МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.95

Нелокальная начально-граничная задача для вырождающиегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова-Капуто

А. К. Уринов*, Д. А. Усмонов*

Ферганский государственный университет, Узбекистан, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19

Аннотация. В последнее время интенсивно изучаются начально – граничные задачи в прямоугольной области для дифференциальных уравнений в частных производных как четного, так и нечетного порядка. При этом в качестве объекта исследования, в основном, берется не вырождающееся уравнение или уравнение, вырождающееся на одной стороне четырехугольника. Начально – граничные задачи (как локальные, так и нелокальные) для уравнений с двумя или тремя линиями вырождения остаются неизученными. В данной работе в прямоугольной области рассмотрено уравнение четвёртого порядка, вырождающееся на трех сторонах четырехугольника и содержащее оператор дробного дифференцирования Герасимова – Капуто. Для этого уравнения сформулирована и исследована одна начально – граничная задача с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и её производных до третьего порядка (включительно), принимаемых на боковых сторонах прямоугольника. Сначала методом интегралов энергии доказана единственность решения поставленной задачи. Затем, исследована спектральная задача, возникающая при применении метода Фурье, основанном на разделении переменных, к поставленной начально – граничной задаче. Построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром, откуда следует существование счетного числа собственных значений и собственных функций спектральной задачи. Доказана теорема разложения заданной функции в равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций. С помощью найденного интегрального уравнения и теоремы Мерсера доказана равномерная сходимость некоторых билинейных рядов, зависящих от найденных собственных функций. Установлен порядок коэффициентов Фурье. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Исследована равномерная сходимость этого ряда и рядов, полученных из него почленным дифференцированием. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение четвертого порядка, начально-краевая задача, метод разделения переменных, спектральная задача, функция Грина, интегральное уравнение, существование, единственность и устойчивость решения.

Получение: 07.11.2022; Исправление: 20.02.2023; Принятие: 24.03.2023; Публикация онлайн: 16.04.2023

Для цитирования. Уринов А. К., Усмонов Д. А. Задача для параболического уравнения с двумя свободными границами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 123-139. EDN: INZPHJ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: urinovak@mail.ru; usmonov-doniyor@inbox.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139

Research Article

Full text in Russian

MSC 35R11

Non-Local Initial-Boundary Value Problem for a Degenerate Fourth-Order Equation with a Fractional Gerasimov-Caputo Derivative

A. K. Urinov*, D. A. Usmonov*

Fergana state university, Uzbekistan, 150100, Fergana, 19, Murabbiylar st.

Abstract. Recently, initial-boundary problems in a rectangular domain for differential equations in partial derivatives of both even and odd order have been intensively studied. In this case, non-degenerate equations or equations that degenerate on one side of the quadrilateral are taken as the object of study. But initial-boundary problems (both local and non-local) for equations with two or three lines of degeneracy remain unexplored. In this paper, in a rectangular domain, a fourth-order equation degene-rating on three sides of the rectangular and contains the Gerasimov-Caputo fractional diffe-rentiation operator has been considered. For this equation, an initial-boundary problem is formulated and investigated, with non-local conditions connecting the values of the desired function and its derivatives up to the third order (inclusive), taken on the sides of the rectangle. From the beginning, the uniqueness of the solution of the formulated problem was proved by the method of energy integrals. Then, the spectral problem that arises when applying the Fourier method based on the separation of variables to the considered initial-boundary problem has been investigated. The Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel, which implies the existence of a countable number of eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem. A theorem is proved for expanding a given function into a uniformly convergent series in terms of a system of eigenfunctions. Using the found integral equation and Mercer's theorem, we prove the uniform convergence of some bilinear series depending on the found eigenfunctions. The order of the Fourier coeffi-cients have been established. The solution of the considered is written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. The uniform convergence of this series and the series obtained from it by term-by-term differentiation is studied. An estimate for solution to problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

Key words: degenerate fourth order equation, initial boundary value problem, method of separation of variables, spectral problem, Green's function, integral equation, existence, uniqueness and stability of the solution.

Received: 07.11.2023; Revised: 20.02.2023; Accepted: 24.03.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Urinov A. K., Usmonov D. A. Non-local initial-boundary value problem for a degenerate fourth-order equation with a fractional Gerasimov-Caputo derivative. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 123-139. EDN: INZPHJ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-123-139.

Funding. Not applicable.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: urinovak@mail.ru; usmonov-doniyor@inbox.ru

Введение. Постановка задачи

Известно, что теория дифференциальных уравнений имеет длинную и богатую историю. До последней четверти двадцатого века в этой теории рассматривались дифференциальные уравнения целого порядка. В связи с развитием дробного (дифференциального и интегрального) анализа, начиная с конца двадцатого века, исследователи начали заниматься дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные. В настоящее время вышли из печати многочисленные научные статьи, в которых рассмотрены начальные, краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными), содержащих производные дробного порядка с различными модификациями (см. напр. [1] - [5]). При развитии этого направления существенную роль сыграли книги [6] и [7]. Ниже приведем краткий обзор исследований (близкие тематике настоящей статьи) по дифференциальным уравнениям в частных производных четвёртого порядка, содержащих дробную производную от неизвестной функции по временной переменной.

В работах [8]- [10] изучены начально-граничные задачи для одномерного и двумерного уравнения четвертого порядка, содержащего оператор дробного дифференцирования Герасимова-Капуто по временной переменной, причем в [10] рассмотрена и обратная задача. Начально-граничные задачи также изучены для уравнений четвертого порядка с оператором дробного дифференцирования Хильфера, Джрбашяна-Нерсесяна и Римана-Лиувилля соотвественно в работах [11], [12] и [13]. Прямая и обратная задача для уравнения четвертого порядка смешанного типа с оператором Хильфера изучена соответственно в работе [14] и [15]. В этом направлении отметим также работы [16] и [17], где исследованы обратные задачи по определению порядка дробной производной соответственно, в смысле Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто, в уравнении субдиффузии и волновом уравнении с произвольным положительным оператором, имеющим дискретный спектр.

В перечисленных выше работах рассмотрены только невырождающиеся уравнения. Но как локальные, так и нелокальные краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих дробные производные от неизвестной функции, остаются неизученными. Изучение краевых задач для таких уравнений имеет большое значение не только с теоретической точки зрения, но и с практической, ибо такие уравнения и задачи для них возникают при математическом моделировании многих задач теории газо-и гидродинамики, теории малых изгибаний поверхностей, математической биологии и других разделов науки.

Начально-граничные задачи для вырождающихся уравнений с частными производными четвертого порядка, содержащих первые и вторые производные по временной переменной, ранее изучались в работах [18]- [20].

В данной работе в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1;\, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение четвертого порядка с тремя линиями вырождения

$$t^a{}_C D_{0t}^{\gamma} u + bu + \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}\right]_{xx} = 0, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ - неизвестная функция,

$${}_C D_{0t}^{\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{(\partial/\partial z)\, u(x,z)}{(t-z)^{\gamma}} dz$$

- дробное производное в смысле Герасимова - Капуто от функции $u(x,t)$ по аргументу t, а a, b, α, β, γ - заданные действительные числа, причем $0 \le a < \gamma$, $0 < \gamma \le 1$, $b \ge 0$, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$.

