МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-27-36

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения смешанного типа

В. А. Водахова, Ф. М. Нахушева, З. Х. Гучаева**, А. Х. Кодзоков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004,
г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Аннотация. Важным этапом в становлении теории краевых задач стали предложенные А.М. Нахушевым в 1969 году нелокальные задачи нового типа, впоследствии названные у нас краевыми задачами со смещением, а за рубежом - задачами (проблемами) Нахушева. Они являются обобщением задачи Трикоми, а так же содержат широкий класс корректных самосопряженных задач. Эти задачи сразу вызвали большой интерес многих авторов. За последние годы исследования задач со смещением для уравнений смешанного типа ведутся особенно интенсивно. Но в этих работах краевые условия, как правило, содержат классические операторы, в то время как нелокальным краевым задачам, содержащим операторы более сложной структуры и операторы дробного интегро-дифференцирования. Настоящая статья посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости краевых задач со смещением для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. Сформулированы корректные краевые задачи со смещением для уравнения смешанного типа. В данной работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задач со смешением для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в смешанной области Ω, ограниченной в полуплоскости $y > 0$ гладкой кривой Жордана, а в полуплоскости $y < 0$ характеристиками уравнения (1). При ограничениях неравенственного типа на известные функции и различных порядках операторов дробного дифференцирования в краевом условии доказаны теоремы единственности. Существование решения задач доказывается путем редукции задач к уравнениям Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которых следует из единственности решения задач.

Ключевые слова: задача со смещением, задача Коши, задача Дирихле, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение, регуляризатор.

Получение: 03.03.2023; Исправление: 27.03.2023; Принятие: 30.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Водахова В. А., Нахушева Ф. М., Гучаева З. Х., Кодзоков А. Х. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения смешанного типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. С. 27-36. EDN: GMQZNY. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-27-36.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: proporwiz@yandex.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Водахова В. А., Нахушева Ф. М., Гучаева З. Х., Кодзоков А. Х., 2023

© ИКИР ДВО РАН, 2023 (оригинал-макет, дизайн, составление)

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-27-36

Research Article

Full text in Russian

MSC 35M12

On Some Boundary Value Problems with a Shift for a Mixed Type Equation

V. A. Vodahova, F. M. Nahusheva, Z. H. Guchaeva*, A. H. Kodzokov

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 360004, Nalchick, Chernyshevskogo str., 173, Russia

Abstract. An important stage in the development of the theory of boundary value problems was the proposed by A.M. Nakhushev in 1969, non-local problems of a new type, which were later called in our country boundary-value problems with a shift, and abroad - Nakhushev problems (problems). They are a generalization of the Tricomi problem, and also contain a wide class of well-posed self-adjoint problems. These problems immediately aroused great interest of many authors. In recent years, studies of problems with a shift for equations of mixed type have been carried out especially intensively. But in these works, the boundary conditions, as a rule, contain classical operators, while non-local boundary value problems contain operators of a more complex structure and operators of fractional integro-differentiation. In this paper, we study the unique solvability of problems with mixing for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type. Under constraints of unequal type on known functions and different orders of fractional differentiation operators in the boundary condition, uniqueness theorems are proved. The existence of a solution to the problems is proved by reducing the problems to Fredholm equations of the second kind, the unconditional solvability of which follows from the uniqueness of the solution to the problems.

Key words: problem with shift, Cauchy problem, Dirichlet problem, fractional differentiation operator, fractional integration operator, Fredholm equation, singular integral equation, regularizer.

Received: 03.03.2023; Revised: 27.03.2023; Accepted: 30.03.2023; First online: 15.04.2023

For citation. Vodahova V. A., Nahusheva F. M., Guchaeva Z. H., Kodzokov A. H. On some boundary value problems with a shift for a mixed type equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 27-36. EDN: GMQZNY. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-27-36.

Funding. Not applicable.

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: proporwiz@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Vodahova V. A., Nahusheva F. M., Guchaeva Z. H., Kodzokov A. H., 2023

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2023 (original layout, design, compilation)

Введение

Рассмотрим уравнение смешанного тина

$$\operatorname{sign} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m =$ const > 0, в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой Жордана σ с концами в точках $A(0,0), B(1,0)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками AC, BC уравнения (1) в полуплоскости $y < 0$.

