Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. C. 180-190. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.2, 517.3

Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо

Г. М. Водинчар, Е. А. Казаков*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, 684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, ул. Мирная, 7.

Аннотация. В работе изучается двумерная система интегро-дифференциальных уравнений, которая является простейшей эредитарной моделью двумодового гидромагнитного динамо. Учет пространственной и временной нелокальности взаимодействий в динамо-системах сейчас активно исследуется. В маломодовых приближениях уравнений динамо можно рассматривать только временную нелокальность, т.е. эредитарность (память). Память в исследуемой системе реализована в виде обратной связи, распределенной по всем прошлым состояниям системы. Обратная связь представлена с помощью интегрального члена типа свертки от квадратичной комбинации фазовых переменных с ядром достаточно общего вида. Этот член моделирует подавление турбулентного генератора поля (α-эффекта) квадратичной формой от фазовых переменных. В реальных динамо-системах такое подавление обеспечивается силой Лоренца. Основной результат работы – доказательство возможности исключения интегрального члена для одного класса ядер. Такие ядра являются решениями однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Доказано, что исследуемую интегро-дифференциальную систему можно заменить дифференциальной системой большей размерности с подходящими начальными условиями на дополнительные фазовые переменные. Если ядро является решением уравнения n-го порядка, то размерность системы может достигать $3n-2$ и зависит от начальных условий, которым удовлетворяет ядро. В работе используются классические методы теории дифференциальных уравнений. Приводятся примеры динамических систем, возникающих при некоторых ядрах в результате исключения интегрального члена. Результаты работы можно использовать для верификации вычислительных алгоритмов и программных кодов, разработанных для решения интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гидромагнитное динамо, системы с памятью, эредитарность, интегро-дифференциальные уравнения.

Получение: 13.03.2023; Исправление: 20.03.2023; Принятие: 21.03.2023; Публикация онлайн: 16.04.2024

Для цитирования. Водинчар Г. М., Казаков Е. А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 180-190. EDN: BRDBZK. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда №22-11-00064.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: kazakov@ikir.ru

MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190

Research Article

Full text in Russian

MSC 47G20

Elimination of the Integral Term in the Equations of One Hereditary System Related to the Hydromagnetic Dynamo

G. M Vodinchar, E. A. Kazakov*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Russia, 684034, Paratunka, Mirnaya st., 7.

Abstract. We study a two-dimensional system of integro-differential equations, which is the simplest hereditary model of a two-mode hydromagnetic dynamo. Accounting for the spatial and temporal nonlocality of interactions in dynamo systems is currently being actively studied. In the low-mode approximations of the dynamo equations, one can consider only temporal nonlocality, i.e. heredity (memory). Memory in the system under study is implemented in the form of feedback distributed over all past states of the system. The feedback is represented by a convolution-type integral term of a quadratic combination of phase variables with a fairly general kernel. This term models the quenching of the turbulent field generator (α-effect) by a quadratic form in phase variables. In real dynamo systems, such quenchingn is provided by the Lorentz force. The main result of the work is a proof of the possibility of eliminating the integral term for one class of kernels. Such kernels are solutions of a homogeneous linear differential equation with constant coefficients. It is proved that the studed integro-differential system can be replaced by a higher-dimensional differential system with suitable initial conditions for additional phase variables. If the kernel is a solution to an n-order equation, then the dimension of the system can reach $3n-2$ and depends on the initial conditions that the kernel satisfies. The work uses classical methods of the theory of differential equations. Examples are given of dynamical systems that arise for some kernels as a result of the elimination of the integral term. The results of the work can be used to verify computational algorithms and program codes developed for solving integro-differential equations.

Key words: hydromagnetic dynamo, memory, heredity, integro-differential equations.

Received: 13.03.2023; Revised: 20.03.2023; Accepted: 21.03.2023; First online: 22.03.2023

For citation. Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 180-190. EDN: BRDBZK. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.

