МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-108-122
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.956.4

Задача для параболического уравнения с двумя свободными границами

М. С. Расулов*[1,2]

[1] Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская 9, Республика Узбекистан

[2] Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства 100000, г. Ташкент, ул. Кари Ниязов 39, Республика Узбекистан

Аннотация. В данной работе рассматривается задача типа Стефана с двумя свободными границами для квазилинейного параболического уравнения в одномерном случае. Исследование нелинейных задач со свободными границами методом, основанным на построении априорных оценок. Поэтому сначала устанавливаются некоторые первоначальные априорные оценки для решения рассматриваемой задачи. Основной трудностью при построении теории для задач квазилинейных параболических уравнений второго порядка является получение априорной оценки модуля производной решение, а также в задачах со свободной границей требуются дополнительные рассуждения. Для этого задача сводится к задаче с фиксированной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Далее построены априорных оценок типа Шаудера для решения уравнения с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. На основе полученных оценок доказана единственность решения задачи. Затем мы доказываем глобальное существование решения задачи с помощью теоремы Лерэ-Шаудера о неподвижной точке.

Ключевые слова: квазилинейное параболическое уравнение, свободная граница, априорные оценки, теорема существования и единственности.

Получение: 06.02.2023; Исправление: 20.03.2023; Принятие: 25.03.2023; Публикация онлайн: 16.04.2023

Для цитирования. Расулов М. С. Задача для параболического уравнения с двумя свободными границами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 108-122. EDN: HFLTKL. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-108-122.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: E-mail: rasulovms@bk.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-108-122

Research Article

Full text in Russian

MSC 35K20, 35K59, 35R35

Two Free Boundaries Problem for a Parabolic Equation

M. S. Rasulov* [1,2]

[1] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy,
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 100174, Tashkent, University str., 9, Uzbekistan

[2] Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers-National Research University, 100000, Tashkent, Kori Niyazov str., 39, Uzbekistan

Abstract. This paper considers a two-free-boundary Stefan-type problem for a quasi-linear parabolic equation in one dimension. Nonlinear problems with free boundaries are studied using a method based on constructing a priori estimates. Therefore, some initial a priori estimates for the solution to the problem under consideration are first established. The main difficulty in constructing a theory for second-order quasi-linear parabolic equations is obtaining an a priori estimate for the solution's derivative module, and additional arguments are required in problems with a free boundary. To address this, the problem is reduced to a fixed-boundary problem through a change of variables. The resulting problem has time- and space-dependent coefficients with nonlinear terms. Next, Schauder-type a priori estimates are constructed for the equation with nonlinear terms and a fixed boundary. Based on these estimates, the uniqueness of the solution to the problem is proven. Then, the global existence of the solution to the problem is demonstrated using the Leray-Schauder fixed-point theorem.

Key words: quasilinear parabolic equation, free boundary, a priori estimates, existence and uniqueness theorem.

Received: 06.02.2023; Revised: 20.03.2023; Accepted: 25.03.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Rasulov M. S. Two free boundaries problem for a parabolic equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 108-122. EDN: HFLTKL. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-108-122.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: rasulovms@bk.ru

Введение

В настоящее время изучение задач со свободной границей интенсивно ведется с различных сторон (экспериментальных, численных и теоретических), предмет постоянно находит новые основания для приложений, продолжают возникать новые фундаментальные теоретические вопросы. Эти разработки, в частности, требуют новых аналитических и численных методов, а также усовершенствования существующих алгоритмов и инструментов для решения чрезвычайно сложных задач [1–5]. В работах широко изучались новые классы задач Стефана, которые возникают при моделировании природных процессов, включающие уравнения нелинейной диффузии с двумя подвижными границами [6–9]. В [10] изучается задача типа Стефана со свободной границей, моделирующая распространение видов; там изучаются асимптотики, результаты очень хорошие в том смысле, что тип нелинейностей определяет асимптотику, и классификация этих нелинейностей включает много интересных случаев.

Во многих исследованиях термин конвекция является линейным и зависит только от градиента плотности компонентов [5, 7]. Однако в целом на конвекцию также влияет плотность компонентов, что, в свою очередь, приводит к нелинейной конвекции [11–14]. Например, в [14] авторы исследовали задачу со свободной границей для уравнения реакция-диффузия с нелинейным членом конвекции. Они получили результат дихотомии и представили постоянную асимптотическую скорость распространения расширяющегося фронта.

В этой работе рассмотрим краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения с двумя неизвестными границами.

