МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.91

Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом

М. Г. Мажгихова*

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино – Балкарский научный центр РАН», 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

Аннотация. Последние десятилетия количество работ, посвященных исследованию задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, заметно растет. Интерес исследователей вызван тем, что количество областей науки, в которых используются уравнения, содержащие дробные производные, варьируется от биологии и медицины до теории управления, инженерии, финансов, а также оптики, физики и так далее. Включение запаздывания в уравнение дробного порядка существенно влияет на ход процесса, описываемого этим уравнением, так как неизвестная функция задается при различных значениях аргумента, что вносит эффект предыстории в уравнение. Поэтому, математические модели, содержащие дробный оператор и запаздывающий аргумент, более точны, чем модели, содержащие производные целого порядка. В данной работе исследуется задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, обобщающим известные дробные операторы Римана – Лиувилля и Герасимова – Капуто. Результаты работы получены с использованием методов теории целого и дробного исчислений, методов теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, метода специальных функций. В работе доказывается теорема о справедливости аналога формулы Лагранжа. Также доказано, что специальная функция $W_{\gamma_m}(t)$, которая, в свою очередь, определяется через обобщенную функцию Миттаг – Леффлера (или функция Прабхакара), удовлетворяет уравнению и условиям, сопряженным исследуемому, и является фундаментальным решением рассматриваемого уравнения. Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи. Решение поставленной задачи выписано в терминах специальной функции $W_{\nu}(t)$.

Ключевые слова: Производная Джрбашяна – Нерсесяна, уравнение дробного порядка, уравнение с запаздывающим аргументом, формула Лагранжа, фундаментальное решение, обобщенная функция Миттаг – Леффлера.

Получение: 20.12.2022; Исправление: 21.03.2023; Принятие: 24.03.2023; Публикация онлайн: 16.04.2023

Для цитирования. Мажгихова М. Г. Задача Коши для уравнения с дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2023. Т. 42. № 1. C. 98-107. EDN: DMUMKE. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107
Research Article
Full text in Russian
MSC 34A12, 34K09

The Cauchy Problem for the Delay Differential Equation with Dzhrbashyan – Nersesyan Fractional Derivative

M. G. Mazhgikhova*

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

Abstract. In recent, the number of works devoted to the study of problems for fractional order differential equations is growing noticeably. The interest of researchers is due to the fact that the number of areas of science in which equations containing fractional derivatives are used varies from biology and medicine to control theory, engineering, finance, as well as optics, physics, and so on. The inclusion of delay in the fractional order equation significantly affects the course of the process described by this equation, since the unknown function is given for different values of the argument, which includes a history effect into the equation. Therefore, mathematical models containing a fractional operator and a delay argument are more accurate than models containing integer derivatives. In this paper, we study the Cauchy problem for a linear ordinary delay differential equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan fractional differentiation operator, which is generalizing the Riemann – Liouville and Gerasimov – Caputo fractional operators. The results of the work are obtained using the methods of the theory of integer and fractional calculus, methods of the theory of delay differential equations, the method of special functions. In this paper proves a theorem on the validity of an analogue of the Lagrange formula. It is also proved that the special function $W_{\gamma_m}(t)$, which is defined in terms of the generalized Mittag-Leffler function (or the Prabhakar function), satisfies the equation and conditions associated with the one under study, and is the fundamental solution of the considered equation. The main result is that the existence and uniqueness theorem to the initial value problem is proved. The solution to the problem is written out in terms of the special function $W_{\nu}(t)$.

Key words: Dzhrbashyan – Nersesyan derivative, fractional differential equation, delay differential equation, Lagrange formula, fundamental solution, generalized Mittag – Leffler function.