Исследуем следующую начально-граничную задачу для уравнения (1).

Задача $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами: 1) u, u_x, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}\right]_x \in C\left(\overline{\Omega}\right)$; $t^a_C D_{0t}^{\gamma} u(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}\right]_{xx} \in C(\Omega)$; 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3) на границе области Ω выполняются следующие краевые условия:

$$\left.\begin{array}{c} p_1 u(0,t) = q_1 u(1,t), \quad t \in [0,T]; \\ p_2 u_x(0,t) = q_2 u_x(1,t), \quad t \in [0,T]; \\ q_2\, x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}(x,t)\Big|_{x=0} = p_2\, (1-x)^{\beta} u_{xx}(x,t)\Big|_{x=1},\ t \in [0,T]; \\ q_1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}(x,t)\right]_x\Big|_{x=0} = p_1 \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta} u_{xx}(x,t)\right]_x\Big|_{x=1},\ t \in [0,T]; \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,1], \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ - заданная непрерывная функция, а p_1, p_2, q_1, q_2 - заданные действительные числа, причем $p_1^2 + q_1^2 \neq 0$, $p_2^2 + q_2^2 \neq 0$.

Единственность решения задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$

Прежде чем приступить к доказательству единственности решения задачи $A_{p_1 q_1}^{p_2 q_2}$, докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. Если $V(x,0) = 0$ и $\gamma \in (0,1)$, то выполняется следующее неравенство:

$$I(x) = \int_0^T V(x,t)_C D_{0t}^{\gamma} V(x,t)\, dt \ge 0.$$

Доказательство. Если $V(x,0) = 0$, то справедливо равенство

$${}_C D_{0t}^{\gamma} V(x,t) = {}_{RL} D_{0t}^{\gamma} V(x,t), \tag{4}$$

где

$${}_{RL} D_{0t}^{\gamma} V(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{V(x,z)}{(t-z)^{\gamma}} dz$$

-дробное производное в смысле Римана - Лиувилля от функции $u(x,t)$ по аргументу t.

Введем обозначение

$$w(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\frac{V(x,z)}{(t-z)^{\gamma}}dz. \tag{5}$$

Тогда, если считать, что $w(x,t)$ известная, а $V(x,t)$ - неизвестная функция, то непрерывное решение интегро-дифференциального уравнения (5), удовлетворяющего условию $V(x,0)=0$, имеет вид

$$V(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^t\frac{w(x,z)}{(t-z)^{1-\gamma}}dz. \tag{6}$$

Теперь, учитывая равенство (4), (5) и (6) можно записать $I(x)$ в виде:

$$I(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int\limits_0^T w(x,t)\,dt\int\limits_0^t\frac{w(x,z)}{(t-z)^{1-\gamma}}dz. \tag{7}$$

Согласно формуле для гамма-функции Эйлера [21]

$$\int\limits_0^{+\infty}\xi^{a_1-1}\cos k\xi\,d\xi=k^{-a_1}\Gamma(a_1)\cos(a_1\pi/2),\ k>0,\ 0<a_1<1,$$

полагая $k=|t-z|$ и $a_1=1-\gamma$, имеем

$$|t-z|^{\gamma-1}=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\sin(\gamma\pi/2)}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{-\gamma}\cos(t\xi-z\xi)\,d\xi. \tag{8}$$

Подставляя (8) в равенство (7), находим

$$I(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)\sin(\gamma\pi/2)}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{-\gamma}d\xi\int\limits_0^T w(x,t)\,dt\int\limits_0^t w(x,z)\cos(t\xi-z\xi)\,dz=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)\sin(\gamma\pi/2)}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{-\gamma}d\xi\int\limits_0^T\int\limits_0^t w(x,t)\,w(x,z)\left[\cos t\xi\cos z\xi+\sin t\xi\sin z\xi\right]dz\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\gamma)\sin(\gamma\pi/2)}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{-\gamma}d\xi\left\{\left[\int\limits_0^T w(x,t)\cos t\xi dt\right]^2+\left[\int\limits_0^T w(x,t)\sin t\xi dt\right]^2\right\}\geq 0.$$

Лемма 1 доказана. □

Теорема 1. Если $p_1\neq q_1$ и $p_2\neq q_2$, то задача $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$. Их разность обозначим через $u(x,t)$. Тогда функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1) при однородных краевых условиях.

Умножим уравнение (1) на функцию $t^{-a}u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$\int_0^1 dx\int_0^T u(x,t)\,{}_CD_{0t}^{\gamma}u(x,t)\,dt+b\int_0^1 dx\int_0^T t^{-a}u^2(x,t)\,dt+\int_0^T t^{-a}dt\int_0^1 u(x,t)\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx}dx=0.$$

Применяя правило интегрирования по частям дважды к внутреннему интегралу последнего слагаемого и учитывая условия (2), имеем

$$\int_0^T\int_0^1 t^{-a}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}^2(x,t)dxdt=-\int_0^1 dx\int_0^T u(x,t)\,{}_CD_{0t}^{\gamma}u(x,t)\,dt-b\int_0^1 dx\int_0^T t^{-a}u^2(x,t)\,dt,$$

откуда, в силу леммы 1 и $b\geq 0$, следует равенство

$$\int_0^T\int_0^1 t^{-a}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}^2(x,t)dxdt=0.$$

Следовательно, $t^{-a}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}^2(x,t)=0$, т.е. $u_{xx}(x,t)=0$ при $(x,t)\in\Omega$. Тогда $u(x,t)=x\tau_1(t)+\tau_2(t)$, где $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ - произвольные функции. Удовлетворяя эту функцию условиям $p_1u(0,t)=q_1u(1,t)$, $p_2u_x(0,t)=q_2u_x(1,t)$ и учитывая $p_1\neq q_1$, $p_2\neq q_2$, получим $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\Omega$. Так как $u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$, то $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Тогда, $u_1(x,t)=u_2(x,t)$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана. □

Исследование спектральной задачи

При формальном применении метода Фурье к задаче $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$Mv\equiv\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]''=\lambda v(x),\ \ 0<x<1, \tag{9}$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{c} v(x),\,v'(x),x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x),\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]'\in C[0,1];\\ p_1v(0)=q_1v(1),\ p_2v'(0)=q_2v'(1),\\ q_2\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\Big|_{x=0}=p_2\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\Big|_{x=1},\\ q_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]'\Big|_{x=0}=p_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v''(x)\right]'\Big|_{x=1}. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Умножим обе части уравнения (9) на функцию $\nu(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям дважды к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (10), получим

$$\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[\nu''(x)\right]^2 dx = \lambda\int\limits_0^1 \nu^2(x)\,dx.$$

Отсюда, при $\nu(x)\not\equiv 0$ следует, что $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $\nu''(x) = 0,\ 0 < x < 1$. Тогда $\nu(x) = C_1x + C_2,\ x \in [0,1]$, откуда, в силу условия $p_1\nu(0) = q_1\nu(1)$, $p_2\nu'(0) = q_2\nu'(1)$, $p_1 \neq q_1$ и $p_2 \neq q_2$, получим $\nu(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(9),(10)\}$ при выполнении условий $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$ имеет нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Для исследования спектральной задачи $\{(9),(10)\}$ применим метод функций Грина. С этой целью построим функцию Грина $G(x,s)$. Она должна обладать следующими свойствами:

1) функции $G(x,s)$, $G_x(x,s)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)$ непрерывны для всех $x,s \in [0,1]$;

2) в каждом из интервалов $[0,s)$ и $(s,1]$ существует непрерывная производная $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\right]_x$, а при $x = s$ имеет скачок 1, т.е.

$$\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=s+0} - \left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=s-0} = 1;$$

3) в интервалах $(0,s)$ и $(s,1)$ функция $G(x,s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет уравнению $MG(x,s) = 0$;

4) функция $G(x,s)$ по аргументу x при $s \in (0,1)$ удовлетворяет краевым условиям $p_1G(0,s) = q_1G(1,s)$, $p_2G_x(0,s) = q_2G_x(1,s)$, $q_2\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\Big|_{x=0} = p_2\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\Big|_{x=1}$, $q_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=0} = p_1\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_{xx}(x,s)\right]_x\Big|_{x=1}$.

Пользуясь общим решением уравнения $M\nu = 0$ и принимая во внимание условия $p_1 \neq q_1$, $p_2 \neq q_2$, нетрудно убедиться, что функция $G(x,s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{p_1}{p_1-q_1}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{z(x-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} - \dfrac{q_1}{p_1-q_1}\displaystyle\int\limits_0^s \dfrac{z(s-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \\ +\dfrac{p_2}{p_2-q_2}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{s(x-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q_2}{p_2-q_2}\displaystyle\int\limits_0^s \dfrac{x(s-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + g(x,s),\ x < s, \\ -\dfrac{p_1}{p_1-q_1}\displaystyle\int\limits_0^s \dfrac{z(s-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} - \dfrac{q_1}{p_1-q_1}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{z(x-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} \\ +\dfrac{p_2}{p_2-q_2}\displaystyle\int\limits_0^s \dfrac{x(s-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q_2}{p_2-q_2}\displaystyle\int\limits_0^x \dfrac{s(x-z)\,dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + g(x,s),\ x > s, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$g(x,s)=\frac{p_2q_1}{(p_1-q_1)(p_2-q_2)}\left[\int\limits_0^x\frac{(x-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}+\int\limits_0^s\frac{(s-z)\,dz}{z^\alpha(1-z)^\beta}\right]+\frac{q_2^2k_1xs}{(p_2-q_2)^2}-\frac{q_1q_2}{(p_1-q_1)}\times$$

$$\times\frac{k_2(x+s)}{(p_2-q_2)}+\frac{p_2q_2q_1k_1(x+s)}{(p_1-q_1)(p_2-q_2)^2}+\frac{q_1^2k_3}{(p_1-q_1)^2}-\frac{2p_2q_1^2k_2}{(p_1-q_1)^2(p_2-q_2)}+\frac{p_2^2q_1^2k_1}{(p_1-q_1)^2(p_2-q_2)^2},$$

$$k_1=\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma^{-1}(2-\alpha-\beta),\ k_2=\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma^{-1}(3-\alpha-\beta),$$

$k_3=\Gamma(3-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma^{-1}(4-\alpha-\beta)$.

Тогда, методом, примененным в [22], легко убедиться, что задача $\{(9),(10)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x,s)$:

$$\nu(x)=\lambda\int\limits_0^1 G(x,s)\nu(s)\,ds. \tag{12}$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т.е. $\lambda>0$), то интегральное уравнение, следовательно, задача $\{(9),(10)\}$ имеет счетное число собственных значений $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<...<\lambda_k<...,\ \ \lambda_k\to+\infty$, а соответствующие им собственные функции $\nu_1(x),\nu_2(x),\nu_3(x),...,\nu_k(x),...$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0,1)$ и что любая функция, истокообразно представимая через ядро $G(x,s)$, разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям [23].

Лемма 2. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет условиям: $h(x)$, $h'(x)$, $x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\in C[0,1]$, $Mh(x)\in L_2(0,1)$; $p_1h(0)=q_1h(1)$, $p_2h'(0)=q_2h'(1)$,
$q_2\,x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\Big|_{x=0}=p_2\,x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\Big|_{x=1}$, $q_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\Big|_{x=0}=$ $p_1\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'\Big|_{x=1}$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{\nu_k(x)\}_{k=1}^\infty$.

Доказательство. Справедливо равенство

$$h(x)=\int\limits_0^1 G(x,s)\,Mh(s)ds=\int\limits_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]''ds.$$

Действительно, в силу свойства функций $G(x,s)$ и $h(x)$, имеем

$$\int\limits_0^1 G(x,s)\left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]''ds=\left[s^\alpha(1-s)^\beta h''(s)\right]'G(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1}-$$

$$-s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h''(s)\,G_s(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1}+s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\,G_{ss}(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1}-$$

$$-h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}(x,s)\right]_s\Big|_{s=0}^{s=x-0}-h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}(x,s)\right]_s\Big|_{s=x+0}^{s=1}+$$

$$+\int\limits_0^1 h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_{ss}(x,s)\right]_{ss}ds=h(x).$$

Следовательно, $h(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$. Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что справедливо неравенство

$$\int\limits_0^1 G^2(x,s)\,ds\le C_3=\mathrm{const}<+\infty.$$

Тогда, в силу теоремы Гильберта-Шмидта, функция $h(x)$ на отрезке $[0,1]$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{\nu_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ [23]. Лемма 2 доказана. □

Вспомогательные леммы

В этом пункте предполагается, что $p_1\ne q_1$ и $p_2\ne q_2$ и под λ_k, $\nu_k(x)$, $k\in N$ понимаются собственные значения и собственные функции задачи $\{(9),(10)\}$ (ядра $G(x,s)$), а под h_k - коэффициент Фурье заданной $h(x)$ функции по системе собетвенных функций $\{\nu_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, т.е. $h_k=\int\limits_0^1 h(x)\,\nu_k(x)\,dx$, $k\in N$.