Постановка задачи

Требуется найти функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, h(t) < x < s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$a(u)u_t = du_{xx} + muu_x, \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad h_0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,h(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

где $x = h(t)$ и $x = s(t)$—свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

а). функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(u) \geq a_0 > 0$;

b). d, m, s_0, μ – положительные постоянные;

c). $u_0(x) > 0$, $h_0 < x < s_0$; $h(0) = h_0 = -s_0$, $s(0) = s_0$; $u_0'(h_0) > 0$, $u_0(h_0) = 0$, $u_0'(s_0) < 0$, $u_0(s_0) = 0$; $\lim\limits_{x\to s_0} \frac{u_0(x)}{s_0-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to h_0} \frac{u_0(x)}{x-h_0} = 0$.

Задача (1)-(6) исследована в работе [13] в случае $m = 0$. В работе [15] исследована задача с одной свободной границей для уравнения (1), $m = 0$. А в работе [16] рассмотрена нелокальная задача Стефана.

Априорные оценки

Теорема 1. *Пусть функции* $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ *являются решением задачи* (1)-(6). *Тогда существуют положительные постоянные* M_1, M_2, M_3, *не зависящие от* T, *для которых справедливы оценки*

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad (t,x) \in \overline{D}, \tag{7}$$

$$0 < s'(t) \le M_2, \quad 0 \le t \le T. \tag{8}$$

$$0 < -h'(t) \le M_3, \quad 0 \le t \le T. \tag{9}$$

Доказательство. Из задачи (1)-(6) по принципу максимума получим (7).Область D условно разделим на две части

$$D_1 = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}, \quad D_2 = \{(t,x) : 0 < t \le T, h(t) < x < 0\}.$$

Рассмотрим задачу для $u(t,x)$ в области D_1

$$\begin{cases} a(u)u_t = du_{xx} + muu_x, & (t,x) \in D_1, \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le s_0, \\ u(t,0) > 0, & 0 \le t \le T, \\ u(t,s(t)) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{10}$$

С учетом условий (3) и положительности функции $u(t,x)$ в области D, находим $u_x(t,s(t)) \le 0$. Следовательно, из (5) получим $s'(t) > 0$.

Теперь оценим снизу $u_x(t,s(t))$. Для этого в задаче (10) произведя замену $U(t,x) = u(t,x) + N_1(x - s(t))$ и получим

$$\begin{cases} a(U)U_t - dU_{xx} - muU_x = -(a(U)s'(t) + mu)N_1 < 0, & (t,x) \in D_1, \\ U(0,x) = u_0(x) + N_1(x - s_0), & 0 \le x \le s_0, \\ U(t,0) = u(t,0) - N_1 s(t), & 0 \le t \le T, \\ U(t,s(t)) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases}$$

За счет выбора $N_1 \ge \left\{ \max\limits_x \frac{u_0(x)}{s_0-x}, \frac{M_1}{s_0} \right\}$ всюду в D_1 имеем $U(t,x) \le 0$. Отсюда

$$u(t,x) \le N_1(s(t) - x), \quad 0 \le x \le s(t).$$

Следовательно, $U_x(t,s(t)) = u_x(t,s(t)) + N_1 \ge 0$. Тогда из условия Стефана (5) имеем $s'(t) \le \mu N_1$ в $0 \le t \le T$, откуда следует (8).

А теперь докажем (9). Рассматривается задача

$$\begin{cases} a(u)\,u_t = du_{xx} + muu_x, & (t,x) \in D_2, \\ u(0,x) = u_0(x), & h_0 \le x \le 0, \\ u(t,0) > 0, & 0 \le t \le T, \\ u(t,h(t)) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{11}$$

С учетом условий $u(t,h(t)) = 0$ и (7), находим $u_x(t,h(t)) > 0$. Осталось показать, что $h'(t) \ge -M_3$ для $0 \le t \le T$. Для этого введя функцию

$$V(t,x) = u(t,x) - N_2(x - h(t)) \tag{12}$$

получим задачу

$$\begin{cases} a(V)\,V_t - dV_{xx} - muV_x = (a(V)\,h'(t) + mu)\,N_2, & (t,x) \in D_2, \\ V(0,x) = u_0(x) - N_2(x - h_0), & h_0 \le x \le 0, \\ V(t,0) = u(t,0) + N_2 h(t), & 0 \le t \le T, \\ V(t,h(t)) = 0, & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{13}$$

Так как $h'(t) < 0$, то $a(V)\,V_t - V_{xx} - muV_x < 0$ в D_2. Тем самым функция $V(t,x)$ не может достигать положительного максимума внутри области D_2. Если $N_2 \ge \max\left\{\max\limits_x \frac{u_0(x)}{x-h_0}, \frac{M_1}{-h_0}\right\}$, то легко добиться неположительности $V(t,x)$ на левой границе и в начальной момент времени. Таким образом, $V(t,x)$ неположительна в $\overline{D}_2$. Но тогда $V_x(t,h(t)) \le 0$. Следовательно, с учетом (12) находим $u_x(t,x) \le N_2$, что эквивалентно $h'(t) \le -\mu N_2$. $\square$