Funding. The work is supported by Russian Science Foundation, grant No. 22-11-00064.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: kazakov@ikir.ru

Введение

Теория гидромагнитного динамо успешно описывает процесс формирования крупномасштабных магнитных полей космических объектов. В простейшей форме этот механизм для космических динамо-систем представляет собой взаимную генерацию тороидальной и полоидальной компонент поля друг из друга с помощью крупномасштабных движений проводящей среды и мелкомасштабных турбулентных пульсаций [1, 2]. Работа динамо-системы носит самосогласованный характер с обратной связью. Обратная связь обеспечивается силой Лоренца, когда достаточно сильное магнитное поле влияет на движения среды, корректируя тем самым свою генерацию. Именно эта обратная связь обеспечивает генерацию полей конечной величины.

Память в динамо системах может проявляется в запаздывания отклика турбулентного генератора компонент поля на изменения энергии и/или спиральности поля. В простейшей форме работу динамо системы можно описать системой уравнений, где рассматривается только зависимость компонент от времени. Все пространственные взаимодействия при этом описываются на феноменологическом уровне. Более строго такую систему можно получить из уравнений динамо, используя двумодовое приближение для поля и галеркинскую аппроксимацию уравнений динамо [3–6]. В настоящей работе мы не обсуждаем вывод самих модельных уравнений и используем готовую систему.

Итак, пусть модель двумодового гидромагнитного динамо с памятью описывается следующей интегро-дифференциальной системой:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\eta^T x + y\left[\eta^T - \frac{p}{s^2}\int_0^t K(t-\tau)Q(x(\tau)y(\tau))\,d\tau\right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x\left[D - \int_0^t K(t-\tau)Q(x(\tau)y(\tau))\,d\tau\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ представляют тороидальную и полоидальную компоненты поля, положительные коэффициенты η^T, s, p, D являются управляющими параметрами модели. Для целей настоящей работы их физический смысл не играет роли, поэтому здесь не приводится. При необходимости смысл параметров можно посмотреть в работах [4–6].

Интегральный член определяет эредитарность (память) в данной системе и имеет физический смысл подавления интенсивности турбулентного генератора (α-эффекта) магнитного поля самим этим полем, т.е. реализует эредитарную обратную связь. В реальной физической динамо-системе обратная связь обеспечивается силой Лоренца, которая квадратична по полю [1, 2]. Поэтому функция $Q(x,y)$ является некоторой квадратичной формой своих аргументов, т.е. $Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, где A, B, C – некоторые постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно.

Ядро $K(t)$ интегрального члена должно затухать на бесконечности. Это соответствует тому, что система постепенно «забывает» свои прошлые состояния. Если ядро обладает степенной асимптотикой, память в системе имеет неограниченную длительность. В системах подобного типа можно переходить от интегро-дифференциальных уравнений к дифференциальным уравнениям дробного порядка [7–9]. Для схожей с (1) двумодовой эредитарной модели $\alpha\omega$-динамо со степенным ядром такое представление было выполнено в работе [10].

Если же затухание ядра происходит очень быстро, например, если ядро имеет экспоненциальную асимптотику, то можно говорить о конечности памяти, вводя ее эффективную длительность T_M. Например, ее можно определить соотношением:

$$T_M = \int_0^{+\infty} |K(t)|\,dt.$$

Тогда на временных масштабах порядка T_M и более память не должна влиять на поведение системы. Можно предположить, что для таких систем можно записывать модели в виде дифференциальных уравнений, возможно, за счет расширения фазового пространства.

В настоящей работе исследуется возможность сведения модели (1) к дифференциальной для одного класса ядер с экспоненциальной асимптотикой. Строится эквивалентная дифференциальная система, рассматриваются некоторые частные случаи.

