, существующие методы и алгоритмы решения таких систем совершенствуются.

К наиболее известным методам решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно отнести следующие: метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка, метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы, метод неопределенных коэффициентов [1–4] и метод матрично-алгебраических преобразований [5, 6].

В работах [7–11] рассмотрены еще некоторые подходы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а именно: в [9] предложен простой подход к решению систем, который позволяет получить решение в явном виде и проанализировать его, в [10] изложен операторный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений, который является некоторым аналогом методов Крамера и Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений, в [11] рассмотрен метод интегрируемых комбинаций для систем линейных дифференциальных уравнений, в [12] приведена реализация алгоритма решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с использованием преобразования Лапласа, так как одной из актуальных проблем компьютерной алгебры является задача решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в [7, 8] на примерах системы трех дифференциальных уравнений изложен способ сведения ее к одному дифференциальному уравнению, позволяющий найти общее решение исходной системы в виде линейных комбинаций производных только одной функции.

В данной работе рассматривается такая задача: для каких матриц A компоненты системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ при любом начальном условии $x(t_0) = x_0$ могут быть выражены в виде линейных комбинаций производных только одной заданной компоненты $x_k(t)$. В результате исследования найден новый простой критерий выразимости и подробно доказана его корректность, тем самым обобщён результат, приведенный в [13]. Полученный результат может быть также применен при исследовании решений системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ на периодичность и при изучении линейных систем на полную наблюдаемость.

Используемые обозначения и понятия

Пусть $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ - единичная матрица n-го порядка, а $E_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ - i-я строка матрицы E.

Пусть $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ и $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ - вещественная квадратная матрица n-го порядка.

Пусть $\det(A - \lambda \cdot E) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{p_m} = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0)$ такой, что $|\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}| = m$ и $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$.

Пусть v_i - собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i.

Пусть $B(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$.

Пусть $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ - i-я строка матрицы A, $B_j(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ - j-й столбец матрицы $B(\lambda)$.

Пусть $B^{(i)}(\lambda) = [B_1(\lambda), B_2(\lambda), \ldots, B_{i-1}(\lambda), B_{i+1}(\lambda), \ldots, B_n(\lambda)]$ - матрица, полученной из матрицы $B(\lambda)$ вычеркиванием i-го столбца $B_i(\lambda)$.

Критерий выразимости каждой компоненты решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных одной из компонент

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases} \tag{1}$$

Систему (1) напишем в матричном виде $x'(t) = A \cdot x(t)$.

В данной работе мы исследуем такую задачу: можно ли систему (1) относительно $x_k(t)$ привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{cases}
x_1(t) = d_{11}x_k(t) + d_{12}x'_k(t) + \dots + d_{1n}x_k^{(n-1)}(t) \\
x_2(t) = d_{21}x_k(t) + d_{22}x'_k(t) + \dots + d_{2n}x_k^{(n-1)}(t) \\
\dots \\
x_{k-1}(t) = d_{k-1\ 1}x_k(t) + d_{k-1\ 2}x'_k(t) + \dots + d_{k-1\ n}x_k^{(n-1)}(t) \\
x_k^{(n)}(t) = d_{k1}x_k(t) + d_{k2}x'_k(t) + \dots + d_{kn}x_k^{(n-1)}(t) \\
x_{k+1}(t) = d_{k+1\ 1}x_k(t) + d_{k+1\ 2}x'_k(t) + \dots + d_{k+1\ n}x_k^{(n-1)}(t) \\
\dots \\
x_n(t) = d_{n1}x_k(t) + d_{n2}x'_k(t) + \dots + d_{nn}x_k^{(n-1)}(t)
\end{cases} \tag{2}
$$

то есть можно ли для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ выразить значения всех функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, входящих в заданную систему (1), в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему.

Теорема 1. *Систему* (1) *относительно* $x_k(t)$ *можно привести к системе* (2) *тогда и только тогда, когда геометрическая кратность всех собственных значений и* k*-я координата всех собственных векторов матрицы* A *равны 1.*

Доказательство. Достаточность. Из теоремы Гамильтона-Кэли [1] следует, что

$$
x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) =
$$

$$
\left(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0E\right) \cdot x(t) = 0 \cdot x(t) = 0 \tag{3}
$$

Действительно, так как непосредственно дифференцируя систему (1) легко заметить, что

$$
x'(t) = A \cdot x(t), \quad x''(t) = A^2 \cdot x(t), ..., \quad x^{(n)}(t) = A^n \cdot x(t) \tag{4}
$$

Из (3) следует, что

$$
x_k^{(n)}(t) + a_{n-1}x_k^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x_k^{(n-2)}(t) + \dots + a_1x'_k(t) + a_0x_k(t) = 0 \tag{5}
$$