Чтобы оценить $|u_x(t,x)|$ преобразуем независимые переменные

$$t = t, \quad y = \frac{2s_0 x}{s(t) - h(t)} - \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)} s_0.$$

Тогда области D соответствует область $Q = \{(t,y) : 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$, а ограниченная функция $v(t,y) = u(t,x)$ является решением задачи

$$v_t = A(t,y,s,h,v)\,v_{yy} + B\left(t,y,s,h,s',h',v_y\right), \quad (t,y) \in Q, \tag{14}$$

$$v(0,y) = v_0(y), \quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{15}$$

$$v(t,s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{16}$$

$$v(t,-s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{17}$$

где $s'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)} v_y(t,s_0)$, $h'(t) = -\frac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)} v_y(t,-s_0)$,

$$A(t,y,s,h,v) = \frac{1}{a(v(t,y))} \frac{4s_0^2}{(s(t) - h(t))^2},$$

$$B\left(t,y,s,h,s',h',v,v_y\right) = \left(\frac{s'(t) - h'(t)}{s(t) - h(t)} y + \frac{s'(t) + h'(t) + 2mv}{s(t) - h(t)} s_0\right) v_y.$$

При условии c). без ограничений общности можно предполагать, что $v_0(x) = 0$.

Теорема 2. *Пусть функция* $v(t,y)$ *непрерывна в* $\overline{Q}$ *вместе с* v_y *и удовлетворяет условиям* (14)-(17). *Тогда*

$$|v_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}, \delta), \quad (t,y) \in Q^\delta. \tag{18}$$

Если $v|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} \equiv 0$, *то для* $(t,y) \in \overline{Q}$

$$|v_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_0), \tag{19}$$

где $A_0 = \min\limits_{\overline{Q}} A$, $Q^\delta = \{(t,y) : 0 < \delta \le t \le T, \delta - s_0 \le y \le \delta + s_0\}$, $\Gamma(t=0, y=\pm s_0)$ — *параболическая граница.*

Так как получены оценки (7)-(9), то пользуясь теоремой 3 [17] доказывается (18) и (19). Для завершения доказательства нам необходимо установить справедливость оценки вплоть до боковых сторон прямоугольника Q.

Так как $v|_{y=\pm s_0} = 0$, поэтому продолжим функцию $v(t,y)$ через боковые стороны прямоугольника Q по правилу

$$v(t,y) = \omega(t, 2s_0 + y), \quad -3s_0 \le y \le -s_0, \tag{20}$$

$$v(t,y) = \omega(t, y - 2s_0), \quad s_0 \le y \le 3s_0. \tag{21}$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения (14) продолжены по y по закону (20), (21). Новая функция (сохраним за ней обозначение $u(t,y)$ во всех точках прямоугольников $R_\pm = \left\{(t,y) : 0 \le t \le T, \left|y \pm \frac{3}{2}s_0\right| \le \frac{3}{2}s_0\right\}$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет продолженному уравнению вида (14) т.е

$$\omega_t = A(t, 2s_0 + y, s(t), h(t), \omega, \omega_y)\,\omega_{yy} + B(t, 2s_0 + y, s(t), h(t), \omega, \omega_y), -3s_0 < y < -s_0,$$

и

$$\omega_t = A(t, y - 2s_0, s(t), h(t), \omega, \omega_y)\,\omega_{yy} + B(t, y - 2s_0, s(t), h(t), \omega, \omega_y), \quad s_0 < y < 3s_0$$

с теми же самыми свойствами, что и в условиях теоремы 2. Используя известные внутренние результаты, получим оценку для $|v_y|$ в прямоугольниках, объединение которых содержит Q. Так как получение внутренних оценок основано на принципе максимума, то утверждения теоремы полностью сохраняются, когда функция $v(t,y)$ непрерывна в Q, имеет непрерывную производную $v_y(t,y)$ и удовлетворяет уравнению (14) в Q всюду за исключением точек конечного числа прямых $y = const$.

Переходим теперь к доказательству оценки $|v(t,y)|_{1+\gamma}^{\overline{Q}}$.