Исключение интегрального члена

Одним из классов ядер, затухающих на бесконечности с экспоненциальной асимптотикой, являются решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Покажем, что для таких ядер возможно сведение (1) к дифференциальной системе. Введем обозначение для интегрального члена системы:

$$z(t) = \int_0^t K(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau. \tag{2}$$

Теорема. *Если ядро* $K(t)$ *является решением дифференциального уравнения*

$$a_0K^{(n)}(t) + a_1K^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}K'(t) + a_nK(t) = 0 \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами a_i*, то интегральное равенство*

$$z(t) = \int_0^t K(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau.$$

равносильно следующей задаче Коши для функции $z(t)$*:*

$$\begin{aligned} &a_0\frac{d^nz}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \dots + a_nz = \sum_{l=1}^{n} a_{n-l}\sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t)),\\ &z(0) = 0,\\ &\left.\frac{d^lz(t)}{dt^l}\right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t))\Big|_{t=0}, \quad l=1,\dots,n-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Будем последовательно дифференцировать равенство (2) по переменной t, используя правило дифференцирования интеграла, зависящего от параметра [11].

Первое дифференцирование дает:

$$\frac{dz}{dt}=\int_0^t K'(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau+K(0)Q(x(t),y(t)).$$

Второе дифференцирование дает:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\int_0^t K''(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau+K'(0)Q(x(t),y(t))+K(0)\frac{d}{dt}Q(x(t),y(t)).$$

Третье дифференцирование дает:

$$\frac{d^3z}{dt^3}=\int_0^t K^{(3)}(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau+K(0)\frac{d^2}{dt^2}Q(x(t),y(t))$$
$$+K'(0)\frac{d}{dt}Q(x(t),y(t))+K''(0)Q(x(t),y(t).$$

Тогда понятно, что выражение для l-ой производной функции $z(t)$ будет следующим:

$$\frac{d^lz}{dt^l}=\int_0^t K^{(l)}(t-\tau)Q(x(\tau),y(\tau))\,d\tau+\sum_{s=0}^{l-1}K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t)),\quad l=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Теперь домножим равенство (2) на a_n и каждое из равенств (5) на a_{n-l}, и просуммируем. В результате получим:

$$\begin{gathered}a_nz+a_{n-1}\frac{dz}{dt}+\cdots+a_1\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}+a_0\frac{d^nz}{dt^n}=\\=\int_0^t Q\left(x(\tau),y(\tau)\right)\left[a_nK(t-\tau)+a_{n-1}K'(t-\tau)+\cdots+a_0K^{(n)}(t-\tau)\right]\,d\tau+\\+\sum_{l=1}^{n}a_{n-l}\sum_{s=0}^{l-1}K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t)).\end{gathered} \tag{6}$$

Как видно из уравнения (3) в условии теоремы, выражение в квадратных скобках под знаком интеграла в (6) равно нулю. Тогда получаем дифференциальное уравнение для функции $z(t)$ из задачи Коши (4):

$$a_0\frac{d^nz}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}+\cdots+a_nz=\sum_{l=1}^{n}a_{n-l}\sum_{s=0}^{l-1}K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t)). \tag{7}$$

Ясно, что уравнение (7) будет равносильно (2) только вместе с начальными условиями для $z(t)$ и ее производных вплоть до $(n-1)$-го порядка. Из (2) видно, что $z(0) = 0$. Теперь положим $t = 0$ в каждом из равенств (5) для $l = 1,\dots,n-1$ и получим начальные условия:

$$\left.\frac{d^l z(t)}{dt^l}\right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1} K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t))\Big|_{t=0}, \quad l = 1,\dots,n-1. \tag{8}$$

Итак, равенство (2) можно заменить дифференциальным уравнением (7) с начальными условиями $z(0) = 0$ и (8), т.е. задачей Коши (4). Теорема доказана. □

Замечание 1. Среди решений уравнения (3) в зависимости от коэффициентов a_i могут быть и незатухающие, более того, среди них могут быть решения с экспоненциальным ростом. Однако такие ядра не представляют интерес с физической точки зрения, т.к. приводят к бесконечному росту поля.