Пусть геометрическая кратность всех собственных значений и k-я координата всех собственных векторов матрицы A равны 1. Тогда из (4) следует, что

$$
\begin{cases}
x_k^{(n)}(t) + a_{n-1}x_k^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x_k^{(n-2)}(t) + \dots + a_1x'_k(t) + a_0x_k(t) = 0 \\
x_k(t) = E_k \cdot E \cdot x(t) \\
x'_k(t) = A_k \cdot E \cdot x(t) \\
x''_k(t) = A_k \cdot A \cdot x(t) \\
... \\
x_k^{(n-1)}(t) = A_k \cdot A^{n-2} \cdot x(t)
\end{cases} \tag{6}
$$

Докажем, что $\det(M) \neq 0$, где $M = \begin{bmatrix} E_k \cdot E \\ A_k \cdot E \\ A_k \cdot A \\ \dots \\ A_k \cdot A^{n-2} \end{bmatrix}$.

Пусть $v_i(j)$ - это присоединенный вектор высоты j, соответствующий собственному значению λ_i. Собственные векторы - это присоединенные векторы высоты 1, то есть $v_i(1) = v_i$.

Пусть $V = [v_1(1), v_1(2), ..., v_1(k_1), v_2(1), v_2(2), ..., v_2(k_2), ..., v_m(1), v_m(2), ..., v_m(k_m)]$ - матрица составленная из координат присоединенных векторов-столбцов матрицы A.

Для доказательства $\det(M) \neq 0$ достаточно и удобно показать, что $\det(M \cdot V) \neq 0$. В работе [14] доказано, что $\det(M \cdot V)$ равен $\det(V_c)$, где

$$V_c = \begin{bmatrix}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots & \lambda_1^{n-3} & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_1 & C_3^1\lambda_1^2 & \dots & C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_1 & \dots & C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3\lambda_1^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_1^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_1^{n-4} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{p_1-1}\lambda_1^{n-2-p_1} & C_{n-2}^{p_1-1}\lambda_1^{n-1-p_1} & C_{n-1}^{p_1-1}\lambda_1^{n-p_1} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_2^{n-3} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_2 & C_3^1\lambda_2^2 & \dots & C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_2 & \dots & C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3\lambda_2^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_2^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_2^{n-4} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{p_2-1}\lambda_2^{n-2-p_2} & C_{n-2}^{p_2-1}\lambda_2^{n-1-p_2} & C_{n-1}^{p_2-1}\lambda_2^{n-p_2} \\
\vdots & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \dots & \lambda_m^{n-3} & \lambda_m^{n-2} & \lambda_m^{n-1} \\
0 & 1 & C_2^1\lambda_m & C_3^1\lambda_m^2 & \dots & C_{n-3}^1\lambda_m^{n-4} & C_{n-2}^1\lambda_m^{n-3} & C_{n-1}^1\lambda_m^{n-2} \\
0 & 0 & 1 & C_3^2\lambda_m & \dots & C_{n-3}^2\lambda_m^{n-5} & C_{n-2}^2\lambda_m^{n-4} & C_{n-1}^2\lambda_m^{n-3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3\lambda_m^{n-6} & C_{n-2}^3\lambda_m^{n-5} & C_{n-1}^3\lambda_m^{n-4} \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{p_m-1}\lambda_m^{n-2-p_m} & C_{n-2}^{p_m-1}\lambda_m^{n-1-p_m} & C_{n-1}^{p_m-1}\lambda_m^{n-p_m}
\end{bmatrix},$$

C_m^k — биномиальный коэффициент. В работе [15] доказано, что

$$\det(V_c) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)^{p_i \cdot p_j} \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\det(M) \neq 0$, так как M, V - квадратные матрицы n-го порядка и, следовательно $\det(M \cdot V) = \det(M) \cdot \det(V)$. Теперь из (6) следует, что

$$\begin{cases} x_k^{(n)}(t) + a_{n-1}x_k^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x_k^{(n-2)}(t) + \dots + a_1 x_k'(t) + a_0 x_k(t) = 0 \\ x(t) = M^{-1} \cdot x_{(k)}(t) \end{cases} \quad (8)$$

где $x_{(k)}(t) = \begin{bmatrix} x_k(t) \\ x_k'(t) \\ x_k''(t) \\ \dots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$. Равенство (8) означает, что удалось выразить значения всех функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, входящих в систему (1), в виде линейных комбинаций производных только одной неизвестной функции $x_k(t)$, входящей в эту систему.