Теорема 3. *Пусть непрерывная в* $\overline{Q}$ *функция* $v(t,y)$ *удовлетворяет условиям задачи* (14)-(17). *Предположим, что ограниченные функции* $A(t,y,s(t),h(t),v)$, $B(t,y,s(t),h(t),v,v_y)$ *для* $(t,y) \in \overline{Q}$, $|v| \le M_1$ *и произвольных* v_y *удовлетворяют условиям*

$$\frac{|B(t,y,s(t),h(t),v,v_y)|}{A(t,y,s(t),h(t),v)} \le K_1\left(v_y^2 + 1\right), \quad K_1 > 0.$$

Кроме того, если $A(t,y,s(t),h(t),\nu) \le A_1$ *в области* $\{(t,y) \in \overline{Q}, |\nu| \le M_1, |\nu_y| \le M_4\}$ *то*

$$|\nu|^{Q^\delta}_{\frac{2}{3}} \le M_5(M_1, M_2, A_1, K_1, \delta).$$

Пусть $\nu(t,y)$ *обладает обобщенными производными* $\nu_{ty}, \nu_{yy} \in L_2(Q)$, *то*

$$|\nu|^{Q^\delta}_{1+\gamma} \le M_6(M_1, A_{11}, K_1, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{22}$$

Если $\nu|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0$, *то оценка* (22) *справедлива и в* $\overline{Q}$.

Доказательство. Так как получена ограниченность $\nu_y(t,y)$, то пользуясь леммой 2 в работы [17] получается оценка (22).

После того как оценены нормы $|\nu_y|^{\overline{Q}}_\gamma$ уравнение (14) можно рассматривать как линейное уравнение

$$\nu_t = \overline{A}(t,y)\nu_{yy} + \overline{B}(t,y)$$

с ограниченными и непрерывными по Гельдеру коэффициентами и использовать для оценок и прочих качественных исследований его решений соответствующие теоремы по линейным уравнениям о линейных уравнениях [18, 19].

Чтобы получить оценку вплоть до границы, как и в утверждении теоремы 2, продолжим $\nu(t,y)$ по правилу (20), (21). Далее, для решения продолженного уравнения имеют место внутренние априорные оценки вида (22), в прямоугольниках, охватывающих прямоугольник Q. При этом применяются результаты работы ([17] теорема 3) по Гельдеровости обобщенного решения. Следовательно, получаем оценку (22). □

А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений [18, 19].

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$\tilde{a}(t,y)\nu_{yy} + \tilde{b}(t,y)\nu_y + \tilde{c}(t,y)\nu - \nu_t = \tilde{f}(t,y), \quad (t,y) \in Q, \tag{23}$$

удовлетворяют условиям Гельдера

$$|\tilde{a}|^{\overline{Q}}_\gamma + |\tilde{b}|^{\overline{Q}}_\gamma + |\tilde{c}|^{\overline{Q}}_\gamma + |\tilde{f}|^{\overline{Q}}_\gamma < \infty, \quad \tilde{a}(t,y) \ge a_0 > 0.$$

Пусть $\nu(t,y)$ *есть решения уравнения* (23) *с* $\nu|_{\Gamma(t=0, y=\pm s_0)} = 0$, $|\nu|^{\overline{Q}}_{2+\gamma} < +\infty$ *и* $M = \max\limits_{\overline{Q}} = |\nu(t,y)|$. *Тогда*

$$|\nu|^{\overline{Q}}_{2+\gamma} \le C\left(|\tilde{f}|^{\overline{Q}}_\gamma + M\right) \equiv M_7. \tag{24}$$

Единственность решения

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [13].

Выводим интегральное представление эквивалентное к (1). Перепишем (1) в виде

$$(\varphi(u))_t = \left(du_x + \frac{m}{2}u^2\right)_x \tag{25}$$

где $\varphi(u) = \int_0^u a(\xi)\, d\xi$.

Интегрируя уравнение (25) по области D с учетом условий (2)-(6) имеем

$$s(t) - h(t) = 2s_0 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \varphi(u_0(\xi))\, d\xi - \int\limits_{h(t)}^{s(t)} \varphi(u(t,\xi))\, d\xi. \tag{26}$$

Здесь для простоты рассмотрен случай $d = m = \mu = 1$.

Теорема 5. *Если справедливы оценки* (7)-(9), (24). *Тогда решение задачи* (1)-(6) *единственно.*

Доказательство. Пусть $(h_1(t), s_1(t), u_1(t,x))$ и $(h_2(t), s_2(t), u_2(t,x))$ являются решениями задачи (1)-(6) и, кроме того,

$$y_1(t) = \min(s_1(t), s_2(t)), \quad z_1(t) = \min(h_1(t), h_2(t)),$$

$$y_2(t) = \max(s_1(t), s_2(t)), \quad z_2(t) = \max(h_1(t), h_2(t)).$$

Тогда, с учетом (26), имеем

$$|s_1(t) - s_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)| \le \int_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)|\, d\xi + \int_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)|\, d\xi + \int_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\, d\xi \tag{27}$$

где $u_i\,(i = 1,2) -$ решения между $y_1(t)$ и $y_2(t)$ (соответственно $z_1(t)$ и $z_2(t)$).