Замечание 2. Уравнение (7) имеет порядок n по функции $z(t)$. А его правая часть может содержать производные функций $x(t)$ и $y(t)$ вплоть до порядка $n-1$. Это зависит от значения ядра и его производных в нулевой точке, а также от коэффициентов формы $Q(x,y)$. Действительно:

$$\frac{d^m}{dt^m}Q(x(t),y(t)) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j\left(A\frac{d^{m-j}x}{dt^{m-j}}\frac{d^j x}{dt^j} + 2B\frac{d^{m-j}x}{dt^{m-j}}\frac{d^j y}{dt^j} + C\frac{d^{m-j}y}{dt^{m-j}}\frac{d^j y}{dt^j}\right), \tag{9}$$

где C_m^j – биномиальный коэффициент. В этом выражении есть производные вплоть до m-го порядка. И такие выражения суммируются в правой части (7) для $m = 0,\dots,n-1$. Поэтому порядок (7) по каждой из функций $x(t)$ и $y(t)$ может достигать $n-1$ и определяется соотношениями между биномиальными коэффициентами, коэффициентами квадратичной формы и значениями ядра и его производных в нуле. При минимальном значении $n = 1$ ядро примет вид $K(t) = \exp\left(-\frac{a_1}{a_0}t\right)$ и в уравнении (7) производных $x(t)$ и $y(t)$ не будет.

Итак, для ядер из теоремы 1 модель (1) записывается в равносильном виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \left(\eta^T - \frac{p}{s^2}z\right)y - \eta^T x,\\
&\frac{dy}{dt} = -y + x(D-z),\\
&a_0\frac{d^n z}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} + \dots + a_n z = \sum_{l=1}^{n} a_{n-l}\sum_{s=0}^{l-1}K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t)),\\
&z(0) = 0,\\
&\left.\frac{d^l z(t)}{dt^l}\right|_{t=0} = \sum_{s=0}^{l-1}K^{(s)}(0)\frac{d^{l-1-s}}{dt^{l-1-s}}Q(x(t),y(t))\Big|_{t=0}, \quad l = 1,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Порядок m этой динамической системы лежит в диапазоне от трех (при $n = 1$) до $3n-2$ в зависимости от условий, описанных в Замечании 2.

Отметим, что начальные условия для $z(t)$ и ее производных выделяют в m-мерном фазовом пространстве этой системы некоторое подмножество траекторий. Поэтому, фазовым пространством модели (10) будет не все m-мерное пространство переменных, а некоторое многообразие в нем.

Примеры систем для некоторых ядер

Рассмотрим теперь несколько примеров ядер, удовлетворяющих условиям Теоремы 1, и соответствующие динамические системы.

Пример 1. Возьмем ядро $K(t) = \exp(-bt), b > 0$. Это простейшая форма ядра с экспоненциальной асимптотикой. Поскольку $K(0) = 1 \neq 0$, обратное влияние поля на генератор возникает мгновенно.

Ядро является решением уравнения (3) при $n = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = b$, т.е. уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} + b\right) K(t) = 0. \tag{11}$$

В правой части уравнения (7) при $n = 1$ остаются только слагаемые с $l = 1$ и $s = 0$ а начальное условие только $z(0) = 0$. Задача Коши (4) примет в этом случае вид:

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} + bz = K(0)Q(x(t), y(t)) = Q(x(t), y(t)), \\ &z(0) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Динамическая система (10) оказывается трехмерной. Фазовыми траекториями модели (1) будут только те из траекторий системы (10), которые пересекают плоскость $z = 0$.

Пример 2. Возьмем ядро $K(t) = t\exp(-bt), b > 0$. Поскольку $K(0) = 0$, это простейшая форма ядра при котором возникает очень малая задержка в обратной связи. Это ядро будет решением уравнения [11]:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + b^2\right) K(t) = 0, \tag{13}$$

и соответствует случаю $n = 2$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 2b$, $a_2 = b^2$.

