



Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии

Д. Ф. Мингазова*^{1,2}, Р. И. Паровик*^{1,2}

¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Россия, 683032, ул. Пограничная, 4

² Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Россия, 684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, ул. Мирная, 7.

Аннотация. Геоакустическая эмиссия является индикатором напряженно-деформированного состояния геосферы, поэтому она играет важную роль в разработке методики прогнозирования сильных землетрясений в сейсмоактивных регионах, таких как Камчатка. В работе исследуются некоторые аспекты качественного анализа математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии. Математическая модель высокочастотной геоакустической эмиссии представляет собой цепочку из двух связанных осцилляторов, которая описывается системой из двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с непостоянными коэффициентами. Непостоянные коэффициенты обладают свойством непрерывного затухания при больших временах. Каждое дифференциальное уравнение описывает импульс высокочастотной геоакустической эмиссии со своими характеристиками, а взаимодействие между импульсами – обмен энергией осуществляется с помощью коэффициента линейной связи. Для математической модели были исследованы вопросы существования и единственности решения, доказана соответствующая теорема на основе принципа сжимающих отображений из функционального анализа. Исследована устойчивость нулевого решения математической модели геоакустической эмиссии, результаты были сформулированы в виде теоремы, а также исследована устойчивость при больших временах с помощью критерия Рауса-Гурвица. Проведено исследование на жесткость, показано, какие параметры в модели могут влиять на жесткость исследуемой системы дифференциальных уравнений, приведена визуализация исследований зависимости жесткости от времени. С помощью численного метода Розенброка, реализуемого в среде компьютерной математики Maple были построены осциллограммы и фазовые траектории при различных условиях: наличия жесткости, неустойчивости и т.д. Проведена интерпретация результатов исследования и даны направления дальнейшего исследования математической модели высокочастотной геоакустической эмиссии.

Ключевые слова: высокочастотная геоакустическая эмиссия, функция Берлаге, жесткость, существование и единственность, устойчивость, критерий Рауса-Гурвица, математическая модель, осциллограммы.

Получение: 15.03.2023; Исправление: 06.04.2023; Принятие: 11.04.2023; Публикация онлайн: 16.04.2023

Для цитирования. Мингазова Д.Ф., Паровик Р.И. Некоторые аспекты качественного анализа модели высокочастотной геоакустической эмиссии // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. № 1. С. 191-206. EDN: IJLLOM. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206>.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке гранта Президента РФ № МД-758.2022.1.1

Конкурирующие интересы. Конфликт интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: ✉ E-mail: daryamingazova@gmail.com, parovik@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Мингазова Д. Ф., Паровик Р. И., 2023

© ИКИР ДВО РАН, 2023 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Some Aspects of the Qualitative Analysis of the High-Frequency Geoacoustic Emission Model

*D. F. Mingazova**^{1,2}, *R. I. Parovik**^{1,2}

¹ Vitus Bering Kamchatka State University, Russia, 683032, Pogranychnaya st., 4

² Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Russia, 684034, Paratunka, Mirnaya st., 7.

Abstract. Geoacoustic emission is an indicator of the stress-strain state of the geosphere, so it plays an important role in the development of methods for predicting strong earthquakes in seismically active regions such as Kamchatka. The paper investigates some aspects of the qualitative analysis of the mathematical model of high-frequency geoacoustic emission. The mathematical model of high-frequency geoacoustic emission is a chain of two coupled oscillators, which is described by a system of two second-order linear ordinary differential equations with non-constant coefficients. Non-constant coefficients have the property of continuous damping at large times. Each differential equation describes a pulse of high-frequency geoacoustic emission with its own characteristics, and the interaction between pulses - energy exchange is carried out using a linear coupling coefficient. For a mathematical model, the existence and uniqueness of a solution were investigated, and the corresponding theorem was proved based on the contraction mapping principle from functional analysis. The stability of the zero solution of the mathematical model of geoacoustic emission was studied, the results were formulated in the form of a theorem, and the stability at large times was also studied using the Routh-Hurwitz criterion. A study of stiffness was carried out, it was shown which parameters in the model can affect the stiffness of the system of differential equations under study, and visualization of studies of the dependence of stiffness on time is given. Using the Rosenbrock numerical method implemented in the Maple computer mathematics environment, oscillograms and phase trajectories were constructed under various conditions: the presence of rigidity, instability, etc. The results of the study are interpreted and directions for further research of the mathematical model of high-frequency geoacoustic emission are given.

Key words: high-frequency geoacoustic emission, Berlage function, rigidity, existence and uniqueness, stability, Routh-Hurwitz criterion, mathematical model, oscillograms.


Received: 15.03.2023; Revised: 06.04.2023; Accepted: 11.04.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Mingazova D. F., Parovik R. I. Some aspects of the qualitative analysis of the high-frequency geoacoustic emission model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, 42: 1, 191-206. EDN: IJLLOM. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-191-206>.

Funding. The study was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MD-758.2022.1.1

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence:  E-mail: daryamingazova@gmail.com, parovik@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Mingazova D. F., Parovik R. I., 2023

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2023 (original layout, design, compilation)



Введение

Акустическую эмиссию звукового диапазона, возникающую в результате деформаций приповерхностных пород, принято называть геоакустической эмиссией (ГАЭ) [1].

Анализ сигналов геоакустической эмиссии позволяет локализовать очаги разрушения и прогнозировать процесс разрушения горных пород задолго до наступления макроразрушения. Характеристики возбуждаемого импульсного излучения меняются в зависимости от стадии деформационного процесса и свойств среды [2,3]. Зоны ГАЭ в условиях деформационных возмущений исследовались в работе [4]. Так, на основании работы [2], одним из методов описания сейсмических процессов и выявления предвестников землетрясений является исследование высокочастотной (до первых десятков килогерц) ГАЭ. Фрагмент такого сигнала приведен на рис. 1.