Пусть Ω_1 и Ω_2 - эллиптическая и гиперболическая части смешанной области Ω. Под регулярным решением уравнения (1) в области Ω будет пониматься функция $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющая уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и такая, что $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах A и B интервала $J: 0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(z) = \varphi(z), \quad \forall z \in \sigma, \tag{2}$$

$$\alpha(x) D^a_{ax} \delta(x) u[\theta_0(x)] + \beta(x) D^b_{x1} \omega(x) u[\theta_1(x)] + \gamma(x) u(x,0) + c(x) u_y(x,0) = d(x), \tag{3}$$

где $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ - аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in J$ с характеристиками AC и BC соответственно; $\varphi(z)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\omega(x)$, $\delta(x)$ - заданные функции, причем

$$\varphi(z) \in C^1(\sigma),\ \alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ c(x),\ d(x) \in C^1(\bar{J}),$$

$\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0$, D^l_{0x}, D^l_{x1} *- операторы дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования.*

Существование и единственность решения задачи 1 в случае, когда

$$m = 1,\ a = b = 1 - \varepsilon,\ \sigma = \sigma_0 : x^2 + \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 y^{m+2} - x = 0,$$

$$\delta(x) = \omega(x) = 1,\ \gamma(x) = c(x) = 0,\ \alpha(x) = x^{\varepsilon} \lambda^2(x),\ \beta(x) = (1-x)^{\varepsilon} \mu^2(x),$$

где $\varepsilon = m/(2m+4)$, $\lambda^2(x)$, $\mu^2(x)$, $\gamma(x)$ - заданные функции, вторые производные которых удовлетворяют условию Гельдера, причем $\lambda^2(x) + \mu^2(x) = 1$, были исследованы А.В. Бицадзе.

При $m > 1$, когда $a = b = 1 - \varepsilon$, $\delta(x) = \omega(x) = 1$, $\gamma(x) = c(x) = 0$ однозначная разрешимость задачи (1)-(3) доказана Кумыковой С.К. [2]. Задача относится к классу краевых задач со смещением А.М. Нахушева [1].

Теорема 1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)-(3), если*

$$a = b = \varepsilon, \quad \delta(x) = x^{2\varepsilon - 1}, \quad \omega(x) = (1-x)^{2\varepsilon - 1}, \tag{4}$$

$$A(x)=(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)+x^{1-\varepsilon}\beta(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\gamma(x)\neq 0, \tag{5}$$

$$(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)+x^{\varepsilon}\beta(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(2-2\varepsilon)}{c_1\Gamma(2\varepsilon)}x^{\varepsilon}\cdot(1-x)^{\varepsilon}c(x)\neq 0, \tag{6}$$

$$\left[\frac{(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)}{A(x)}\right]'\leq 0,\quad \left[\frac{x^{1-\varepsilon}\beta(x)}{A(x)}\right]'\geq 0,\quad c(x)/A(x)\leq 0, \tag{7}$$

$$c_1=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\varepsilon}\cdot\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)}.$$

Действительно, пусть $\tau(x)=u(x,0)$, $\nu(x)=u_y(x,0)$. Тогда регулярное решение уравнения (1) в области Ω_2 представимо в виде

$$u(z)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)}\int\limits_0^1\tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\cdot[t(1-t)]^{\varepsilon-1}dt+$$

$$+\frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)}\cdot y\int\limits_0^1\nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right]\cdot[t(1-t)]^{-\varepsilon}dt. \tag{8}$$

Удовлетворяя (8) условию (3) получим

$$\begin{gathered}\left[(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)+x^{1-\varepsilon}\beta(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}\gamma(x)\right]\tau(x)=\\ =c_1\left[(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)D_{0x}^{2\varepsilon-1}\nu(x)+x^{1-\varepsilon}\beta(x)D_{x1}^{2\varepsilon-1}\nu(x)\right]-\\ -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}c(x)\nu(x)+\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}d(x).\end{gathered} \tag{9}$$