Лемма 3. Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[{\nu_k}^{(\mu)}(x)\right]^2/\lambda_k\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}{\nu''}_k(x)\right]^{(\mu)}\right\}^2/\lambda_k^2\,,\ \mu=\overline{0,1}. \tag{13}$$

Доказательство. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (11) симметрично, положительно и непрерывно по (x,s), то на основании теоремы Мерсера [23], это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G(x,s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\nu_k(x)\,\nu_k(s)]/\lambda_k$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k^2(x)/\lambda_k=G(x,x)\le C_4=\mathrm{const}<+\infty$. Следовательно, первый ряд в (13) равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

В силу (12) и (9), справедливы равенства

$$\nu_k'(x)=\lambda_k\int\limits_0^1 G_x(x,s)\,\nu_k(s)\,ds=\int\limits_0^1 G_x(x,s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\nu_k''(s)\right]''ds.$$

Отсюда применяя правило интегрирования по частям дважды, а затем принимая во внимание условия (10), получим

$$\nu'_k(x) = \int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta} G_{xss}(x,s)\,\nu''_k(s)\,ds.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{\nu'_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} = \int_0^1 s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2} G_{xss}(x,s)\left\{\frac{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}\nu''_k(s)}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}ds. \qquad (14)$$

Далее, с помощью правила интегрирования по частям и равенств (9), (10), находим

$$\int_0^1 \frac{s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\nu''_k(s)\nu''_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}\left\{ s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\nu''_k(s)\nu'_l(s)\Big|_0^1 - \left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\nu''_k(s)\right]'\nu_l(s)\Big|_0^1\right\}$$

$$+\int_0^1 \frac{\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}\nu''_k(s)\right]''\nu_l(s)}{\sqrt{\lambda_k\lambda_l}}ds = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_l}}\int_0^1 \nu_k(s)\nu_l(s)\,ds = \begin{cases} 1, \text{при } k=l\,, \\ 0, \text{при } k\neq l\,. \end{cases} \qquad (15)$$

Следовательно, $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}\nu''_k(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормальная система. Тогда из (14) и (15) следует, что $\nu'_k(x)/\sqrt{\lambda_k}$ - есть коэффициент Фурье функции $s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}\times$ $G_{xss}(x,s)$ по системе $\left\{s^{\alpha/2}(1-s)^{\beta/2}\nu''_k(s)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Поэтому, согласно неравенству Бесселя [23], имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\nu'_k(x)]^2}{\lambda_k} \le \int_0^1 s^{\alpha}(1-s)^{\beta}[G_{xss}(x,s)]^2 ds. \qquad (16)$$

Принимая во внимание равенства (11), нетрудно убедиться, что интеграл в (16) равномерно ограничен. Поэтому ряд в (16), т.е. второй ряд в (13), сходится равномерно.

Аналогично доказывается сходимость остальных рядов. Лемма 3 доказана. □

Лемма 4. Если выполнены условия $h(x), h'(x), x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''(x)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h''(x)\right]' \in C[0,1], Mh(x) \in L_2(0,1)$; $p_1h(0) = q_1h(1)$, $p_2h'(1) = q_2h'(1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k h_k^2 \le \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[h''(x)\right]^2 dx. \qquad (17)$$

Доказательство. В силу уравнения (9), справедливо равенство

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 h(x) \nu_k(x)\, dx = \lambda_k^{-1/2} \int_0^1 h(x) \left[x^\alpha (1-x)^\beta \nu_k''(x)\right]'' dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям дважды и учитывая свойства функций $h(x)$ и $\nu_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2} h_k = \int_0^1 \left\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} h''(x)\right\} \left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} \nu_k(x)\right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2} h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h''(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} \nu''_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (17). Лемма 4 доказана. □

Лемма 5. Если выполнены условия $h(x)$, $h'(x)$, $x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)$, $\left[x^\alpha(1-x)^\beta h''(x)\right]'$, $Mh(x)$, $[Mh(x)]' \in C[0,1]$, $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}[Mh(x)]'' \in L_2(0,1)$; $p_1 h(0) = q_1 h(1)$, $p_2 h'(0) = q_2 h'(1)$, $q_2 x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)|_{x=0} = p_2 x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)|_{x=1}$, $q_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)\right]'_{x=0} =$
$= p_1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)\right]'|_{x=1}$, $p_1\, Mh(x)|_{x=0} = q_1\, Mh(x)|_{x=1}$, $q_2\, [Mh(x)]'|_{x=0} = p_2\, [Mh(x)]'|_{x=1}$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \le \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left\{[Mh(x)]''\right\}^2 dx. \tag{18}$$

Доказательство. В силу уравнения (9), справедливо равенство

$$\lambda_k^{3/2} h_k = \lambda_k^{3/2} \int_0^1 h(x) \nu_k(x)\, dx = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 h(x)\, M\nu_k(x)\, dx = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 h(x) \left[x^\alpha (1-x)^\beta \nu_k''(x)\right]'' dx.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $\nu_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{3/2} h_k = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 \left[x^\alpha (1-x)^\beta h''(x)\right]'' \nu_k(x)\, dx = \lambda_k^{1/2} \int_0^1 [Mh(x)]\, \nu_k(x)\, dx.$$

Заменяя в последнем интеграле функцию $\nu_k(x)$ с $\left[x^\alpha (1-x)^\beta \nu_k''(x)\right]'' / \lambda_k$, а затем применяя правило интегрирования по частям два раза к полученному интегралу, имеем

$$\lambda_k^{3/2} h_k = \int_0^1 x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} [Mh(x)]'' \left\{\lambda_k^{-1/2} x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2} \nu''_k(x)\right\} dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{3/2}h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\times$
$[Mh(x)]''$ по ортонормированной системе функций $\left\{\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\nu''_k(x)\right\}_{k=1}^{+\infty}$
. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (18). Лемма 5 доказана. □

Существование и устойчивость решения задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$

Формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\nu_k(x), \tag{19}$$

где

$$u_k(t)=\varphi_k E_{\gamma,1-a/\gamma,-a/\gamma}\left[-(\lambda_k+b)\,t^{\gamma-a}\right], \tag{20}$$

$E_{\gamma,1-a/\gamma,-a/\gamma}\left[-(\lambda_k+b)\,t^{\gamma-a}\right]$ - известная функция Килбаса-Сайго [24], а φ_k, $k\in N$ - коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ в системе собственных функций $\{\nu_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Теорема 2. Если $p_1\neq q_1$, $p_2\neq q_2$ и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, то сумма ряда (19) определяет решение задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд (19) и ряды, соответствующие функциям $u_x(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_x$, сходятся равномерно в $\overline{\Omega}$, а ряды, соответствующие функциям $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$, $t^a{}_C D_{0t}^{\gamma}u(x,t)$, сходятся равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (19). Так как $\left|E_{\gamma,1-a/\gamma,-a/\gamma}\left(-(\lambda_k+b)\,t^{\gamma-a}\right)\right|\leq 1$ при $\forall\gamma>a$ [24], то справедливы неравенства

$$|u(x,t)|=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\nu_k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)||\nu_k(x)|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||\nu_k(x)|. \tag{21}$$

На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k||\nu_k(x)|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right|\left|\frac{\nu_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\leq\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\nu_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 3, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Отсюда и из (21) следует, что ряд (19) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}$.