Необходимость. Пусть неверно, что геометрическая кратность всех собственных значений и k-я координата всех собственных векторов матрицы A равны 1. Тогда $\exists r \in \{1, 2, \dots, n\}$: либо a) k-я координата собственного вектора v_r, соответствующего собственному значению λ_r равна 0 либо b) количество собственных векторов-столбцов матрицы A, соответствующих собственному значению λ_r больше или равно 2.

Пусть $V' = [v_{\lambda_1}(1), \dots, v_{\lambda_1}(l_1), v_{\lambda_1}(l_1+1), \dots, v_{\lambda_1}(k_1), \dots, v_{\lambda_m}(1), \dots, v_{\lambda_m}(l_m), v_{\lambda_m}(l_m + 1), \dots, v_{\lambda_m}(k_m)]$ – матрица составленная из координат собственных и присоединенных векторов-столбцов матрицы A, где $v_{\lambda_i}(j) = \begin{cases} \text{собственный вектор, соответствующий } \lambda_i; \text{ если } j \in \{1, 2, \dots, l_i\} \\ \text{присоединенный вектор, соответствующий } \lambda_i; \text{ если } j \in \{l_i + 1, \dots, k_i\} \end{cases}$.

Известно [1], что $\det(V') \neq 0$.

a) В этом случае покажем, что $\det(M) = 0$. Для этого достаточно показать, что $\det(M \cdot V') = 0$. Действительно, так как $(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1} + 1)$-й столбец матрицы $M \cdot V'$ равен $M \cdot v_r = 0$.

b) В этом случае тоже покажем, что $\det(M) = 0$. Для этого достаточно показать, что $\det(M \cdot V') = 0$. Действительно, так как $(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1} + 1)$-й и $(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1} + 2)$-й столбца матрицы $M \cdot V'$ одинаковы. Теорема доказана. □

На основе конструктивного доказательства теоремы 1 легко разработать алгоритм, который по заданной $x_k(t) \in SoV$ систему (1) приводит к системе (2).

Алгоритм 1. *Приведение систему* (1) *к системе* (2) *(transforming the* (1) *system to the equivalent* (2) *system)*

function $\mathrm{Transform}(x_k(t), A)$

$X_{(k)}(t) := x_k(t)$

$M := E_k$

$C := E$

for $j = 1 \dots n-1$ ***do***

$X_{(k)}(t) := \mathrm{vstack}\left(X_{(k)}(t), x_k^{(j)}(t)\right)$

$M := \mathrm{vstack}(M, A_k \cdot C)$

$C := C \cdot A$

end for

$X := M^{-1} \cdot X_{(k)}(t)$

return X

end function

где $vstack(M_1, M_2)$ — вертикальное объединение матриц M_1, M_2.

Корректность эого алгоритма следует непосредственно из доказанной теоремы 1.

Заключение

В результате исследования для любой матрицы A найден простой критерий выразимости всех функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных только одной функции $x_k(t)$, в терминах рангов матриц и доказана его корректность. На основе доказанного критерия разработан соответствующий алгоритм и обоснована его корректность. Полученный результат может быть также применен при построении решений систем линейных дифференциальных уравнений, исследовании решений таких систем и при наблюдении линейных систем.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* М.: Физматгиз, 2010. 560 с.

2. Пантелеев А. В., Якимова А. С., Рыбаков К. А. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Практикум. М.: Инфра-М., 2016. 432 с.

3. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Физматгиз, 1965. 332 с.

4. Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Физматгиз, 1961. 100 с.

5. Мухамеджанова У. М. Жорданова форма матрицы и решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки*, 2017. № 1, С. 20-26.

6. Балоев А. А. Матрично-алгебраическая форма решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *Сибирский журнал индустриальной математики*, 2014. Т. 17, № 3, С. 3-12.

7. Назимов А. Б., Очилова М. А. О приведении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному дифференциальному уравнению высокого порядка, Современные проблемы и перспективы обучения математике, физике, информатике в школе и вузе: Межвузовский сборник научно - методических трудов. Вологда, Вологодский гос. унив., 2021, С. 41-47.

8. Подгаев А. Г., Син А. З. Простой способ обоснования метода исключения при решении нормальной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, *Ученые заметки ТОГУ*, 2014. Т. 5, № 4, С. 1357-1363.

9. Щитов И. Н., Бегун Е. Н. Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, Актуальные проблемы радио- и кинотехнологий: Материалы VI Международной научно-технической конференции, посвященной 125-летию со дня рождения выдающегося русского ученого в области электроники и вакуумной техники С.А. Векшинского, 16–17 ноября 2021 г.. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный институт кино и телевидения, 2022, С. 172–176.

10. Малышев Ю. В., Атаманов П. С. О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом, *Вестник Чувашского университета*, 2011. № 3, С. 155-159.