Теорему единственности можно доказать, предварительно доказав, что если $u(x,y)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим однородным условиям (2), (3), то интеграл $J^*=\int\limits_0^1\tau(x)\nu(x)dx$ не может быть отрицательным. Единственность решения задачи (1) - (3) в этом случае будет следовать из соотношений

$$\iint\limits_{\Omega_1}\left(y^m u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\int\limits_0^1\tau(x)\nu(x)dx=0,\quad J^*\geq 0. \tag{10}$$

При выполнении условий (4)-(7) теоремы будем иметь

$$\frac{\pi}{\sin\pi\varepsilon}J^*=-\int\limits_0^\infty t^{2\varepsilon-1}dt\int\limits_0^1\alpha_1'(x)\left[\left(\int\limits_0^x\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int\limits_0^x\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_0^x t^{2\varepsilon-1}dt\int\limits_0^1\beta_1'(x)\cdot\left[\left(\int\limits_x^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int\limits_x^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+ \tag{11}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sin\pi\varepsilon\int\limits_0^1\gamma_1(x)\nu^2(x)dx,$$

где $\alpha_1(x)=\frac{c_1(1-x)^{1-\varepsilon}\alpha(x)}{A(x)}$, $\beta_1(x)=\frac{c_1x^{1-\varepsilon}\beta(x)}{A(x)}$, $\gamma_1(x)=\frac{-\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}\cdot\frac{x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon}c(x)}{A(x)}$. Нетрудно видеть, что при выполнении условий (7) теоремы 1 $\alpha_1'(x)\le 0$, $\beta_1'(x)\ge 0$, $\gamma_1(x)\ge 0$ и выполняется неравенство $J^*\ge 0$. Из соотношений (10) заключаем, что $\iint\limits_{\Omega_1}\left(y^m u_x^2+u_y^2\right)dxdy=0$. Отсюда $u_x^2=0$, $u_y^2=0$ и $u(x,y)\equiv c^*$ в Ω_1, где $c^*=const$. Следовательно, $\tau(x)=c^*$, $\nu(x)=u_y(x,0)=0$.

Подставляя $\nu(x)$ и $\tau(x)$ в (9) при выполнении (6) и $d(x)=0$ получим $c^*=0$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$ в Ω_1 и в Ω_2 как решения задач Дирихле и Коши с нулевыми данными.

Переходя к доказательству существования решения задачи 1 относительно кривой σ будем предполагать, что $x=x(s)$, $y=y(s)$ параметрическое уравнение кривой σ, где s-длина дуги, отсчитываемая от точки B. Функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[0,l]$, не обращающиеся одновременно в ноль, производные $x''(s)$, $y''(s)$ удовлетворяют условию Гёльдера на $[0,l]$, где l-длина σ; кривая σ оканчивается двумя сколь угодно малой длины дугами нормальной кривой, а в остальной части отклоняется от этой кривой наружу.

Дополнительно будем предполагать, что

$$\alpha(x)=x^{\varepsilon_1}\alpha_1(x),\ \beta(x)=(1-x)^{\varepsilon_1}\beta_1(x),$$
$$\alpha_1(x),\ \beta_1(x),\ d(x),\ c(x)\gamma(x)\in C^{(2,h)}(\bar{J}),\quad \text{где } \varepsilon_1=const>\varepsilon,\ h>0.$$

Фундаментальные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные на J из гиперболической Ω_2 и эллиптической Ω_1 частей смешанной области Ω соответственно имеют вид (9) и

$$\tau(x)=-k\int\limits_0^1\left[\frac{1}{|x-t|^{2\varepsilon}}-\frac{1}{(x+t-2xt)^{2\varepsilon}}\right]\nu(t)dt-\int\limits_0^1 H(t,x)\nu(t)dt, \qquad (12)$$

где $k=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\varepsilon}\frac{\Gamma^2(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)}$, $H(t,x)$– функция, свойства которой хорошо известны.