Так как $\left|E_{\gamma,1-a/\gamma,-a/\gamma}\left(-\left(\lambda_k+b\right)t^{\gamma-a}\right)\right| \leq 1$ при $\forall\gamma > a$ [24], то из (19) следует неравенство

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}\right]_{xx}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k|\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\nu''_k(x)\right]''\right|.$$

Отсюда, в силу уравнения (9), на любом компакте $D(\subset\Omega)$ имеем

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_{xx}(x,t)\right]_{xx}\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_k\nu_k(x)|. \tag{22}$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda_k\varphi_k\nu_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_k\right|\left|\frac{\nu_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \leq \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_k^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\nu_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 4, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (22) сходится абсолютно и равномерно на компакте D. Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Теорема 2 доказана. □

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ справедливы следующие оценки:

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} \leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}, \tag{23}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_5\left\|\varphi''(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)},\ C_5 = \sup_{[0,1]}\sqrt{G(x,x)}, \tag{24}$$

где $\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|$, $\|f''(x)\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int\limits_0^1 r(x)\left[f''(x)\right]^2dx\right]^{1/2}$, $r(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

Доказательство. Так как $\{\nu_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система, то из (19), учитывая $\left|E_{\gamma,1-a/\gamma,-a/\gamma}\left(-\left(\lambda_k+b\right)t^{\gamma-a}\right)\right| \leq 1$ при $\forall\gamma > a$ [24], получим следующее неравенство:

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 = \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx = \int\limits_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\nu_k(x)\sum_{l=1}^{+\infty}u_l(t)\nu_l(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{+\infty}u_k(t)u_l(t)\int\limits_0^1\nu_k(x)\nu_l(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty}u_k^2(t)\int\limits_0^1\nu_k^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty}u_k^2(t) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k|^2 \leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}^2.$$

Следовательно, оправедливо неравенство (23).

В силу леммы 3 и неравенства $|u_k(t)| \le |\varphi_k|$, справедливы неравенства

$$|u(x,t)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\nu_k(x)\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k||\nu_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_k\right| \left|\frac{\nu_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le$$

$$\le \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\varphi_k^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} \le \left[G(x,x)\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^\beta\left[\varphi''(x)\right]^2 dx\right]^{1/2} \le C_5\left\|\varphi''(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)}.$$

Отсюда, следует неравенство (24). Теорема 3 доказана. □

Замечание. Если $\gamma = 1$, то решение задачи $A_{p_1q_1}^{p_2q_2}$ определяется рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\varphi_k e^{-\left(\lambda_k t^{1-a}\right)/(1-a)}\right] \nu_k(x).$$

Заключение

В данной работе в прямоугольной области рассмотрена нелокальная начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка с дробной производной Герасимова - Капуто. Методом разделения переменных найдено решение задачи в виде ряда, который сходится абсолютно и равномерно в замыкании области рассмотрения уравнения. Кроме того, доказаны единственность решения задачи и непрерывная зависимость его от заданных функций.

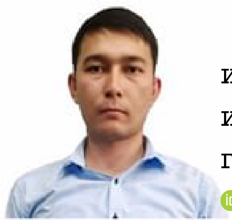
Список литературы

1. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. АН Арм ССР*, 1968. Т. 3, №1, С. 3-29.
2. Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма - Лиувилля, *Изв. АН АрмССР. Mat*, 1970. Т. 5, №2, С. 71-96.
3. Нахушев А. М. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах, *Докл. АН СССР*, 1977. Т. 234, №2, С. 308-311.
4. Алероев Т. С. К проблеме о нулях функции Миттага-Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка, *Дифференц. уравнения*, 2000. Т. 36, №9, С. 1278–1279.
5. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
6. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
8. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011. vol. 62, pp. 3884-3893.
9. Berdyshev A. S, Kadirkulov B. J. A Samarskii-Ionkin problem for two-dimensionalparabolic equation with the Caputo fractional differential operator, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2017. vol. 113, no. 4, pp. 53-64.
10. Kerbal S., Kadirkulov B. J., Kirane M. Direct and inverse problems for a Samarskii-Ionkin type problem for a two dimensional fractional parabolic equation, *Progr. Fract. Differ. Appl*, 2018. vol. 3, pp. 147-160.

11. Aziz S., Malik S. A. Identifcation of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation, *Electron. J. Differ. Equat.*, 2016. vol. 293, pp. 1–20.
12. Бердышев А. С., Кадиркулов Б. Ж. Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения четвертого порядка с дробным оператором Джрбашяна–Нерсесяна, *Дифференциальные уравнения*, 2016. Т. 52, № 1, С. 123–127.
13. Карашева Л. Л. Задача в полуполосе для параболического уравнения четвертого порядка с оператором Римана – Лиувилля по временной переменной, *Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН*, 2019. Т. 5, № 91, С. 21-29.
14. Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Nonlocal problem for a mixed typefourth-order differential equation with Hilfer fractional operator, *Ural mathematical journal*, 2020. vol. 6, no. 1, pp. 153–167.
15. Yuldashev T. K., Kadirkulov B.J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral rede?nition conditions, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021. vol. 42, no. 3, pp. 649–662.
16. Ashurov R., Umarov S. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations, *Fract. Calc. Appl. Anal*, 2020. vol. 23, no. 6, pp. 1647–1662.
17. Ashurov R., Fayziev Y Inverse Problem for Finding the Order of the Fractional Derivative in the Wave Equation, *Mathematical Notes*, 2021. vol. 110, no. 6, pp. 842–852.
18. Каримов Д. Х., Касимова М. Смешанная задача для линейного уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области, *Изв. АН УзССР, сер. физ. -мат. наук*, 1968. Т. 2, С. 27-31.
19. Байкузиев К. Б., Касимова М. Смешанная задача для уравнения четвертого порядка, вырождающегося на границе области, *Изв. АН УзССР, сер. физ. -мат. наук*, 1968. Т. 5, С. 7-12.
20. Касимова М Смешанная задача для линейного уравнения четверого порядка, вырождающегося на границе области, *Изв. АН УзССР, сер. физ. -мат. наук*, 1968. Т. 5, С. 35-39.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1. М.: Наука, 1965. 296 с.
22. Наймарк М. А *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука, 1969. 528 с.
23. Михлин С. Г *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* Москва: Физматлит, 1959. 232 с.
24. Boudabsa L., Simon T Some Properties of the Kilbas-Saigo Function, *Mathematics*, 2021. vol. 9, no. 217.

Информация об авторах

Уринов Ахмаджон Кушакович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-9586-1799.



Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли – исследователь, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-3574-075X.

References

[1] Dzhrbashyan M. M., Nersesyan A. B. Drobnyye proizvodnyye i zadacha Koshi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka, Izv. AN Arm SSR, 1968, **3**, 1, 3-29 (In Russian).

[2] Dzhrbashyan M. M. Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo operatora drobnogo poryadka tipa Shturma-Liuvillya, Izv. AN ArmSSR, 1970, **5**, 2, 71-96 (In Russian).

[3] Nakhushev A. M. The Sturm-Liouville problem for a second-order ordinary differential equation with fractional derivatives in lower terms, Dokl. AN SSSR, 1977, **234**, 2 , 308-311 (In Russian).

[4] Aleroev T. S. On the problem of the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional order differential operator, Differents. uravneniya, 2000, **36**, 9, 1278–1279 (In Russian).

[5] Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial differential equations of fractional order], Moskva, Nauka, 2005, 199 (In Russian).

[6] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its applicatio], Moskva, Fizmatlit, 2003, 272 (In Russian).

[7] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya [Fractional integrals and derivatives and some of their applications], Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 (In Russian).

[8] Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator, Computers and Mathematics with Applications, 2011, 62, 3884-3893.

[9] Berdyshev A. S, Kadirkulov B. J. A Samarskii-Ionkin problem for two-dimensionalparabolic equation with the Caputo fractional differential operator, International Journal of Pure and Applied Mathematics, **113**, 4, 2017, 53-64.