Received: 20.12.2022; Revised: 21.03.2023; Accepted: 24.03.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Mazhgikhova M. G. The Cauchy problem for the delay differential equation with Dzhrbashyan – Nersesyan fractional derivative. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 98-107. EDN: DMUMKE. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-98-107.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

Введение

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau)u(t-\tau) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}$ – оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [1], [2]

$$D_{st}^{\alpha}u(t) = D_{st}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) = D_{st}^{\gamma_m-1}D_{st}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{st}^{\gamma_0}u(t), \tag{2}$$

$\alpha = \sum\limits_{k=0}^{m}\gamma_k - 1, 0 < \gamma_k \le 1$, $\gamma_0+\gamma_m > 1$, $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

В случае $\gamma_0 = \alpha - m + 1, \gamma_k = 1, k = \overline{1,m}$ производная Джрбашяна – Нерсесяна переходит в производную Римана – Лиувилля

$$D_{st}^{\{\alpha-m+1,1,\dots,1\}}u(t) = D_{st}^{\alpha}u(t), \quad m-1 < \alpha \le m,$$

а случае $\gamma_k = 1, k = \overline{0,m-1}, \gamma_m = \alpha - m + 1$ производная Джрбашяна – Нерсесяна переходит в оператор дробного дифференцирования Герасимова – Капуто

$$D_{st}^{\{\alpha-m+1,1,\dots,1\}}u(t) = \partial_{st}^{\alpha}u(t), \quad m-1 < \alpha \le m.$$

В предыдущих соотношениях дробный оператор Римана – Лиувилля определяется по формуле [3, с. 9]

$$D_{st}^{\alpha}g(t) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(t-s)}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_s^t \frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0; \\ g(t), & \alpha = 0; \\ \operatorname{sign}^n(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D_{st}^{\alpha-n}g(t), & n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3}$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера, а производная Герасимова – Капуто (регуляризованная дробная производная) определяется соотношением равенством [3]

$$\partial_{st}^{\alpha}u(t) = \operatorname{sign}^n(t-s)D_{st}^{\alpha-n}u^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \le n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Среди монографий, посвященных теории дробного исчисления, отметим [4], [5], [6]. Исследованию начальных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены работы [7], [8], [9], [10], [11].

Теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом посвящены работы [12], [13] [14], [15]. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом была исследована в работе [16].

Начальные задачи и задачи с краевыми условиями типа Штурма – Лиувилля для уравнения с производной Римана – Лиувилля и уравнения с производной Герасимова – Капуто с запаздывающим аргументом, которые являются частными случаями уравнения (1) при $1 < \alpha \le 2$, исследовались в работах [17] и [18].

Вспомогательная функция

Рассмотрим функцию $W_\nu(t)$, которая ранее была введена в работе [19]

$$W_\nu(t) = W_\nu(t;\tau,\lambda,\mu) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s (t-s\tau)_+^{\alpha s+\nu-1} E_{\alpha,\alpha s+\nu}^{s+1}(\lambda(t-s\tau)_+^{\alpha}), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad t>0, \quad (5)$$

где

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$$

– обобщённая функция Миттаг – Леффлера (функция Прабхакара) [20], $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)}$ – символ Похгаммера,

$$(t-s\tau)^\rho = \begin{cases} (t-s\tau)^\rho, & t>s\tau, \\ 0, & t\le s\tau. \end{cases}$$

Также, в [19] для функции $W_\nu(t)$ (5) доказаны следующие свойства:

1. Начиная с некоторого s выражение $s\tau > t$, поэтому ряд (5) содержит конечное число слагаемых $N = [t/\tau]+1$.

2. Для функции (5) имеет место формула дробного интегродифференцирования порядка $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$:

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu-\alpha}(t). \quad (6)$$

3. Функция $W_\nu(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \qquad \nu \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

4. Для функции $W_k(t)$ справедливо соотношение

$$W_k^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, k \ne i+1, \\ 1, k = i+1. \end{cases} \quad (8)$$

Формула Лагранжа

Функцию $u = u(t)$, удовлетворяющую уравнению (1) для всех $t>0$ и такую, что $D_{0t}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}} u(t) \in AC[0,1]$, $k = \overline{0,m-1}$, назовем *регулярным решением* уравнения (1).