Исключая $\tau(x)$ из (9) и (12) в результате замены получим уравнение

$$a(y)\rho(y)+\frac{b(y)}{\pi i}\int\limits_0^1\frac{\rho(\xi)d\xi}{\xi-y}=R[\rho]+d_1(y), \qquad (13)$$

где

$$\xi=\frac{t^2}{1-2t+2t^2},\ y=\frac{x^2}{1-2x+2x^2},$$
$$a(y)=\frac{\pi(1+\sin\pi\varepsilon)}{\cos\pi\varepsilon}\left[\alpha_1(x)y^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}+\beta_1(x)(1-y)^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}+\frac{1}{c_1}c(x)\right],$$
$$b(y)=\pi i\left[\alpha_1(x)y^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}-\beta_1(x)(1-y)^{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon}{2}}\right],\ \rho(y)=\left(1-2x+2x^2\right)\nu(x),$$

$$d_1(y) = -\frac{\Gamma(\varepsilon)}{k}\cdot\frac{1}{(\sqrt{y}+\sqrt{1-y})^{2+\varepsilon-\varepsilon_1}}d\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{1-y}}\right),$$

$d_1 \in H(\bar{J})\cap C^1(J)$, $R[\rho]-$ фредгольмов оператор первого рода.

Так как $a^2(y)-b^2(y)\neq 0$, то уравнение (13) - сингулярное интегральное уравнение нормального типа. Индекс уравнения (13) в классе функций $\rho(y)$, неограниченных на обоих концах, равен нулю.

Согласно общей теории вопрос существования решения уравнения (13) эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости уравнения Фредгольма второго рода со слабой особенностью в ядре

$$\nu(x)+\int\limits_0^1 \frac{k(x,t)}{(x-t)^{\mu}}\nu(t)dt = f(x),$$

где $0<\mu<1$, $k(x,t)\in C(\bar{J}\times\bar{J})\cap C^1(J\times J)$, $f(x)\in C^1(J)$, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

По найденному $\nu(x)$ определяется $\tau(x)$ и решение задачи (1)-(3) как решение задачи Дирихле: $u|_{\sigma}=\varphi(z)$, $u(x,0)=\tau(x)$ в области Ω_1 и как решение задачи Коши: $u(x,0)=\tau(x)$, $u_y(x,0)=\nu(x)$ в области Ω_2.

Задача 2. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$A_s[u]|_{\sigma} \equiv y^m\frac{dy}{ds}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{dx}{ds}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{\sigma} = \varphi(s),\ 0<s<l \tag{14}$$

и (3), *где* $\varphi(s)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $c(x)$, $d(x)$ *удовлетворяют тем же условиям, что и в задаче 1.*

Теорема 2. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи 2, если либо*

$$a=b=1-\varepsilon,\ \omega(x)=\delta(x)=1 \tag{15}$$

и выполняются условия

$$A_1(x) = (1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)+x^{\varepsilon}\beta(x)-\frac{1}{c_1}x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}c(x)\neq 0, \tag{16}$$

$$\left[\frac{(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)}{A_1(x)}\right]'\leq 0,\ \left[\frac{x^{\varepsilon}\beta(x)}{A_1(x)}\right]'\geq 0,\ \frac{\gamma(x)}{A_1(x)}\geq 0, \tag{17}$$

либо выполняются условия (4)-(7).

Действительно, при выполнении условий (15) теоремы 2 получим

$$\frac{1}{\pi}\Gamma^2(2\varepsilon)c_1\cdot\sin 2\pi\varepsilon\cos 2\pi\varepsilon\cdot J^* =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1}dt\int\limits_0^1 \alpha_2'(x)\left[\left(\int\limits_0^x \tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int\limits_0^x \tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1}dt\int\limits_0^1 \beta_2'(x)\left[\left(\int\limits_x^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\left(\int\limits_x^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]dx+\int\limits_0^1 \gamma_2(x)\tau^2(x)dx,$$

где

$$\alpha_2(x)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{(1-x)^{\varepsilon}\alpha(x)}{A_1(x)},\ \beta_2(x)=\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)}\cdot\frac{x^{\varepsilon}\beta(x)}{A_1(x)},\ \gamma_2(x)=\frac{x^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}\gamma(x)}{A_1(x)},$$

$$\tau_1(x)=\frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}},$$

$$\tau_2(x)=-\frac{\sin 2\pi\varepsilon}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\varepsilon}}.$$

С учетом (16), (17) нетрудно усмотреть, что $J^*\geq 0$. При выполнении условии (4)-(7) имеет место (11) и $J^*\geq 0$.