В правой части уравнения (7) при $n = 1$ остаются только слагаемые с $l = 1$ и $s = 0$ и слагаемые с $l = 2$ и $s = 0, 1$. Начальные условия будут $z(0) = 0$ и $z'(0) = K(0)Q\left(x(0), y(0)\right) = 0$. Уравнение (7) примет в этом случае вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2} + 2b\frac{dz}{dt} + b^2 z = a_1 K(0)Q(x(t), y(t)) + a_0 K(0)\frac{d}{dt}Q(x(t), y(t)) + \\ &+ a_0 K^{'}(0)Q(x(t), y(t)) = Q(x(t), y(t)), \end{aligned}$$

а задача Коши (4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2z}{dt^2} + 2b\frac{dz}{dt} + b^2 z = Q(x(t), y(t)), \\ &z(0) = 0, \quad z'(0) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Итак, система (10) в этом случае имеет второй порядок по $z(t)$ и первые порядки по $x(t)$ и $y(t)$, т.е. является четырехмерной.

Пример 3. Возьмем ядро $K(t) = t^m \exp(-bt)$, $\quad b > 0$, $\quad m = 1, 2, 3, \ldots$ Такие ядра тоже обеспечивают задержку обратной связи, причем, чем больше m, тем сильнее сдвинут в прошлое интервал времени, дающий основной вклад в обратную связь. Это ядро будет решением уравнения [11]:

$$\left(\frac{d}{dt} + b\right)^{m+1} K(t) = 0, \tag{15}$$

и соответствует случаю $n = m + 1$.

Отметим прежде всего, что $K^{(m)}(0) = m!$, а все производные меньших порядков и само ядро нулевые при $t = 0$. Поэтому в начальных условиях (8) будет $s_{max} = l_{max} - 1 = (n-1) - 1 = m - 1$. Тогда все начальные условия для функции $z(t)$ и ее производных вплоть до порядка $n - 1 = m$, будут нулевые.

Уравнение (7) примет вид:

$$\left(\frac{d}{dt} + b\right)^{m+1} z(t) = K^{(m)}(0) Q(x(t), y(t)), \tag{16}$$

а задача Коши (4) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dt} + b\right)^{m+1} z(t) = m! Q(x(t), y(t)), \\ &z(0) = z'(0) = \cdots = z^{(m)}(0) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Итак, система (10) в этом случае имеет порядок m по $z(t)$ и первые порядки по $x(t)$ и $y(t)$, т.е. является $(m+2)$-мерной.

Пример 4. Рассмотрим теперь случай ядра $K(t) = \exp(-bt) \cos \omega t$. С точки зрения задачи гидромагнитного динамо данное осциллирующее ядро не представляет особого интереса, но мы можем посмотреть как работает предложенная выше теорема с ядрами подобного типа. Такое ядро удовлетворяет условиям Теоремы 1 и является решением следующего дифференциального уравнения [11]:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + b^2 + \omega^2\right) K(t) = 0, \tag{18}$$

т.е. соответствует случаю $n = 2$. Отметим, что $K(0) = 1$ и $K'(0) = -b$.

Тогда начальные условия (8) дают $z(0) = 0$ и $z'(0) = K(0)Q(x(0), y(0)) = Q(x(0), y(0))$.

Уравнение (7) примет вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{d}{dt} + b^2 + \omega^2\right) z(t) = a_1 K(0) Q(x(t), y(t)) + a_0 K(0) \frac{d}{dt} Q(x(t), y(t)) + \\ &+ a_0 K^{'}(0) Q(x(t), y(t)) = \left(b + \frac{d}{dt}\right) Q(x(t), y(t)), \end{aligned} \tag{19}$$

а задача Коши (4) запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{dt^2}+2b\frac{d}{dt}+b^2+\omega^2\right)z(t)=\left(b+\frac{d}{dt}\right)Q(x(t),y(t)),\\&z(0)=0,\quad z'(0)=Q(x(0),y(0)).\end{aligned}\tag{20}$$

По функции $z(t)$ это уравнение имеет второй порядок, и не более чем первый порядок по $x(t)$ и $y(t)$. Поэтому (10) будет четырехмерной системой.