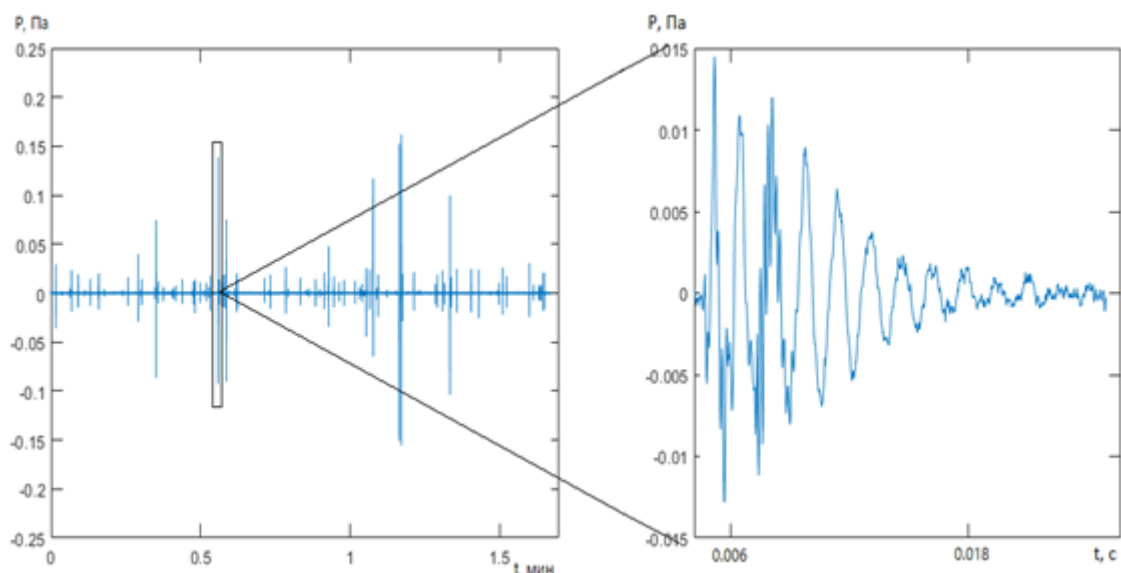


Рис. 1. Фрагмент сигнала высокочастотной геоакустической эмиссии
[Figure 1. Fragment of high-frequency geoaoustic emission signal]

В работах [5,6] был использован подход, который был основан на построении математической модели высокочастотной ГАЭ, которая представляла собой систему из двух связанных линейных осцилляторов. Каждый осциллятор описывает дислокационный источник геоакустической эмиссии. Взаимодействие между источниками в модели осуществляется только через излучение. Численным методом Розенброка в среде компьютерной математики Maple были найдены численные решения модели ГАЭ при различных значениях коэффициента связи между источниками, построены расчетные осциллограммы, спектры и фазовые траектории.

В настоящей статье мы будем дальше продолжать исследовать качественные свойства решения математической модели высокочастотной ГАЭ, предложенную

в работе [5]. Сначала мы исследуем вопросы существования и единственности решения, которые будут опираться на методы функционального анализа. Далее рассмотрим вопросы устойчивости нулевого решения, а также жесткость исследуемой задачи.

Постановка задачи

Импульсы сигнала геоакустической эмиссии обладают схожей структурой с функциями Берлаге [7] и задаются выражением

$$g(t) = At^{n(p_{\max})\Delta} \exp\left(-\frac{n(p_{\max})\Delta}{p_{\max}t_{\text{end}}}t\right) \sin(2\pi ft + \varphi_0), \quad (1)$$

$$n = \frac{\ln 20}{1/p_{\max} - \ln 1/p_{\max} - 1}, t \in [0, t_{\text{end}}].$$

где $A > 0$ — амплитуда импульса; $n > 0$ — параметр, отвечает за форму огибающей, p_{\max} — положение максимума; Δ — крутизна огибающей; t — время, t_{end} — длительность импульса; f — частота заполнения; φ_0 — начальная фаза.

Можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Функция Берлаге (1) является решением на отрезке $t \in [t_0, T]$, где $t_0 \neq 0, T > 0$ следующей задачи Коши:*

$$\begin{cases} \ddot{g}(t) = \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) \dot{g}(t) - \left(\frac{a}{t^2} + c^2\right) g(t) + \left(\frac{a}{t} - \frac{a}{b}\right) Act^a \exp\left(-\frac{a}{b}t\right) \cos(ct + \varphi_0), \\ g(t_0) = Act_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \sin(ct_0 + \varphi_0), \\ \dot{g}(t_0) = \left(\frac{a}{t_0} - \frac{a}{b}\right) g(t_0) + Act_0^a \exp\left(-\frac{a}{b}t_0\right) \cos(ct_0 + \varphi_0) \end{cases} \quad (2)$$

где $a = n(p_{\max})\Delta, b = p_{\max}t_{\text{end}}, c = 2\pi f$.

Замечание 1. Уравнение (2) представляет собой уравнение осциллятора с трением и внешней силой, причем его коэффициенты являются затухающими.

Замечание 2. Задача Коши (2) описывает один импульс, которому соответствует один дислокационный источник [5]. Для описания двух дислокационных источников необходимо рассматривать уже систему из двух дифференциальных уравнений типа (2).