Таким образом, как и в случае задачи 1 , условия теоремы 2 обеспечивают выполнение неравенства $J^*\geq 0$, и единственность решения задачи 2 заключается из соотношений (10).

Доказательство существования решения задачи 2 проводится в предположении, что

$$\alpha(x)=x^{\varepsilon_1}\alpha_1(x),\ \beta(x)=(1-x)^{\varepsilon_1}\beta_1(x),$$

где $\varepsilon_1>1-\varepsilon$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\gamma(x)$, $c(x)$, $d(x)\in C^1(\bar{J})\cap C^3(J)$.

Фундаментальные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные на J из гиперболической Ω_2 и эллиптической Ω_1 частей смешанной области Ω соответственно имеют вид (9)

$$\nu(x)=\frac{-k_1}{1-2\varepsilon}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1-2\varepsilon}}+\frac{k_1}{1-2\varepsilon}\frac{d}{dx}\int\limits_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1-2\varepsilon}}- \tag{18}$$

$$-k_1\int\limits_0^1\frac{\tau(t)dt}{(x+t-2xt)^{2-2\varepsilon}}+\int\limits_0^1\frac{\partial^2H(t,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}\tau(t)dt+\int\limits_0^l\varkappa(s)\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x,0)}{\partial y}ds,$$

где $k_1=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\varepsilon}\cdot\frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(2-2\varepsilon)}$, $H(t,0;x,0)$, $\varkappa(s)$, $q_2(\xi,\eta;x,0)-$ функции свойства которых хорошо известны.

Исключая $\nu(x)$ из (9) и (18) получим как и в случае задачи 1 сингулярное интегральное уравнение нормального типа относительно $\tau(x)$. Найдены условия, гарантирующие существование регуляризатора, приводящего полученное уравнение к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи.

По найденным $\tau(x)$ и $\nu(x)$ решение задачи 2 находится как решение задачи Коши (8) в области Ω_2, а в области Ω_1 по формуле

$$u(x,y)=\int\limits_0^1\tau(t)\frac{\partial G(t,0;x,y)}{\partial t}dt+\int\limits_0^l\varphi(s)G(\xi,\eta;x,y)ds,$$

где $G(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина задачи (1), (14), $u(x,0)=\tau(x)$.

Заключение

В работе исследованы вопросы однозначной разрешимости задач со смещением для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа.

При доказательстве теорем единственности для уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3) доказывается, что интеграл $J^* = \int \tau(x)\nu(x)dx$ не может быть отрицательным. Из соотношения (10) заключаем, что $u_x = 0$, $u_y = 0$. Следовательно, $\tau(x) = 0$, $\nu(x) = 0$. Следовательно $u(x,y) = 0$ в Ω_1 и Ω_2 как решения задач Дирихле и Коши с нулевыми данными, а существования решений задач доказывается методами интегральных уравнений.

Следует отметить, что краевые задачи со смещением для уравнений смешанного типа исследовались также в работах [3]- [8].