По теореме 1 получаем

$$|u_1(t, y_1(t)) - u_2(t, y_1(t))| \le N_1 |s_1(t) - s_2(t)|$$

и

$$|u_1(t, z_1(t)) - u_2(t, z_1(t))| \le N_2 |h_1(t) - h_2(t)|.$$

Рассмотрим функцию $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Тогда для $U(t,x)$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и задачу

$$\begin{cases} dU_{xx} = b_1(t,x) U_t + b_2(t,x) U_x + b_3(t,x) U, & (t,x) \in D, \\ U(0,x) = 0, & -s_0 \le x \le s_0, \\ U(t, y_1(t)) \le N_1 \max\limits_{0 \le \eta \le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, & t \ge 0, \\ U(t, z_1(t)) \le N_2 \max\limits_{0 \le \eta \le t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|, & t \ge 0, \end{cases}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Отсюда по принципу максимума

$$|U(t,x)| \le N_1 \max_{0 \le \eta \le t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| + N_2 \max_{0 \le \eta \le t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|.$$

В силу ограниченности функций $u(t,x)$, $a(u)$, $a'(u)$ оценим составляющие формулы (27):

$$I_1 = \int\limits_{z_1(t)}^{z_2(t)} |\varphi(u_i)|\,d\xi \leq M_7 |z_2(t) - z_1(t)| \max_{0\leq\eta\leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)| \leq M_7 \max_{0\leq\eta\leq t} |h_1(\eta) - h_2(\eta)|^2,$$

$$I_2 = \int\limits_{y_1(t)}^{y_2(t)} |\varphi(u_i)|\,d\xi \leq M_8 |y_2(t) - y_1(t)| \max_{0\leq\eta\leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)| \leq M_8 \max_{0\leq\eta\leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|^2,$$

$$I_3 = \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\,d\xi,$$

Пусть $A(t_0) = \max\limits_{0\leq t\leq t_0} (|s_1(t) - s_2(t)| + |h_1(t) - h_2(t)|) > 0$. Тогда

$$A(t_0) \leq M_{10} t_0, \quad t_0 < 1$$

где $M_{10} = \max\{M_2, M_3\}$.

При этом находим

$$I_1 \leq M_7 A^2(t_0), \quad I_2 \leq M_8 A^2(t_0), \quad I_3 = \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\,d\xi.$$

Имеем

$$A(t_0) \leq M_{11} A^2(t_0) + \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} |\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|\,d\xi. \tag{28}$$

Далее разделим (28) на $A(t_0)$ и получим

$$1 \leq M_{11} t_0 + \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} \frac{|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)|}{A(t_0)}\,d\xi \leq M_{11} t_0 + M_{12} \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi. \tag{29}$$

Теперь оценим интегральный член

$$\max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(t)}^{y_1(t)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi = \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(t)}^{z_2(0)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi + \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(0)}^{y_1(0)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi$$

$$+ \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{y_1(0)}^{y_1(t)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi \leq \max_{0\leq t\leq t_0} \int\limits_{z_2(0)}^{y_1(0)} \frac{|U(t,\xi)|}{A(t_0)}\,d\xi + M_{13} t_0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} dW_{xx} = b_1(t,x)W_t + b_2(t,x)W_x + b_3(t,x)Z, & 0 < t < t_0, \quad z_2(0) < x < y_1(0), \\ W(0,x) = 0, & z_2(0) \le x \le y_1(0), \\ W(t,y_1(0)) = 1, & 0 \le t \le t_0, \\ W(t,z_2(0)) = 1, & 0 \le t \le t_0. \end{cases}$$

Введем функцию

$$Z(t,x) = \frac{U(t,x)}{A(t_0)} - W(t,x), \quad 0 < t < t_0, \quad z_2(0) < x < y_1(0).$$

Находим

$$\begin{cases} dZ_{xx} = b_1(t,x)Z_t + b_2(t,x)Z_x + b_3(t,x)W, & 0 < t < t_0, \quad z_2(0) < x < y_1(0), \\ Z(0,x) = 0, & z_2(0) \le x \le y_1(0), \\ Z(t,y_1(0)) = \frac{U(t,y_1(0))}{A(t_0)} - W(t,y_1(0)) \le 0, & 0 \le t \le t_0, \\ Z(t,z_2(0)) = \frac{U(t,z_2(0))}{A(t_0)} - W(t,z_2(0)) \le 0, & 0 \le t \le t_0. \end{cases}$$

Отсюда по принципу максимума

$$\frac{U(t,x)}{A(t_0)} \le W(t,x) \le 1, \quad 0 \le t \le t_0.$$

Так как

$$\lim_{t_0 \to 0} W(t_0,x) = 0, \quad z_2(0) \le x \le y_1(0),$$

то

$$\lim_{t_0 \to 0} \int_{z_2(0)}^{y_1(0)} W(t_0,x)\,dx = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t_0 \to 0} \int_{z_2(0)}^{y_1(0)} \frac{|U(t_0,\xi)|}{A(t_0)} d\xi \to 0.$$

Так как правая часть (29) стремится к нулю при $t_0 \to 0$, то при достаточно малых t_0 мы придем к противоречию. Следовательно, $s_1(t) \equiv s_2(t)$, $h_1(t) \equiv h_2(t)$ и далее $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$ для $0 \le t \le t_0$.