[10] Kerbal S., Kadirkulov B. J., Kirane M. Direct and inverse problems for a Samarskii-Ionkin type problem for a two dimensional fractional parabolic equation, Progr. Fract. Differ. Appl, 2018, 3, 147-160.

[11] Aziz S., Malik S. A. Identifcation of an unknown source term for a time fractional fourth-order parabolic equation, Electron. J. Differ. Equat., 2016, 293, 1–20.

[12] Berdyshev A. S., Kadirkulov B. J. On a Nonlocal Problem for a Fourth-Order Parabolic Equation with a Dzhrbashyan–Nersesyan Fractional Operator, Differentsial'nyye uravneniya, 2016, **52**, 1, 123–127 (In Russian).

[13] Karasheva L. L. Problem in a half-strip for a fourth-order parabolic equation with a Riemann–Liouville operator by time variable, Izvestiya Kabardino-Balkarskogo nauchnogo tsentra RAN, 2019, **5**, 91, 21-29 (In Russian).

[14] Yuldashev T. K., Kadirkulov B. J. Nonlocal problem for a mixed typefourth-order differential equation with Hilfer fractional operator, Ural mathematical journal, 2020, **6**, 1, 153–167.

[15] Yuldashev T. K., Kadirkulov B.J. Inverse boundary value problem for a fractional differential equations of mixed type with integral redenition conditions, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, **42**, 3, 649–662.

[16] Ashurov R., Umarov S. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations, Fract. Calc. Appl. Anal., **23**, 6, 2020, 1647–1662.

[17] Ashurov R., Fayziev Y. Inverse Problem for Finding the Order of the Fractional Derivative in the Wave Equation, Mathematical Notes, 2021, **110**, 6, 842–852.

[18] Karimov D. KH., Kasimova M. Smeshannaya zadacha dlya lineynogo uravneniya chetvertogo poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti, Izv. AN UzSSR, ser. fiz. -mat. nauk, 1968, 2, 27-31 (In Russian).

[19] Baykuziyev K. B., Kasimova M. Smeshannaya zadacha dlya uravneniya chetvertogo poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti, Izv. AN UzSSR, ser. fiz. -mat. nauk, 1968, 5, 7-12 (In Russian).

[20] Kasimova M. Smeshannaya zadacha dlya lineynogo uravneniya chetverogo poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti, Izv. AN UzSSR, ser. fiz. -mat. nauk, 1968, 5, 35-39 (In Russian).

[21] Beytmen G., Erdeyi A. Vysshiye transtsendentnyye funktsii, Tom 1 [Higher transcendental functions. Vol. 1], Moskva, Nauka, 1965, 296 (In Russian).

[22] Naymark M. A. Lineynyye differentsial'nyye operatory [Linear differential operators], Moskva, Nauka, 1969, 528 (In Russian).

[23] Mikhlin S. G. Lektsii po lineynym integral'nym uravneniyam [Lectures on linear integral equations], Moscow, Fizmatlit, 1959, 232 (In Russian).

[24] Boudabsa L., Simon T. Some Properties of the Kilbas-Saigo Function, Mathematics, 2021, 9, 217.

Information about authors

Urinov Akhmadzhon Kushakovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-9586-1799.

Usmonov Doniyor Abdumutolib ugli – Researcher, Department of Mathematical Analysis and Differential Equations, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-3574-075X.

МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.58

К свойствам одной функции Фокса

Ф. Г. Хуштова*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

Аннотация. В работе рассматривается частный случай специальной функции Фокса с четырьмя параметрами, которая возникает в теории краевых задач для параболических уравнений с оператором Бесселя и дробной производной по времени. Целью исследования является получение некоторых рекуррентных соотношений, формул дифференцирования и интегрального преобразования рассматриваемой функции. При получении результатов работы в основном используется представление рассматриваемой функции через интеграл Меллина–Барнса. Также используются её асимптотические разложения при большом и малом значениях аргумента. С помощью указанного интегрального представления и некоторых известных формул для гамма-функции Эйлера, получены рекуррентные соотношения, связывающие функции с разными параметрами, а также функцию с её производной первого порядка. Получена формула дифференцирования n-го порядка. Исследуется несобственный интеграл первого рода, который содержит рассматриваемую функцию с двумя зависимыми параметрами из четырёх. Показывается, что этот несобственный интеграл может быть записан в терминах известной специальной функции Макдональда. При частных значениях параметров рассматриваемой в работе функции получаются некоторые известные элементарные и специальные функции. Результаты работы носят теоретический характер и будут полезны при исследовании краевых задач для вырождающихся параболических уравнений с производными дробного порядка по времени.

Ключевые слова: функция Фокса, интеграл Меллина-Барнса, гамма-функция Эйлера, функция Макдональда, гипергеометрическая функция.

Получение: 29.11.2022; Исправление: 16.03.2023; Принятие: 29.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. К свойствам одной функции Фокса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. С. 140-149. EDN: FXXPSA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: khushtova@yandex.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149

Research Article

Full text in Russian

MSC 33C60

To the Properties of One Fox Function

F. G. Khushtova*

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

Abstract. The paper considers a particular case of a special Fox function with four parameters, which arises in the theory of boundary value problems for parabolic equations with a Bessel operator and a fractional time derivative. The research objective is to obtain some recurrence relations, formulas for differentiation and integral transformation of the function under consideration. The results are obtained through representation of the considered function in terms of the Mellin–Barnes integral. The function asymptotic expansions for large and small values of the argument are also used. Employing the integral representation and some well-known formulas for the Euler gamma function, recurrent relations are obtained connecting functions with different parameters, as well as a function with its first-order derivative. A formula for differentiation of the nth order is obtained. The paper studies an improper integral of the first kind that includes the considered function with two dependent of the four parameters. We show that the improper integral can be written out in terms of the well-known special Macdonald function. With special values of the parameters of the considered function we obtain some well-known elementary and special functions. The results of the study are theoretical and applicable in the study of boundary value problems for degenerate parabolic equations with fractional time derivatives.

Key words: Fox function, Mellin-Barnes integral, Euler gamma function, Macdonald function, hypergeometric function.

Received: 29.11.2022; Revised: 16.03.2023; Accepted: 29.03.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Khushtova F. G. To the properties of one fox function. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 140-149. EDN: FXXPSA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: khushtova@yandex.ru

Введение

Решения многих задач математической физики, техники и экономики выражаются через так называемые специальные функции. В теории специальных функций важное место занимают функции гипергеометрического типа. Многие из них могут быть записаны в терминах G-функции Мейера. Обобщением G-функции Мейера является H-функция Фокса. Основные свойства этой функций, такие как представление через степенные ряды, асимптотические свойства при больших и малых значениях аргумента, некоторые интегральные преобразования, можно вывести из её представления через так зазываемый интеграл Меллина–Барнса. Однако, при выводе некоторых формул при частных значениях параметров, ввиду громоздкости её записи, удобнее пользоваться упрощенными обозначениями. В данной работе рассматривается частный случай такой функции Фокса, содержащей четыре параметра. Эта функция возникает при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и производной дробного порядка по временной переменной [1], [2]

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0,$$

где

$$B_x u = x^{-b} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^b \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

– оператор Бесселя, $|b| < 1$, D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка α, который определяется следующим образом [3, с. 9]: $D_{0y}^{\alpha} u = u_y$, если $\alpha = 1$, и

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y \frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\alpha}},$$

если $0 < \alpha < 1$.