Список литературы

1. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, 1969. Т. 5, № 1, С. 44–59.
2. Кумыкова С. К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, 1974. Т. 10, № 1, С. 78–88.
3. Водахова В. А., Шамеева К. А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова, *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2013. Т. 52, № 2, С. 3-7.
4. Водахова В. А., Тлупова Р. Г., Шерметова М. Х. Внутреннекраевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, *Успехи современного естествознания*, 2015. № 1, С. 71-75.
5. Нахушева Ф. М., Водахова В. А., Кудаева Ф. Х., Абаева З. В. Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка с сосредоточенной теплоёмкостью, *Современные проблемы науки и образования*, 2015. № 2-1, С. 763.
6. Водахова В. А., Нахушева Ф. М., Гучаева З. Х. Краевая задача со смещением для нагруженного гиперболо - параболического уравнения третьего порядка / *Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики*, Сборник трудов Международной научной конференции, Нальчик, 10–14 июня 2019 года, Т. 2, 2019, С. 49-54.
7. Балкизов Ж. А., Водахова В. А. Внутреннекраевые задачи со смещением для смешанно-волнового уравнения, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2021. Т. 36, № 3, С. 8-14.
8. Кумыкова С. К., Езаова А. Г., Гучаева З. Х. Задача со смещением для уравнения влагопереноса А.В. Лыкова, *Современные наукоемкие технологии*, 2016. № 9-2, С. 237-243.
9. Елеев В. А., Жемухова З. Х. О некоторых краевых задачах для одного смешанного уравнения с разрывными коэффициентами в прямоугольной области, *Владикавказский математический журнал*, 2002. Т. 4, № 4, С. 8-18.
10. Елеев В. А., Гучаева З. Х. Нелокальная краевая задача для уравнения Лаврентьева - Бицадзе в прямоугольной области, *Известия Кабардино-Балкарского государственного университета*, 2011. Т. 1, № 1, С. 9-20.

Информация об авторах

Водахова Валентина Аркадьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0001-9990-7467.

Нахушева Фатима Мухамедовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-5015-965X.

Гучаева Зера Хамидбиевна – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0000-9777-4018.

Кодзоков Азамат Хасанович – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-3431-1228.

References

[1] Nahushev A. M. On some boundary value problems for hyperbolic equations and equations of mixed type, Differencial'nye uravnenija, 1969, **5**, 1, 44–59 (In Russian).

[2] Kumykova S. K. On a problem with nonlocal boundary conditions on characteristics for a mixed type equation, Differencial'nye uravnenija, 1974, **10**, 1, 78–88 (In Russian).

[3] Vodahova V. A., Shameeva K. A. Problems with a shift for Lykov's first-order system of equations, Izvestija Kabardino-Balkarskogo nauchnogo centra RAN, 2013, **52**, 2, 3-7 (In Russian).

[4] Vodahova V. A., Tlupova R. G., Shermetova M. H. Internal Boundary Value Problem for a Loaded Third-Order Equation with Multiple Characteristics, Uspehi sovremennogo estestvoznanija, 2015, 1, 71-75 (In Russian).

[5] Nahusheva F. M., Vodahova V. A., Kudaeva F. H., Abaeva Z. V. Locally-one-dimensional difference scheme for the fractional-order diffusion equation with lumped heat capacity, Sovremennye problemy nauki i obrazovanija, 2015, 2-1, 763 (In Russian).

[6] Vodahova V. A., Nahusheva F. M., Guchaeva Z. H. Boundary-value problem with a shift for a loaded hyperbolic-parabolic equation of the third order, Sovremennye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mehaniki: Sbornik trudov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, Nal'chik, 10–14 ijunja 2019 goda. Tom II., 2019, 49-54 (In Russian).

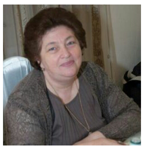
[7] Balkizov Zh. A., Vodahova V. A. Internal Boundary Value Problems with a Shift for the Mixed-Wave Equation, Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki, 2021, **36**, 3, 8-14 (In Russian).

[8] Kumykova S. K., Ezaova A. G., Guchaeva Z. H. A problem with a shift for the moisture transfer equation A.V. Lykov, Sovremennye naukoemkie tehnologii, 2016, 9-2, 237-243. (In Russian).

[9] Eleev V. A., Zhemuhova Z. H.On some boundary value problems for a mixed equation with discontinuous coefficients in a rectangular domain, Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal, 2002, **4**, 4, 8-18 (In Russian).

[10] Eleev V. A., Guchaeva Z. H. Nonlocal boundary value problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation in a rectangular domain, Izvestija Kabardino-Balkarskogo gosudarstvennogo universiteta, 2011, **1**, 1, 9-20 (In Russian).

Information about authors



Vodakhova Valentina Arkadevna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0001-9990-7467.

Nakhusheva Fatima Muhamedovna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-5015-965X.

Guchaeva Zera Hamidbievna – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0000-9777-4018.

Kodzokov Azamat Khasanovich – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-3431-1228.