Пусть два дислокационных источника между собой линейно взаимодействуют. Тогда рассмотрим следующую задачу Коши для двух связанных осцилляторов вида:

$$\begin{cases} \ddot{g}_1(t) = \alpha_1(t) \dot{g}_1(t) - \beta_1(t) g_1(t) + \alpha_1(t) \gamma_1(t) + k_1 g_2(t) \\ \ddot{g}_2(t) = \alpha_2(t) \dot{g}_2(t) - \beta_2(t) g_2(t) + \alpha_2(t) \gamma_2(t) + k_2 g_1(t) \\ g_1(t_0) = \gamma_1(t_0) \tan(c_1 t_0 + \varphi_{01}), g_2(t_0) = \gamma_2(t_0) \tan(c_2 t_0 + \varphi_{02}) \\ \dot{g}_1(t_0) = \alpha_1(t_0) g_1(t_0) + c_1 \gamma_1(t_0), \dot{g}_2(t_0) = \alpha_2(t_0) g_2(t_0) + c_2 \gamma_2(t_0) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь коэффициенты системы (3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= \frac{a_1}{t} - \frac{a_1}{b_1}, \beta_1(t) = \frac{a_1}{t^2} + c_1^2, \alpha_2(t) = \frac{a_2}{t} - \frac{a_2}{b_2}, \beta_2(t) = \frac{a_2}{t^2} + c_2^2, \\ \gamma_1(t) &= A_1 c_1 t^{a_1} \exp\left(-\frac{a_1}{b_1} t\right) \cos(c_1 t + \varphi_0), \\ \gamma_2(t) &= A_2 c_2 t^{a_2} \exp\left(-\frac{a_2}{b_2} t\right) \cos(c_2 t + \varphi_0),\end{aligned}\quad (4)$$

Замечание 3. Коэффициенты (4) являются затухающими при больших временах $t \rightarrow \infty$. Действительно можно заметить, что существуют следующие пределы:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_1(t) &= -\frac{a_1}{b_1}, \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_2(t) = -\frac{a_2}{b_2}, \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_1(t) = c_1^2, \lim_{t \rightarrow \infty} \beta_2(t) = c_2^2, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_1(t) &= 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_2(t) = 0\end{aligned}$$

Существование и единственность решения

Для того, чтобы найти решение (3) хотя бы приближенно, надо знать, что оно существует и при данном начальном условии единственно. Для формулировки условия существования и единственности решения задачи (3) перепишем ее в матричном виде.

Для этого сначала представим систему (3) в виде:

$$\begin{cases} \dot{g}_1(t) = z_1(t), \\ \dot{z}_1(t) = \alpha_1(t) z_1(t) - \beta_1(t) g_1(t) + \alpha_1(t) \gamma_1(t) + k_1 g_2(t), \\ \dot{g}_2(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = \alpha_2(t) z_2(t) - \beta_2(t) g_2(t) + \alpha_2(t) \gamma_2(t) + k_2 g_1(t) \\ g_1(t_0) = \gamma_1(t_0) \tan(c_1 t_0 + \varphi_{01}), g_2(t_0) = \gamma_2(t_0) \tan(c_2 t_0 + \varphi_{02}) \\ z_1(t_0) = \alpha_1(t_0) g_1(t_0) + c_1 \gamma_1(t_0), z_2(t_0) = \alpha_2(t_0) g_2(t_0) + c_2 \gamma_2(t_0) \end{cases}$$

или

$$\dot{V}(t) = M(t)V(t) + F(t), V(t_0) = V_0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{g}_1(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{g}_2(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix}, M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1(t) & \alpha_1(t) & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & -\beta_2(t) & \alpha_2(t) \end{pmatrix}, \\ V(t) &= \begin{pmatrix} g_1(t) \\ z_1(t) \\ g_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} g_1(t_0) \\ z_1(t_0) \\ g_2(t_0) \\ z_2(t_0) \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1(t) \gamma_1(t) \\ 0 \\ \alpha_2(t) \gamma_2(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть матрица и вектор-функция $F(t)$ (5) непрерывны для $\forall t \in [t_0, T]$. Тогда для $\forall \begin{pmatrix} t_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \in G \subseteq E^5$, существует единственное решение задачи Коши (5).

Доказательство. В силу того, что матрица $M(t)$ и вектор-функция $F(t)$ непрерывны, то задача Коши (5) эквивалентна матричному уравнению

$$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^t M(\tau) V(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau \quad (6)$$

Введем в (6) обозначение $H(t) = V_0 + \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau$ — непрерывная вектор-функция на $[t_0, T]$.

Пусть $C(B, [t_0, T])$ — банахово пространство непрерывных на $[t_0, T]$ функций, принимающих значение B с нормой $\|V(t)\| = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{1 \leq i \leq 4} |V(t)|$. Рассмотрим в этом пространстве оператор S :

$$(SV)(t) = H(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) V(\tau) d\tau \quad (7)$$

Оператор (7) переводит пространство $(B, [t_0, T])$ в себя, так как он является непрерывным на отрезке $[t_0, T]$. Заметим, что

$$(S^2V)(t) = H(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) H(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t M(t_2) \int_{t_0}^{t_2} M(t_1) V(t_1) dt_1 dt_2$$

$$\begin{aligned} (S^n V)(t) &= H(t) + \int_{t_0}^t M(\tau) H(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_2} M(t_2) M(t_1) V(t_1) dt_1 dt_2 + \dots \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_{n-1}} \dots \int_{t_0}^{t_2} M(t_{n-1}) M(t_{n-2}) \dots M(t_1) H(t_1) dt_1 \dots dt_{n-1} \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_2} M(t_n) M(t_{n-1}) \dots M(t_1) V(t_1) dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Составим разность

$$(S^n V_2)(t) - (S^n V_1)(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_2} M(t_n) M(t_{n-1}) \dots M(t_1) (V_2(t_1) - V_1(t_1)) dt_1 \dots dt_n.$$