Заключение

Характерным признаком эредитарности динамической системы является наличие интегрального члена в эволюционном уравнении. В некоторых частных случаях возможно исключение этого члена и сведение уравнений системы к полностью дифференциальной форме. Однако при этом происходит расширение фазового пространства и появляются ограничения в форме начальных условий на комбинации фазовых переменных. Это очевидно связано с тем, что любое уравнение интегрального типа всегда содержит в себе информацию о начальных условиях. Геометрически ограничения означают, что фазовым пространством системы является не все расширенное пространство всех фазовых переменных, а только некоторое его подмногообразие.

В настоящей работе был выделен класс эредитарных систем второго порядка, связанных с задачей двухмодового динамо, и показано, как можно исключить эредитарный член. Это оказалось возможным для одного класса ядер, являющихся решением линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами.

Доказана в общем виде теорема о возможности исключения интегрального члена и рассмотрены некоторые частные случаи, иллюстрирующие ее использование.

Практическая ценность результатов данной работы в том, что получение эквивалентных дифференциальных систем для исходных интегро-дифференциальных уравнений позволяет проводить верификацию вычислительных алгоритмов и программных кодов, разработанных для решения исходных уравнений эредитарной системы с произвольными ядрами.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.

2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. New York: PergamonPress, 1980.

3. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory, *E3S Web of Conf*, 2018. vol. 62 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.

4. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$-Dynamo, *Mathematics*, 2020. vol. 8(11), pp. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.

5. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35(2), С. 40-47 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.

6. Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью, *Вычислительные технологии*, 2022. Т. 27(6), С. 19-32 DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003.
7. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008.
8. Тарасов В. Е. *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.* М.-Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
9. Herrmann R. *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists.* Singapore: World Scientific, 2014.
10. Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$-Dynamo Model, *Fractal Fract*, 2022. vol. 6(6), pp. 328 DOI: 10.3390/math8112065.
11. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.* М.: Наука, 1968.

Информация об авторах

Водинчар Глеб Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, https://orcid.org/0000-0002-5516-1931.

Казаков Евгений Анатольевич – ведущий программист лаборатории электромагнитных излучений, https://orcid.org/0000-0001-7235-4148.

References

[1] Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokilov D. D. Magnitie polay v astrofizike [Magnetic fields in astrophysics], Moscow-Izhevsk, SIC «RHD», 2006.(In Russian).

[2] Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. New York, PergamonPress, 1980.

[3] Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory. E3S Web of Conf., 2018, **62**, 02011, DOI:10.1051/e3sconf/20186202011.

[4] Vodinchar G. M. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$-Dynamo, Mathematics, 2020, 8(11), 2065, DOI: 10.3390/math8112065.

[5] Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki, 2021, **35**, 2, 40-47, DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47, (In Russian).

[6] Kazakov E. A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory. Computational Technologies, 2022, 27(6), 19–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.003, (In Russian.).

[7] Uchajkin V. V. Metod drobnyh proizvodnyh [Fractional derivative method]. Ulyanovsk, Artichoke, 2008, 510. (In Russian).

[8] Tarasov B. E. Modeli teoreticheskoi fiziki s integro-differencirovaniem drobnogo poraydka [Models of Theoretical Physics with Fractional Integro-Derivation], Moscow-Izhevsk, Izhevsk Institute of Computer Research, 2011. (In Russian).

[9] Herrmann R. Fractional Calculus: An Introduction for Physicists. Singapore, World Scientific, 2014.

[10] Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$-Dynamo Model, Fractal Fract, 2022, 6(6), 328. DOI: 10.3390/math8112065.

[11] Korn G., Korn T. Spravochnik po matimatike dlay nauchnih rabotikov i ingenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers], Moscow, Nauka, 1968. (In Russian).

Information about authors

Vodinchar Gleb Mikhailovich – PhD (Math. & Phys.), Leading Researcher, Lab. for Simulation of Physical Processes, https://orcid.org/0000-0002-5516-1931.

Kazakov Evgeny Anatolevich – Lead programmer, Lab. of Electromagnetic Propogation, https://orcid.org/0000-0001-7235-4148.