Теорема. *Пусть* $\nu(t) \in L[0,1]$. *Тогда справедлива формула Лагранжа*

$$(Lu*\nu)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_{k+1}\}} \nu(t-\xi) D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}} u(\xi)\Big|_0^t +$$

$$+\int_0^t u(\xi)\left[D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots,\gamma_0\}}\nu(t-\xi) - \lambda\nu(t-\xi) - \mu H(t-\xi-\tau)\nu(t-\xi)\right] d\xi, \quad (9)$$

где

$$(u*\nu)(t)=\int\limits_0^t u(\xi)\nu(t-\xi)d\xi \tag{10}$$

– свертка Лапласа функций $u(t)$ *и* $\nu(t)$ *[21] .*

Доказательство. Свертка дифференциального выражения Lu с функцией $\nu(t)$ равна

$$(Lu*\nu)(t)=\int\limits_0^t \nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_m\}}u(\xi)d\xi-\lambda\int\limits_0^t \nu(t-\xi)u(\xi)d\xi-$$

$$-\mu\int\limits_0^t H(\xi-\tau)\nu(t-\xi)u(\xi-\tau)d\xi. \tag{11}$$

Используя определение производной Джрбашяна – Нерсесяна (2) и формулу дробного интегрирования по частям [5, с. 15]

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{\alpha}h(s)ds=\int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{\alpha}g(s), \quad \alpha\le 0, \tag{12}$$

проинтегрируем m раз первый интеграл в правой части (11):

$$\int\limits_0^t \nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_m\}}u(\xi)d\xi=\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_m-1}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-1}}\ldots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)d\xi=$$

$$=D_{t\xi}^{\gamma_m-1}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-1}-1}\ldots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)\Big|_0^t+\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_{m-1}-1}D_{t\xi}^{\gamma_m}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_{m-2}}\ldots D_{0\xi}^{\gamma_0}u(\xi)d\xi=$$

$$=\cdots=\sum_{k=0}^{m-1}D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_{m-k}\}}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_{m-k-1}\}}u(\xi)\Big|_0^t+\int\limits_0^t D_{t\xi}^{\gamma_1}\ldots D_{t\xi}^{\gamma_m}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\gamma_0-1}u(\xi)d\xi=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_{k+1}\}}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}}u(\xi)\Big|_0^t+\int\limits_0^t u(\xi)D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_0\}}\nu(t-\xi)d\xi.$$

Подставим полученное выражение в (11):

$$\sum_{k=0}^{m-1}D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_{k+1}\}}\nu(t-\xi)D_{0\xi}^{\{\gamma_0,\ldots,\gamma_k\}}u(\xi)\Big|_0^t+\int\limits_0^t u(\xi)D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\ldots\gamma_0\}}\nu(t-\xi)d\xi-$$

$$-\lambda\int\limits_0^t \nu(t-\xi)u(\xi)d\xi-\mu\int\limits_0^t \nu(t-\xi)H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)d\xi.$$

Заменяя $\xi-\tau$ на ξ в последнем интеграле получим, что

$$\int\limits_0^t H(\xi-\tau)u(\xi-\tau)\nu(t-\xi)d\xi=\int\limits_0^t H(t-\xi-\tau)u(\xi)\nu(t-\xi-\tau)d\xi. \tag{13}$$

Тогда, учитывая (13), приходим к формуле (11). □

Фундаментальное решение

Определение. Фундаментальным решением уравнения (1) назовем функцию $\nu(t-\xi)$, удовлетворяющую уравнению

$$D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_0\}}\nu(t-\xi)-\lambda\nu(t-\xi)-\mu H(t-\xi-\tau)\nu(t-\xi-\tau)=0 \tag{14}$$

и условиям

$$\begin{cases} \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\gamma_m-1}\nu(t-\xi)=1, \\ \lim\limits_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}\nu(t-\xi)=0, \qquad k=\overline{0,m-2}. \end{cases} \tag{15}$$

Лемма. *Функция* $W_{\gamma_m}(t-\xi)$ *является фундаментальным решением уравнения* (1).