Перейдем к нормам

$$\|(S^n V_2)(t) - (S^n V_1)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_2} M(t_n) M(t_{n-1}) \dots M(t_1) (V_2(t_1) - V_1(t_1)) dt_1 \dots dt_n \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_2} \|M(t_n)\| \|M(t_{n-1})\| \dots \|M(t_1)\| \|V_2(t_1) - V_1(t_1)\| dt_1 \dots dt_n \leq \sup_{t \in [t_0, T]} |V_2(t_1) - V_1(t_1)| \times \\
& \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_2} \|M(t_n)\| \|M(t_{n-1})\| \dots \|M(t_1)\| dt_1 \dots dt_n = \frac{\|V_2(t_1) - V_1(t_1)\|}{n!} \times \\
& \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \|M(t_n)\| \|M(t_{n-1})\| \dots \|M(t_1)\| dt_1 \dots dt_n \\
& = \frac{\|V_2(t_1) - V_1(t_1)\|}{n!} \left(\int_{t_0}^t \|M(\tau)\| d\tau \right)^n, \|M(t)\| = \max_{t \in [t_0, T]} \max_{1 \leq i \leq 4} |m_{i,j}|.
\end{aligned}$$

При конечном T величина $\int_{t_0}^T \|M(\tau)\| d\tau$ ограничена, тогда при больших значениях n

$$\frac{1}{n!} \left(\int_{t_0}^T \|M(\tau)\| d\tau \right)^n = q < 1.$$

Тогда выполнено условие

$$\|(S^n V_2)(t) - (S^n V_1)(t)\| \leq q \|V_2(t) - V_1(t)\|,$$

и оператор S^n является сжимающим. Поэтому задача Коши имеет единственное решение на отрезке $[t_0, T]$. Теорема доказана. \square

Устойчивость решения

Определение 1. Устойчивость решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения — его свойство притягивать к себе другие решения при условии достаточной близости их начальных данных. Рассмотрим устойчивость решения задачи (5). Известно, что устойчивость задачи (5) связана с устойчивостью следующей задачи Коши.

$$\dot{V}(t) = M(t)V(t), V(t_0) = V_0 \quad (8)$$

Пусть $M(t)$ и $P(t) = \int_t^{t_0} M(\tau) d\tau$ коммутируют, т.е. $M(t)P(t) = P(t)M(t)$. Тогда решение задачи (8) можно записать в виде:

$$V(t) = V_0 \exp \left(\int_{t_0}^t M(\tau) d\tau \right).$$

Обозначим $\lambda = \max \operatorname{Re} \sigma(P)$, где $\sigma(P)$ спектр оператора, который определяется соотношением: $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)/t$. Пусть $\lambda < 0$. Тогда возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, такое что $\lambda + \varepsilon < 0$ и следуя теории пределов найдется такое T , что при $t \geq T$ выполнено:

$$\left\| \frac{1}{t-t_0} P(t) - P \right\| < \varepsilon.$$

Поэтому, если $M(t)$ и $P(t)$ коммутируют, то мы можем получить следующую оценку решения задачи (8)

$$\|V(t)\| = \left\| V_0 e^{\int_{t_0}^t M(\tau) d\tau} \right\| \leq \|V_0\| \left\| e^{\int_{t_0}^t M(\tau) d\tau} \right\| = \|V_0\| \left\| e^{P(t-t_0)} e^{\int_{t_0}^t M(\tau) d\tau - P(t-t_0)} \right\| \leq$$

$$\|V_0\| \left\| e^{P(t-t_0)} \right\| e^{\left\| \int_{t_0}^t M(\tau) d\tau - P(t-t_0) \right\|} \leq N e^{\lambda(t-t_0)} e^{\varepsilon(t-t_0)} \|V_0\| \leq N e^{(\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \|V_0\|.$$

В силу того, что $\lambda + \varepsilon < 0$, то при $t \rightarrow \infty$, $\|V(t)\| \rightarrow 0$. Поэтому выбрав норму $\|V_0\|$ достаточно малой, можно получить, что $\|V(t)\| \leq \varepsilon$ для $\forall t$.

Теорема 3. *Решение задачи (8) асимптотически устойчиво, если операторы $M(t)$ и $P(t)$ коммутируют и существует оператор $P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)/t$, спектр которого расположен в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной ($\lambda = \max \operatorname{Re} \sigma(P) < 0$).*

Устойчивость нулевого решения при $t \rightarrow \infty$. Рассмотрим матрицу $M(t)$ в случае, когда $t \rightarrow \infty$. Тогда характеристическое уравнение для собственных значений матрицы будет иметь вид:

$$\lambda^4 + (-\alpha_1 - \alpha_2)\lambda^3 + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)\lambda^2 + (-\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda + \beta_1\beta_2 - k_2k_1 = 0 \quad (9)$$

Замечание 4. Заметим, что для того, чтобы нулевое решение системы (3) было устойчивым необходимо, чтобы действительные части корней характеристического уравнения были отрицательными.

Необходимое условие отрицательности всех действительных частей корней характеристического уравнения определяется положительностью его коэффициентов.