11. Ивлев В. В., Кривошей Е. А. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение), *Математическое образование*, 2018. №1 (85), С. 47-51.
12. Рыбаков М. А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа, *Вестник российских университетов. Математика*, 2009. Т. 14, №4, С. 791-792.
13. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. О выразимости функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$, собственные значения матрицы которой являются некратными в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему, *Прикладная математика и вопросы управления*, 2023. №2, С. 9-20.
14. Баротов Д. Н., Баротов Р. Н. Об одном критерии выразимости функций системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему, *Вычислительные методы и программирование*, 2023. №3, С. 1-15.
15. Ha T. T., Gibson J. A. A note on the determinant of a functional confluent Vandermonde matrix and controllability, *Linear Algebra and its Applications*, 1980. vol. 30, pp. 69-75.

Информация об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович – старший преподаватель департамента анализа данных и машинного обучения Финансового университета при Правительстве РФ, Москва, Россия, ORCID 0000-0001-5047-7710.

Баротов Рузибой Нумонжонович – докторант кафедры математического анализа имени профессора А. Мухсинова Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова, Худжанд, Таджикистан, ORCID 0000-0003-3729-6143.

References

[1] Gantmakher F. R. Teoriya matrits [The theory of matrices]. Moscow, Fizmatgiz, 2010, 560 p.(In Russian).

[2] Panteleev A. V., Yakimova A. S., Rybakov K. A. Obyknovennye differentsialnye uravneniya. Praktikum [Ordinary Differential Equations. Practical Work]. Moscow, INFRA-M, 2016, 432 p.(In Russian).

[3] Pontryagin L. S. Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1965, 332 p.(In Russian).

[4] Filippov A. F. Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam [Collection of problems on differential equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 100 p.(In Russian).

[5] Muhamedjonova O. M. Jordan Matrix Form and Solutions of Linear Systems of Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients, Scientists notes of Khujand State University Academician B. Gafurov Series: Natural and economic sciences, 2017, no. 1, pp. 20-26.(In Russian).

[6] Baloev, A. A. The Matrix-Algebraic Form of a Solution to the System of Linear Ordinary Differential Equations with Constant Coefficients", Sib. Zhurn. Industr. Matem., 2014, vol. 17, no. 3, pp. 3–12.(In Russian).

[7] Nazimov A. B., Ochilova M. A. On the reduction of a system of linear differential equations with constant coefficients to a single high-order differential equation. In Modern Problems and Prospects for Teaching Mathematics, Physics, and Computer Science at School and University. Vologda, Vologda State University, 2021, pp. 41–47.(In Russian).

[8] A. G. Podgaev, A. Z. Sin Simple proof of elimination methodunder the solution of normal linear sistem of differential equations with constant coefficients, Scientists notes PNU, 2014, vol. 5, no. 4, pp. 1357-1363.(In Russian).

[9] Shchitov, I. N. On one method for solving systems of linear differential equations with constant coefficients. In Actual problems of radio and film technologies: Proceedings of the VI International Scientific and Technical Conference. St. Petersburg, State Institute Film and Television, 2022, pp. 172–176.(In Russian).

[10] Malyshev Yu. V., Atamanov P. S. About solution of the system of linear differential equations by symbolic methods, Bulletin of the Chuvash University, 2011, no. 3, pp. 155-159.(In Russian).

[11] Ivlev V. V., Krivoshey E. A. Systems of linear differential equations Integrable combinations (continued), Mathematical Education, 2018, no. 1 (85), pp. 47–51.(In Russian).

[12] Rybakov, M. A. Solving systems of linear differential equations with constant coefficients using the Laplace transform, Bulletin of Russian Universities.Mathematics, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 791–792.(In Russian).

[13] Barotov D. N., Barotov R. N. On the expressibility of the functions of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$, the eigenvalues of the matrix of which are non-multiple in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system, Applied Mathematics and Control Sciences, 2023, no. 2, pp. 9-20.(In Russian).

[14] Barotov D. N., Barotov R. N. On one criterion of expressibility of functions of a system of linear differential equations with constant coefficients in the form of linear combinations of derivatives of one function included in this system, Numerical Methods and Programming, 2023, no. 3, pp. 1–15.(In Russian).

[15] Ha T. T., Gibson J. A. A note on the determinant of a functional confluent Vandermonde matrix and controllability, Linear Algebra and its Applications, 1980, vol. 30, pp. 69-75.

Information about authors

Barotov Dostonjon Numonjonovich – Senior Lecturer; Department of Data Analysis and Machine Learning, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia, ORCID 0000-0001-5047-7710.

Barotov Ruziboy Numonjonovich – Doctoral Student; Department of Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov, Khujand state university named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Tajikistan, ORCID 0000-0003-3729-6143.