Вспомогательные сведения.

Далее в работе $\Gamma(s)$ – *гамма-функция Эйлера*, $K_{\nu}(z)$ - *функция Макдональда*, для которых известны представления [4, с. 5], [5, с. 15], [6, с. 11], [7, с. 79]

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \mathrm{Re}\, s > 0, \tag{1}$$

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(\nu/2 + s)\, \Gamma(-\nu/2 + s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \quad \gamma > |\mathrm{Re}\,\nu|/2. \tag{2}$$

Как известно, $\Gamma(s)$ аналитична в комплексной плоскости s всюду, кроме точек $s = -n$, $n = 0, 1, 2, ...$, в которых имеет полюсы первого порядка с вычетами

$(-1)^n/n!$. Соответственно, $\Gamma(-s)$ имеет в точках $s=n$, $n=0,1,2,...$, вычеты, равные $(-1)^{n+1}/n!$.

Справедливы формулы [4, с. 10], [5, с. 17], [7, с. 27]

$$\Gamma(s+n)=(s)_n\Gamma(s), \tag{3}$$

$$\Gamma(s+1-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(s+1)}{(-s)_n}, \tag{4}$$

где $n=0,1,2,...$, $(s)_n$ – *символ Похгаммера*, определяемый равенствами

$$(s)_n=s(s+1)(s+2)...(s+n-1), \quad (s)_0=1.$$

Частный случай функции Фокса. Пусть $0<\rho\leqslant 2$, μ, σ и $r\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\sigma+r)/2\notin\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=H_{2,3}^{2,1}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\sigma/2,1),(\mu-\rho\sigma/2,\rho)\\(r/2,1),(1-\sigma/2,1),(-r/2,1)\end{matrix}\right], \tag{5}$$

где $H_{2,3}^{2,1}[...]$ – H-*функция Фокса* [8]- [10].

Некоторые свойства функции (5), такие как представление через контурный интеграл, представление через степенные ряды, асимптотические свойства, формулы дифференцирования, рекуррентные соотношения, рассмотрены в работах [11], [12].

Для функции (5) имеет место представление через интеграл Меллина-Барнса

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \tag{6}$$

где

$$\Theta(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\,\Gamma(1+r/2-s)}, \tag{7}$$

$$L=L_{i\omega\infty}=(\omega-i\infty,\omega+i\infty), \quad \omega_1<\omega<\omega_2,$$

$$\omega_1=-\min\{\operatorname{Re}r/2,1-\operatorname{Re}\sigma/2\}, \quad \omega_2=\operatorname{Re}\sigma/2.$$

Интеграл (6) абсолютно сходится, если:

$$\rho<2, \quad |\arg z|<\pi(1-\rho/2)/2, \quad z\neq 0,$$

$$\rho\leqslant 2, \quad |\arg z|=\pi(1-\rho/2)/2, \quad (\rho-2)\,\omega>\rho\operatorname{Re}\sigma/2-\operatorname{Re}\mu+1/2, \quad z\neq 0.$$

Справедливы асимптотические разложения

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=a_0\left(\frac{z}{2}\right)^r+b_0\left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma}+o(z^\delta), \quad z\to 0, \tag{8}$$

где $\delta=\min\{\operatorname{Re}r,2-\operatorname{Re}\sigma\}$,

$$a_0=\frac{\Gamma(1-(r+\sigma)/2)\,\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu-\rho(r+\sigma)/2)\,\Gamma(1+r)}, \quad b_0=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2-1)}{\Gamma(\mu-\rho)\,\Gamma(2+(r-\sigma)/2)},$$

и

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=c_0\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}+o(z^{-\sigma}), \quad z\to\infty, \tag{9}$$

где

$$c_0=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1+(r-\sigma)/2)}.$$

Основные результаты.

В этой работе, используя интегральное представление (6), докажем следующие свойства функции (5).

Свойство 1. *Имеет место формула*

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = (-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k}, \quad n = 1, 2, ..., \tag{10}$$

где

$$d_k = \frac{(-1)^k \Gamma\left((r+\sigma)/2+k\right)}{\Gamma(\mu+\rho k)\,\Gamma\left(1+(r-\sigma)/2-k\right)}.$$

Доказательство. Согласно (6) можем записать

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \Theta_1(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{11}$$

где

$$\Theta_1(s) = \frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2-n+s)\,\Gamma(\sigma/2+n-s)}{\Gamma(\mu-\rho\,\sigma/2+\rho\, s)\,\Gamma(1+r/2-s)},$$

$$L_1 = (\omega-i\infty, \omega+i\infty), \quad \omega_3 < \omega < \omega_4, \tag{12}$$

$$\omega_3 = -\min\{\operatorname{Re} r/2, 1-\operatorname{Re}\sigma/2-n\}, \quad \omega_4 = \operatorname{Re}\sigma/2+n.$$

Из формул (3) и (4) следуют равенства

$$\Gamma(\sigma/2+n-s) = (\sigma/2-s)_n\,\Gamma(\sigma/2-s),$$

$$\Gamma(1-\sigma/2-n+s) = \frac{(-1)^n \Gamma(1-\sigma/2+s)}{(\sigma/2-s)_n}.$$

В силу последних интеграл (11) преобразуется к виду

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \Theta(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{13}$$

где $\Theta(s)$ представляется в виде (7). Заметим, что контур интегрирования L_1, определяемый из (12), оставляет слева полюсы в точках $s_k = \sigma/2+k$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Вычеты функции $\Theta(s)\,(z/2)^{-2s}$ в этих точках равны

$$\frac{(-1)^{k+1}\Gamma\left((r+\sigma)/2+k\right)}{\Gamma(\mu+\rho k)\,\Gamma\left(1+(r-\sigma)/2-k\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k}.$$

Вычитая их из функции (13), получим

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma\left((r+\sigma)/2+k\right)}{\Gamma(\mu+\rho k)\,\Gamma\left(1+(r-\sigma)/2-k\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k} = \mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z),$$

что и доказывает равенство (10).

При $n=1$ (10) принимает вид

$$\mathscr{I}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)+\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+\rho,\sigma+2}(z)=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu)\Gamma(1+(r-\sigma)/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}.$$

Свойство 2. *Справедлива формула*

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2}{\rho}\left[\mu\,\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)-\mathscr{I}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)\right].\tag{14}$$

Доказательство. Из представления (6) следует

$$\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds,\tag{15}$$

где

$$\Theta_2(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\Gamma(1-\sigma/2+s)\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu+1-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(1+r/2-s)}.$$

Домножим (15) на z^{σ} и продифференцируем полученное равенство по z. Результат дифференцирования умножим на $z^{1-\sigma}$. Получим

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)(\sigma-2s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds.\tag{16}$$

Преобразуем правую часть равенства (16), записав её в виде

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds-$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds.\tag{17}$$

Из формулы (3) следует

$$\Gamma(\mu+1-\rho\sigma/2+\rho s)=(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s).$$

Учитывая последнее, равенство (17) запишется в виде

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{I}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds-\frac{2}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds,\tag{18}$$

где $\Theta(s)$ определяется из (7). Сравнивая правую часть (18) с представлением (6), приходим к (14).