Из характеристического уравнения (9) с учетом Замечания 3 необходимое условие выполняется, если выполняется неравенство $\beta_1\beta_2 > k_1k_2$. Однако это условие не является достаточным. Рассмотрим критерий Рауса-Гурвица. Для этого составим матрицу Гурвица из коэффициентов уравнения (9):

$$H = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 \\ 0 & \beta_1\beta_2 - k_1k_2 & -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1\beta_2 - k_1k_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Для отрицательности все действительных частей корней уравнения (9) необходимо и достаточно чтобы были все положительными главные миноры $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, 4$ матрицы Гурвица (10). Пусть выполнено неравенство $\beta_1\beta_2 > k_1k_2$.

$$\Delta_1 = [-\alpha_1 - \alpha_2],$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 \\ -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 & 0 \\ -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & -\alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 & \beta_1\beta_2 - k_1k_2 & -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 & -\alpha_1 - \alpha_2 & 1 \\ 0 & \beta_1\beta_2 - k_1k_2 & -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1\beta_2 - k_1k_2 \end{bmatrix}.$$

Главный минор первого порядка: $\Delta_1 > 0$ в силу того, что $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ следуя Замечанию 3.

Главный минор второго порядка с учетом $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ (Замечание 3):

$$\Delta_2 = -\alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_1) - \alpha_2\beta_2 > 0.$$

Главный минор третьего порядка:

$$\Delta_3 = \alpha_1^3\alpha_2\beta_2 + ((\beta_1 + \beta_2)\alpha_2^2 + k_1k_2)\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_1\left(\frac{1}{2}\beta_1\alpha_2^2 + k_1k_2 + \frac{1}{2}\beta_1^2 - \beta_1\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2\right) + \alpha_2^2k_1k_2 > 0.$$

Последнее неравенство следует из неравенств: $\beta_1\beta_2 > k_1k_2, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0, \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$.

Главный минор четвертого порядка:

$$\Delta_4 = (\beta_1\beta_2 - k_1k_2)\Delta_3 > 0.$$

Исходя из выше сказанного, можно сформировать следующую теорему.

Теорема 4. *Решение системы (3) при $t \rightarrow \infty$ является асимптотически устойчивым, если выполнено условие $\beta_1\beta_2 > k_1k_2$.*

Исследование жесткости системы

Свойство жесткости возникает, когда искомое решение носит гладкий характер, т.е. медленно меняется, в то время как малые возмущения, которые порождаются погрешностями вычислений, быстро затухают.

Определение 2. Система дифференциальных уравнений (4) называется жесткой если все собственные значения матрицы $M(t)$ имеют отрицательные действительные части и выполнено условие

$$S(t) = \frac{\max_{1 \leq k \leq 4} (\operatorname{Re}|\lambda_k(t)|)}{\min_{1 \leq k \leq 4} (\operatorname{Re}|\lambda_k(t)|)} \gg 1, \quad (11)$$

где $S(t)$ — функция жесткости.

Замечание 5. При больших временах $t \rightarrow \infty$ функция жесткости (11) переходит в число жесткости: $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S$.

Рассмотрим случай, когда $t \rightarrow \infty$. С учетом Замечания 3 элементы матрицы (t) уже не зависят от времени t. Будем считать, что выполнено неравенство $\beta_1 \beta_2 > k_1 k_2$. Отметим, что это неравенство гарантирует отрицательность действительных частей корней характеристического уравнения (9) (Теорема 4). Мы приходим к характеристическому уравнению (9).

Вычислим числа жесткости S в случае, когда значения параметров a_1 или a_2 значительно велики. Значения параметров выберем [8]:

$$a_1 = 1.38 \cdot 10^3, a_2 = 3.18, b_1 = 0.0046, b_2 = 0.00795, c_1 = c_2 = 6283.19, k_1 = k_2 = 2 \cdot 10^6, \\ \beta_1 = \beta_2 = 3.947847658 \cdot 10^7, \alpha_1 = -300, \alpha_2 = -400.$$

Корни характеристического уравнения (9) имеют вид:

$$\lambda_1 = -299868.347,$$

$$\lambda_2 = -200.169 + 6280.011i,$$

$$\lambda_3 = -200.169 - 6280.011i,$$

$$\lambda_4 = -131.314.$$

Используя соотношение (11), получаем, что число жесткости $S = 2283.5914$.

Аналогично, если мы, например, увеличим $a_2 = 3.18 \cdot 10^3$ и $a_1 = 1.38$, а значения остальных параметров оставим без изменения: $S = 4061.272$. Здесь мы видим высокие значения числа жесткости, что указывает на то, что система является жесткой при больших временах.

Из соотношений (4) мы можем увидеть, что в коэффициентах, в их знаменателях находятся параметры a_1 и b_2 . Поэтому рассмотрим случай, когда значения этих параметров значительно меньше. В частности, рассмотрим случай, когда $b_1 = 0.0046 \cdot 10^{-3}$ и $a_1 = 1.38$, $a_2 = 3.18$, остальные значения параметров оставим без изменения. Вычислим число жесткости: $S = 2283.59$. Рассмотрим, случай когда $b_2 = 0.00795 \cdot 10^{-3}$ и $b_1 = 0.0046$, остальные значения параметров оставим без изменения. Число жесткости: $S = 4061.27$.