Единственность решения задачи для любого $0 < t < \infty$ устанавливается следующим образом.

Пусть $t_1 = \sup\{t : s_1(\eta) = s_2(\eta), h_1(\eta) = h_2(\eta), 0 \le \eta \le t\}$. Если $t_1 = \infty$, то вопрос будет решен. В противном случае, предполагая, что параметр t_1 ограничен и, повторяя выше выполненные выкладки в промежутке $t_1 \le t \le t_1 + \Delta t$, снова придем к противоречию.

Теорема 5 доказана.

Существование решения

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существует в* D *решение* $u(t,x) \in C^{2+\gamma}(\overline{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$, $h(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$ (1)-(6).

Доказательство. Для доказательства существования решения задачи (1)-(6) воспользуемся теоремой Лерэ-Шаудера (см. в [18, 19]).

Рассмотрим эквивалентную задачу к задаче (1)-(6)

$$v_t = A(t,y,s,h,v)\,v_{yy} + B(t,y,s,h,v,v_y), \quad (t,y) \in Q, \tag{30}$$

$$v(0,y) = v_0(y), \quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{31}$$

$$v(t,s_0) = v(t,h_0) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{32}$$

Рассмотрим семейство линейных задач

$$\omega_t = A(t,y,\tau s,\tau h,\tau v)\,\omega_{yy} + B(t,y,\tau s,\tau h,\tau v,\tau v_y), \quad (t,y) \in Q, \tag{33}$$

$$\omega(0,y) = \tau v_0(y), \quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{34}$$

$$\omega(t,s_0) = \omega(t,h_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{35}$$

на определение функции $\omega(t,y)$; функция $v(t,y)$ при этом считается заданной, τ— числовой параметр, $0 \le \tau \le 1$. Обозначим через $H^{1+\beta}$, $\beta \in (0,1)$, банахово пространство функций $v(t,y)$ на Q с нормой $|v| = |v|_{1+\beta}^{Q}$. Существование решения линейной задачи (33)-(35) следует из теоремы 4.

При некоторых ограничениях на функции A и B задача (33)-(35)) определяет в $H^{1+\beta}$ оператор $\mathscr{F}$, который для каждой функции $u \in H^{1+\beta}$ сопоставляет решение v линейной задачи (33)-(35):

$$\omega = \mathscr{F}(v;\tau). \tag{36}$$

Неподвижные точки этого оператора при $\tau = 1$ являются решениями задачи (30)-(32).

Пусть v^{τ}— какая-нибудь из неподвижных точек преобразования $\mathscr{F}$:

$$v^{\tau} = \mathscr{F}(v^{\tau};\tau),$$

т.е v^{τ} есть решение уравнения

$$v_t = A(t,y,\tau s,\tau h,\tau v)\,v_{yy} + B(t,y,\tau s,\tau h,\tau v,\tau v_y), \quad (t,y) \in Q, \tag{37}$$

с граничными условиями (31), (32).

Уравнение (37) обладает тем свойством, что если для уравнения (30) справедливы условия той или иной теоремы из предыдущих пунктов, в которой получена оценка норм, то эти же условия справедливы и для (37) при $0 \le \tau \le 1$.

Так что можем предполагать, что равномерная ограниченность в норме $|v|_{2+\beta}^{Q}$ всех неподвижных точек преобразования $\mathscr{F}(v;\tau)$ установлена. Теперь докажем, что (36) удовлетворяет условиям принципа Лерэ-Шаудера. Установленные выше априорные оценки гарантируют равномерную ограниченность норм ν^{τ} в том пространстве, в котором рассматривается преобразование $\mathscr{F}(\nu;\tau)$.

Теперь докажем, что $\mathscr{F}(\nu;\tau)$ равномерно непрерывна по ν. Возьмем два близких элемента ν_1 и ν_2 из $H^{1+\beta}$ и соответствующие им $\omega_1 = \mathscr{F}(\nu_1;\tau)$, $\omega_2 = \mathscr{F}(\nu_2;\tau)$.