Свойство 3. *Имеет место формула дифференцирования*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\,\mathscr{I}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}\,\mathscr{I}_r^{\rho,\mu-n,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2}),\tag{19}$$

где $\lambda=const$, $n=1,2,\ldots$

Доказательство. Продифференцируем n раз по z равенство

$$z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})=\frac{z^{\mu-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds.$$

Получим

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=$$
$$=\frac{(-1)^n z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\,(1-\mu+\rho\sigma/2-\rho s)_n\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds. \qquad (20)$$

Из формулы (4) следует

$$(1-\mu+\rho\sigma/2-\rho s)_n=\frac{(-1)^n\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)}{\Gamma(\mu-n-\rho\sigma/2+\rho s)}.$$

Учитывая последнее, (20) примет вид

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=\frac{z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_3(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds,$$

где

$$\Theta_3(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-n-\rho\sigma/2+\rho s)\,\Gamma(1+r/2-s)},$$

откуда следует (19).

Свойство 4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$, $\lambda=\mathrm{const}$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+\alpha,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2}). \qquad (21)$$

Доказательство. Отметим, что сходимость интеграла в (21) следует из асимптотического разложения (9). Из представления (6) имеем

$$\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda t^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds\,dt. \qquad (22)$$

Меняя в (22) порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-2s}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1}dt\,ds. \qquad (23)$$

Внутренний интеграл равен [13, с. 238]

$$\int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1} dt = z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)}{\Gamma(\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s)}.$$

Подставляя найденное значение в (23) и учитывая (7), приходим к формуле (21).

Частные случаи. Справедливы представления

$$\left(\frac{z}{2}\right)^r \mathscr{J}_r^{1,1,r}(z) = \gamma\left(r; \frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,2+r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \mathscr{J}_r^{1,2,4+r}(z) = -\left(\frac{z}{2}\right)^r \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,2-r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r E_{1,1+r}\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \mathscr{J}_r^{1,2,4-r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{r-2} E_{1,r}\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,\sigma}(z) = \frac{\Gamma((\sigma+r)/2)}{\Gamma(1+r)} \left(\frac{z}{2}\right)^r \Phi\left((\sigma+r)/2, 1+r; -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^r \mathscr{J}_r^{\rho,\rho,2+r}(z) = H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{z^2}{4} \left| \begin{matrix} (0,\rho) \\ (r,1),(0,1) \end{matrix} \right.\right].$$

Здесь $\gamma(r;z)$ – неполная гамма-функция [5, с. 254], $E_{\rho,\mu}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффелера [7, с. 101], $\Phi(a,c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [5, с. 237], [7, с. 73].

Приведённые частные случаи нетрудно получить придавая параметрам ρ, μ и σ в (6) соответствующие значения и учитывая представления через интеграл Меллина-Барнса получающихся функций [5, с. 244], [7, с. 168, 136, 101, 74].

Заключение

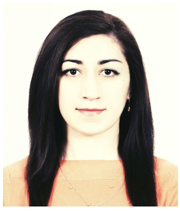
Рассматривается частный случай специальной функции Фокса. Используя её интегральное представление, получены формулы, связывающие функции с разными параметрами, а также функцию с её производной первого порядка, формула дифференцирования n-го порядка. Исследуются два интеграла с рассматриваемой функцией. При частных значениях параметров получаются некоторые известные элементарные и специальные функции. Полученные результаты могут быть применены при исследовании краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений с производными дробного порядка.

Список литературы

1. Хуштова Ф.Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 6, С. 921–928.
2. Хуштова Ф.Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2018. Т. 103, № 3, С. 460–470.
3. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Кузнецов Д.С. *Специальные функции.* М.: Высшая школа, 1962. 248 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1. М.: Наука, 1965. 296 с.
6. Лебедев Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит, 1963. 358 с.
7. Маричев О.И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул).* Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, Т. 3. М.: Наука, 1986. 800 с.
9. Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transform. Theory and Applications.* Boca Raton, London, New York and Washington, D.C.: Chapman and Hall/CRC, 2004. 389 c.
10. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J. *The H-function. Theory and Applications.* Springer, 2010. 270 c.
11. Хуштова Ф.Г. Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 20, №4, С. 15–18.
12. Хуштова Ф.Г. О некоторых свойствах одной специальной функции, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 22, №2, С. 34–40.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Т. 1. М.: Физматлит, 2002. 632 с.

Информация об авторе



Хуштова Фатима Гидовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации РАН, г. Нальчик, Россия, https://orcid.org/0000-0003-4088-3621.

References

[1] Khustova F. G. First Boundary-Value Problem in the Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Derivative, Matematicheskie Zametki, 2016, 99, 6, 921–928 (In Russian)

[2] Khustova F. G. The Second Boundary-Value Problem in a Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Partial Derivative, Matematicheskie Zametki, 2018, 103, 3, 460–470.

[3] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application], Moskva Fizmatlit. 2003, 272 (In Russian.)

[4] Kuznetsov D. S. Spetsial'nyye funktsii [Special Functions], Moskva, Vysshaya shkola, 1962, 248 (In Russian)

[5] Bateman G., Erdeyi A. Vysshiye transtsendentnyye funktsii [Higher transcendental functions], vol. I, Moskva, Nauka, 1965, 296(In Russian.)

[6] Lebedev N. Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications], Moskva, Fizmatlit, 1963, 358(In Russian.)

[7] Marichev O. I. Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul) [Method for calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)], Nauka i tekhnika, 1978, 312(In Russian.)

[8] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Tom 3. Dopolnitel'nyye glavy [Integrals and series. vol. 3. Additional chapters], Moskva, Nauka, 1986, 800(In Russian.)

[9] Kilbas A. A., Saigo M. H-Transform. Theory and Applications, Boca Raton, London, New York and Washington, D.C., Chapman and Hall/CRC, 2004, 389.

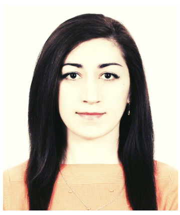
[10] Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. The H-function. Theory and Applications, Springer, 2010, 270.

[11] Khushtova F. G. Differentiation formulas and an autotransformation formula for one particular case of the Fox function, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 2020, 20, 4, 15–18(In Russian.)

[12] Khushtova F. G. On some properties of one special function, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 2020, 22, 2, 34–40(In Russian.)

[13] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Tom. 1. Elementarnyye funktsii [Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions], Moskva, Fizmatlit, 2002, 632(In Russian.)

Information about the author



Khushtova Fatima Gidovna ✉ – PhD (Math. & Phys.), Professor, Researcher, Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation RAS, Nalchik, Russia, https://orcid.org/0000-0003-4088-3621.