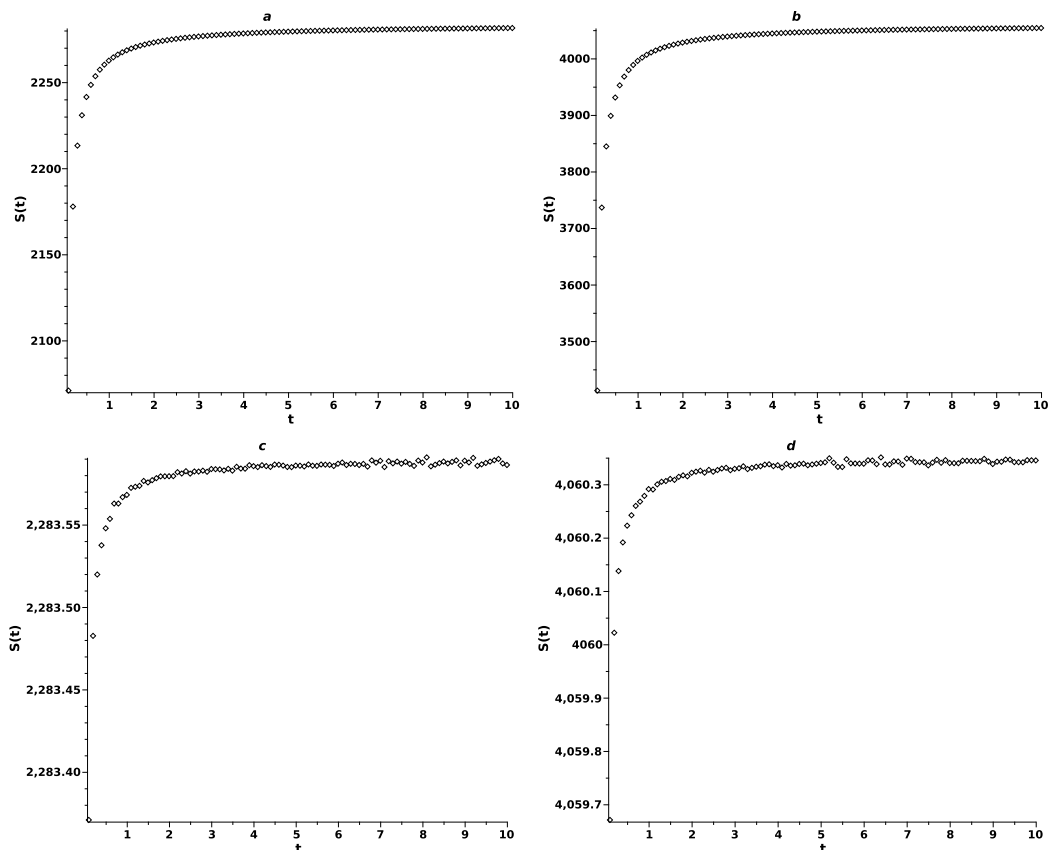


Рис. 2. Функция жесткости $S(t)$: а) при $\alpha_1 = 1.38 \cdot 10^3$; б) при $\alpha_2 = 3.18 \cdot 10^3$; в) $b_1 = 0.0046 \cdot 10^{-3}$; д) $b_2 = 0.00795 \cdot 10^{-3}$
 [Figure 2. Stiffness function $S(t)$: а) for $\alpha_1 = 1.38 \cdot 10^3$; б) for $\alpha_2 = 3.18 \cdot 10^3$; в) $b_1 = 0.0046 \cdot 10^{-3}$; д) $b_2 = 0.00795 \cdot 10^{-3}$]

Можно сделать вывод, что на жесткость системы (5) при $t \rightarrow \infty$ влияют не только большие значения параметров и α_2 , но и также более маленькие значения параметров b_1 и b_2 . В общем случае на интервале $t \in [0.1, 10]$ были получены графики функции жесткости $S(t)$ (рис.2).

Из рис. 2 мы видим, что увеличение времени приводит к большим значениям функции жесткости $S(t)$. Кроме того можно заметить, что выполняется: $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 2283.5914$ (рис. 2а и 2с) и $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 4061.27$ (рис. 2б и 2д), что согласуется с исследованиями жесткости при $t \rightarrow \infty$. Построим осциллограммы для случаев жесткости, когда $\alpha_1 = 1.38 \cdot 10^3$ и $\alpha_2 = 3.18 \cdot 10^3$. Расчет осциллограмм производился с помощью численного метода Розенброка в среде компьютерной математики Maple.

Замечание 6. Заметим, что жесткость системы не зависит от больших значений коэффициентов взаимодействия k_1 и k_2 дислокационных источников. Это связано с выполнением условия $\beta_1 \beta_2 > k_1 k_2$.