Отсюда для $W(t,y) = \omega_1 - \omega_2$ находим

$$W = A_1(t,y,\tau s_1,\tau h_1,\tau\nu_1)W_{yy} + F \tag{38}$$

где

$$F = (A_1(t,y,\tau s_1,\tau h_1,\tau\nu_1) - A_1(t,y,\tau s_2,\tau h_2,\tau\nu_2))\nu_{2yy}$$
$$+\left(B_1\left(t,y,\tau s_1,\tau h_1,\tau\nu_{1y}\right) - B_2\left(t,y,\tau s_2,\tau h_2,\tau\nu_{2y}\right)\right).$$

Решение уравнения (38) удовлетворяет граничным условиям (34), (34). В силу результата для линейных уравнений

$$|\nu|^{Q}_{2+\beta} \le M_{14}|F|^{Q}_{\beta}.$$

Вследствие (37) $\max\{|A_1|_{\gamma},|F|_{\gamma}\} \le M_{15}$, причем M_{15} зависит лишь от M_6. В силу (34), (35) $W|_{\Gamma(t=0,y=\pm s_0)} = 0$. Очевидно, что $|W| \le N_4|\nu_1-\nu_2|_{1+\gamma}$. Применяя к функции W теорему 5, имеем:

$$|W|_{1+\gamma} \le |W|_{2+\gamma} \le M_{16}|\nu_1-\nu_2|_{1+\gamma}.$$

Аналогично доказывается равномерная непрерывность $\mathscr{F}(\nu;\tau)$ по τ.

Теперь докажем вполне непрерывность оператора $\mathscr{F}(\nu;\tau)$. Для $\nu(t,y)$ с $|\nu|^{Q}_{1+\gamma} \le C$ и $\tau \in [0,1]$ функции $\omega = \mathscr{F}(\nu;\tau)$, как решения задачи (33)-(35), имеют равномерно ограниченные нормы

$$|\omega|^{Q}_{2+\gamma} \le C.$$

В силу равномерной ограниченности $|\omega_{yy}|$ и $|\omega_t|$, в силу леммы 3.1 Гл. II работы [19] для функций ν равномерно ограничены нормы $|\nu_x|^{Q}_{1}$ ($|\nu_x|^{Q}_{1}$ определяется точно так же, как $|\omega_y|^{Q}_{\gamma}$, но с $\gamma = 1$), а множество таких ω компактно в $H^{1+\beta}$, ибо $\beta < 1$ и, следовательно, операторы $\mathscr{F}(\nu;\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, переводят ограниченные в $H^{1+\beta}$ множества в компактные (см. теорему 1.гл.VI. [18]).

То, что при $\tau = 0$ задача (33)-(35) имеет единственное решение, следует из теоремы 4.

Таким образом, при каждом $\tau \in [0,1]$ существует по крайней мере одна неподвижная точка $\nu^{\tau}(t,y)$ для $\mathscr{F}(\nu;\tau)$, которая будет решением задачи (30)-(32) из $C_{2+\gamma}$. □

Заключение

Данная работа посвящена изучению задачи типа Стефана с двумя свободными границами для квазилинейного параболического уравнения. Решение данной задачи имеет важное практическое значение во многих областях, таких как физика, медико-биологии и другие. В работе представлены способы получения априорных оценок типа Шаудера для решения задачи (1)-(6). На основе полученных оценок доказана единственность решения. Глобальное существование решения задачи (1)-(6) показано с помощью теоремы Лера-Шаудера о неподвижной точке.

Список литературы

1. Мейрманов А. М., Гальцев О. В., Гальцева О. А. О существовании классического решения в целом по времени одной задачи со свободной границей, *Сиб. матем. журн.*, 2019. Т. 60, № 2, С. 419-428 DOI: 10.1134/S0037446619020137.
2. Crank J. *Free and Moving Boundary Problem.* Oxford, 1984. 425 pp.
3. Friedman A. Free boundary problems arising in biology, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2016. vol. 1, no. 23, pp. 193-202 DOI: 10.3934/dcdsb.2018013.
4. Gupta S. C. *The Classical Stefan Problem: Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods*: Elservier, 2017. 717 pp.
5. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 2019. vol. 50, pp. 95–112, DOI: 10.1007/s13226-019-0309-8.
6. Du Y., Lin Zh. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, *SIAM J.Math.Anal.*, 2010. vol. 42, pp. 377–405, DOI: 10.1137/090771089.
7. Gu H, Lin Z. G and Lou B. D. Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries, *J. Funct. Anal.*, 2015. vol. 269, pp. 1714-1768, DOI: 0.1016/j.jfa.2015.07.002.
8. Pan H., Ruixiang X., Bei Hu. A free boundary problem with two moving boundaries modeling grain hydration, *Nonlinearity*, 2018. vol. 31, pp. 3591-3616, DOI: 10.1088/1361-6544/aabf04.
9. Rasulov M. S. Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries, *Uzbek Mathematical Journal*, 2019. vol. 2, pp. 89-102, DOI: 10.29229/uzmj.2019-2-11.
10. Du Y., Bendong L. Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries, *J. Eur. Math. Soc.*, 2015. vol. 17, pp. 2673–2724, DOI: 10.4171/JEMS/568.
11. Briozzo A. Tarzia D. A free boundary problem for a diffusion-convection equation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020,. vol. 120, (103394) https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103394..
12. Elmurodov A. N., Rasulov M. S, On a uniqueness of solution for a reaction-diffusion type system with a free boundary,, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022. vol. 8, no. 43, pp. 2099-2106 DOI: 10.1134/S1995080222110087.
13. Takhirov J. O., Rasulov M. S. Problem with free boundary for systems of equations of reaction-diffusion type, *Ukr. Math. J*, 2018. no. 69, pp. 1968–1980 DOI: 10.1007/s11253-018-1481-4.
14. Wang R., Wang L., Wang Zh. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term, *J. Math.Anal.Appl.*, 2018. no. 467, pp. 1233–1257 DOI:10.1016/j.jmaa.2018.07.065.
15. Мейрманов А. *Задача Стефана.* Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
16. Тахиров Ж О., Тураев Р. Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. Т. 60, № 28, С. 8–16 DOI: 10.14498/vsgtu1010.
17. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными, *Тр. ММО.*, 1967. Т. 16, № 4, С. 329-346.
18. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* М.: Мир, 1964. 428 с.
19. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.