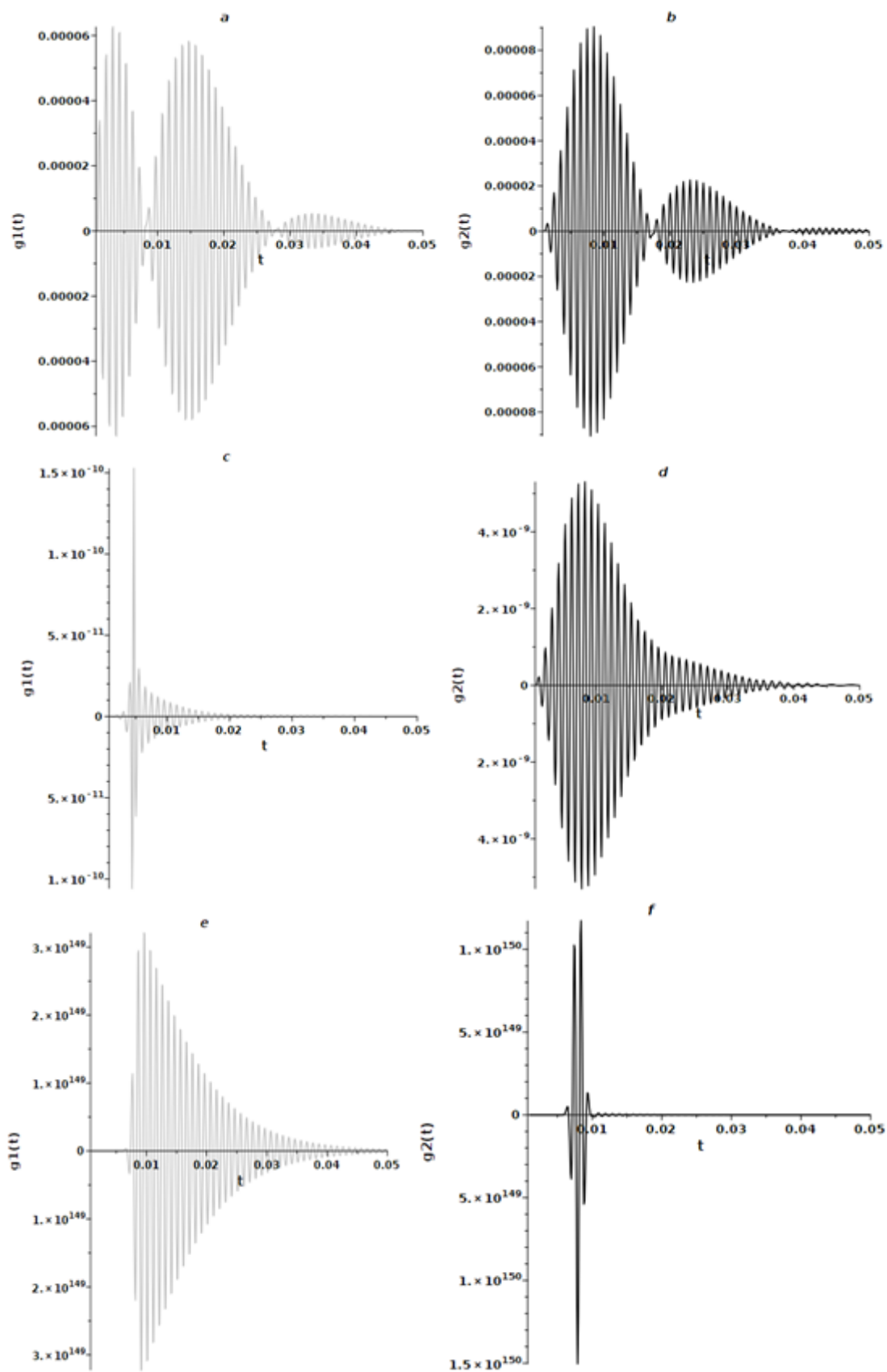


Рис. 3. Осциллограммы а) и б) жесткость отсутствует; с) и д) жесткость при $\alpha_1 = 1.38 \cdot 10^3$; е) и ф) жесткость при $\alpha_2 = 3.18 \cdot 10^3$
 [Figure 3. Oscillograms a) and b) no stiffness; c) and d) stiffness at $\alpha_1 = 1.38 \cdot 10^3$; e) and f) stiffness at $\alpha_2 = 3.18 \cdot 10^3$]

На рис. 3 мы видим, как отличаются осциллограммы, построенные для не жесткой системы (3) (рис. 3а,б) от осциллограмм, полученных в случаях наличия жесткости в системе (3) (рис. 3с,д и рис. 3е,ф). Эти отличия характеризуются различными формами модельных сигналов, их аномально большими или маленькими значениями амплитуд.

Заключение

В работе проведен качественный анализ решения математической модели высокочастотной ГАЭ, которая представляет собой задачу Коши. В работе было дано обоснование существования и единственности решения задачи Коши (3) на отрезке $[t_0, T]$. Исследована устойчивость нулевого решения динамической системы (3), а также исследована ее устойчивость при больших временах с помощью критерия Рауса-Гурвица. Проведено исследование свойства жесткости системы (3), в результате которого выявлено показано, что дифференциальных уравнений, приведена визуализация исследований зависимости жесткости от времени. Построены осциллограммы в случае отсутствия жесткости в системе (3), а также при ее наличии. Показано, что свойство жесткости не зависит от больших значений коэффициента взаимодействия между дислокационными источниками.

Необходимо отметить, что математическая модель высокочастотной ГАЭ может быть развита. Например, система может быть обобщена на случай более чем двух дислокационных источников. Другое продолжение исследования системы (3) связано с рассмотрением нелинейных уравнений как в работе [9]. Как вариант, можно учитывать нелинейное взаимодействие между дислокационными источниками. Еще одно продолжение связано с учетом наличия эффектов памяти в динамической системе (3). Это в свою очередь приводит нас к понятию производной дробного порядка. Осцилляторы с производными дробных порядков называются дробными осцилляторами, и они могут быть исследованы по аналогии с работами [10,11].

Список литературы

1. Марапулец Ю.В., Шевцов Б.М. *Мезомасштабная акустическая эмиссия*. Владивосток: Дальнаука. 126 с.
2. Марапулец Ю.В., Тристанов А.Б. Применение метода разреженной аппроксимации в задачах анализа сигналов геоакустической эмиссии, *Цифровая обработка сигналов*, 2011. №2, С. 13-17.
3. Марапулец Ю.В., Ларионов И.А., Мищенко М.А., Щербина А.О., Солодчук А.А., Шевцов Б.М. Отклик высокочастотной геоакустической эмиссии на активизацию пластических процессов в сейсмоактивном регионе, *Ученые записки физического факультета*, 2014. №6, 146311.
4. Водинчар Г.М., Пережогин А.С., Сагитова Р.Н., Шевцов Б.М. Моделирование зон геоакустической эмиссии, *Математическое моделирование*, 2007. Т. 19,, № 11, С. 59-63.
5. Гапеев М.И., Солодчук А.А., Паровик Р.И. Связанные осцилляторы как модель высокочастотной геоакустической эмиссии, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 40, № 3, С. 88-100 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100.
6. Гапеев М.И., Паровик Р.И., Солодчук А.А. Математическая модель высокочастотной геоакустической эмиссии на основе связанных осцилляторов / *Уфимская осенняя математическая школа - 2022*, Материалы международной научной конференции, Уфа, 28

сентября – 01 2022 года, Т. 2. Уфа, РИЦ БашГУ, 2022, С. 322-324 DOI:10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.120.

7. Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals / *Conf. proc. of SPA-2019*. Poznan, IEEE, pp. 256–260 DOI:10.23919/SPA.2019.8936817.
8. Сенкевич Ю.И., Луковенкова О.О., Солодчук А.А. Методика формирования Реестра геофизических сигналов на примере сигналов геоакустической эмиссии, *Геосистемы переходных зон*, 2018. Т. 2, № 4, С. 409-418.
9. Крылов В. В., Ланда П. С., Робсман В. А. Модель развития акустической эмиссии как хаотизация переходных процессов в связанных нелинейных осцилляторах, *Акустический журнал*, 1993. Т. 39, № 1, С. 108-122.
10. Parovik R.I. Mathematical Models of Oscillators with Memory / *Oscillators — Recent Developments*. London, InTech, 2019, pp. 3-21 DOI: 10.5772/intechopen.81858..
11. Parovik R.I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums, *International journal of communications, network and system sciences*, 2013. vol. 6, no. 3, pp. 134-138 DOI:10.4236/ijcns.2013.63016..

Информация об авторах



Мингазова Дарья Фаритовна ✉ – магистрант Прикладной математики и информатики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия; программист лаборатории акустических исследований, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия
✉ <https://orcid.org/0009-0008-6512-4537>.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий международной интегративной научно-исследовательской лаборатории экстремальных явлений Камчатки, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия; ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия
✉ <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>

References

- [1] Marapulets Yu. V., Shevtsov B. M. Mezomasshtabnaya akusticheskaya emissiya [Mesoscale acoustic emission]. Vladivostok, Dalnauka, 126 (In Russian).
- [2] Marapulets Yu. V., Tristanov A. B. Using the sparse approximation method for the problems of geoacoustic emission analysis, *Tsifrovaya obrabotka signalov*, 2011, 2, 13-17 (In Russian).
- [3] Marapulets Yu. V., Larionov I. A., Mishchenko M. A., Shcherbina A. O., Solodchuk A. A., Shevtsov B. M. The response of high-frequency geoacoustic emission on activation of plastic processes in a seismically active region, *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakul'teta*. 2014, 6, 146311 (In Russian).
- [4] Vodinchar G. M., Perezhugin A. S., Sagitova R. N., Shevtsov B. M. Modeling geoacoustic emission zones, *Mathematical Modeling*, 2007, 19, 11, 59-63 (In Russian).
- [5] Gapeyev M. I., Solodchuk A. A., Parovik R. I. Coupled oscillators as a model of high-frequency geoacoustic emission, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2022, 40, 3, 88-100, DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-88-100 (In Russian).
- [6] Gapeyev M. I., Parovik R. I., Solodchuk A. A. Matematicheskaya model' vysokochastotnoy geoakusticheskoy emissii na osnove svyazannykh ostillyatorov, *Ufimskaya osennyyaya matematicheskaya shkola - 2022: Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, Ufa, 28 sentyabrya, 01 2022 goda. Tom 2, Ufa, RITS BashGU, 2022, 322-324. DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2022-09-28.120. (In Russian).
- [7] Tristanov A., Lukovenkova O., Marapulets Yu., Kim A. Improvement of methods for sparse model identification of pulsed geophysical signals, *Conf. proc. of SPA-2019. Poznanm, IEEE*, 256–260, DOI: 10.23919/SPA.2019.8936817.
- [8] Senkevich Yu. I., Lukovenkova O. O., Solodchuk A. A. Methodology for the formation of the Register of geophysical signals on the example of geoacoustic emission signals, *Geosistemy perekhodnykh zon*, 2018, 2, 4, 409-418 (In Russian).
- [9] Krylov V. V., Landa P. S., Robsman V. A. A model for the development of acoustic emission as a chaotization of transient processes in coupled nonlinear oscillators, *Akusticheskiy zhurnal*, 1993, 39, 1, 108-122.
- [10] Parovik R. I. *Mathematical Models of Oscillators with Memory, Oscillators -Recent Developments*, London, InTech, 2019, 3-21. DOI: 10.5772/intechopen.81858.
- [11] Parovik R. I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums, *International journal of communications, network and system sciences*, 2013, 6, 3. 134-138. DOI:10.4236/ijcns.2013.63016.

Information about authors



Mingazova Daria Faritovna✉ – Master’s student in Applied Mathematics and Informatics, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia; programmer, Laboratory of Acoustic Research, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Paratunka, Russia,
📄 <https://orcid.org/0009-0008-6512-4537>.



Parovik Roman Ivanovich✉ – D.Sci. (Math. & Phys.), Associate Professor, Head of the International Integrative Research Laboratory of Extreme Phenomena of Kamchatka, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia; Leading Researcher, Laboratory for Simulation of Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, p. Paratunka, Russia,
📄 <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>.