References

[1] Meirmanov A. M., Galtsev O. B., Galtseva O.A., The Global-in-Time Existence of a Classical Solution for Some Free Boundary Problem, Sib. Math. J., 2019, **60**, 2, 325-333 DOI: 10.1134/S0037446619020137

[2] Crank J. Free and Moving Boundary Problem. Oxford, 1984. 425.

[3] Friedman A. Free boundary problems arising in biology, Discrete and Continuous Dynamical Systems - B, 2016, **23**, 1, 193-202 DOI: 10.3934/dcdsb.2018013

[4] Gupta S. C. The Classical Stefan Problem: Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods, Elservier, 2017. 717.

[5] Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation in biology, Indian J. Pure Appl. Math., 2019, 50, 95–112. DOI: 10.1007/s13226-019-0309-8

[6] Du Y., Lin Zh. Spreading-vanishing dichotomy in the diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 2010, 42, 377–405, DOI:10.1137/090771089

[7] Gu H, Lin Z. G and Lou B. D. Long time behavior for solutions of Fisher-KPP equation with advection and free boundaries, J. Funct. Anal., 2015, 269, 1714-1768, DOI: 10.1016/j.jfa.2015.07.002

[8] Pan H., Ruixiang X., Bei Hu. A free boundary problem with two moving boundaries modeling grain hydration, Nonlinearity, 2018, 31, 3591-3616.

[9] Rasulov M. S. Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries, Uz. Math. J., 2019, 2, 89-102, DOI: 10.29229/uzmj.2019-2-11

[10] Du Y., Bendong L. Spreading and vanishing in nonlinear diffusion problems with free boundaries, J. Eur. Math. Soc., 2015, 17, 2673–2724, DOI:10.4171/JEMS/568

[11] Briozzo A. Tarzia D. A free boundary problem for a diffusion-convection equation, Inter. J. of Non-Linear Mech., 2020, 120, (103394) DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103394

[12] Elmurodov A. N., Rasulov M. S, On a uniqueness of solution for a reaction-diffusion type system with a free boundary, Lob. Jour. of Math., 2022, **8**, 43, 2099-2106 DOI:10.1134/S1995080222110087

[13] Takhirov J. O., Rasulov M. S. Problem with free boundary for systems of equations of reaction- diffusion type, U. Math. J, 2018, 69, 1968–1980, DOI:10.1007/s11253-018-1481-4

[14] Wang R., Wang L., Wang Zh. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term, J. Math.Anal.Appl., 2018, 467, 1233–1257.

[15] Meirmanov A. M. Zadacha Stefana [Stefan's problem], Nov., Nauka, 1986, 240 (In Russian)

[16] Takhirov J.O., Turayev R. N. Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation, Vest. Sam. gos. texn. un-ta. ser. Fiz.-mat. nauki, 2012, **60**, 28, 8–16 DOI: 10.14498/vsgtu1010 (In Russian)

[17] Krujkov S. N. Nelineyniye parabolicheskie uravneniya s dvumya nezavisimimi peremennimi, Tr. MMO, 1967, **16**, 4. 329-346. (In Russian)

[18] Fridman A. Uravneniya s chastnimi proizvodnimi parabolicheskogo tipa [Partial differential equations of parabolic type]. Moscva, Mir, 1964, 428 (In Russian)

[19] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V.A., Uralseva N.N. Lineynie i kvazilineynie uravneniya parabolicheskogo tip [Linear and quasilinear equations parabolic type]. Mosckva Nauka, 1967, 736 (In Russian)

Информация об авторе

Расулов Мирожиддин Собиржонович ✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0003-0704-6012.

Information about the author

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Tashkent, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0003-0704-6012.