Доказательство. Справедливость леммы докажем используя определение дробной производной Джрбашяна – Нерсесяна, а также свойства функции $W_\nu(t)$ (6), (7) и (8).

Сначала покажем, что функция $\nu(t-\xi)=W_{\gamma_m}(t-\xi)$ удовлетворяет уравнению (14):

$$D_{t\xi}^{\gamma_0-1}\dots D_{t\xi}^{\gamma_m}W_{\gamma_m}(t-\xi)=D_{t\xi}^{\gamma_0-1}\dots D_{t\xi}^{\gamma_m}\Big(\lambda W_{\alpha+\gamma_m}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+\gamma_m}(t-\xi-\tau)+$$

$$+\frac{(t-\xi)^{\gamma_m-1}}{\Gamma(\gamma_m)}\Big)=D_{t\xi}^{\gamma_0-1}\dots D_{t\xi}^{\gamma_{m-1}}\Big(\lambda W_\alpha(t-\xi)+\mu W_\alpha(t-\xi-\tau)\Big)=$$
$$=\lambda W_{\alpha-\gamma_0-\dots-\gamma_m+1+\gamma_m}(t-\xi)+\mu W_{\alpha-\gamma_0-\dots-\gamma_m+1+\gamma_m}(t-\xi-\tau)=$$
$$=\lambda W_{\gamma_m}(t-\xi)+\mu W_{\gamma_m}(t-\xi-\tau).$$

Справедливость условий (15) следует из формул (6) и (8):

$$\lim_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\gamma_m-1}W_{\gamma_m}(t-\xi)=\lim_{\xi\to t} W_1(t-\xi)=W_1(0)=1;$$

$$\lim_{\xi\to t} D_{t\xi}^{\{\gamma_m,\dots,\gamma_{k+1}\}}W_{\gamma_m}(t-\xi)=\lim_{\xi\to t} W_{\rho_k+1}(t-\xi)=0, \quad \rho_k=\gamma_0+\dots+\gamma_k, \quad k=\overline{0,m-2}.$$

□

Теорема существования и единственности начальной задачи

Начальная задача для уравнения (1) ставится следующим образом.

Задача. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$\lim_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}}u(t) = u_i, \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{16}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть функция* $f(t)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t), \qquad g(t)\in L(0,1). \tag{17}$$

Тогда решение задачи (1), (16) *существует, единственно и имеет вид*

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i W_{\rho_i}(t) + (f*W_\alpha)(t), \tag{18}$$

где $\rho_i = \sum\limits_{k=0}^{i}\gamma_k$.

Доказательство. Покажем, что решение (18) удовлетворяет уравнению (1). Для этого, учитывая определение оператора Джрбашяна – Нерсесяна, представление функции $f(t)$ (17) и формулу дробного интегрирования по частям (12) вычислим значение выражения:

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}}u(t) = D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t) + D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t)*W_\alpha(t)\right] =$$

$$= D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}\left[\sum_{i=0}^{m-1}u_iW_{\rho_i}(t) + g(t)*W_{\alpha-\gamma_m+1}(t)\right].$$

Далее, используя свойство (7) функции $W_\nu(t)$ имеем:

$$D_{0t}^{\gamma_m-1}D_{0t}^{\gamma_{m-1}}\dots D_{0t}^{\gamma_0}\sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\alpha+\rho_i}(t)+\mu W_{\alpha+\rho_i}(t-\tau)\Big)+$$

$$+D_{0t}^{\gamma_m-1}\frac{d}{dt}D_{0t}^{\gamma_{m-1}-1}\dots D_{0t}^{\gamma_0}g(t)*W_{\alpha-\gamma_m+1}(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\rho_i}(t)+\mu W_{\rho_i}(t-\tau)\Big) + D_{0t}^{\gamma_m-1}\frac{d}{dt}g(t)*W_1(t) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\rho_i}(t)+\mu W_{\rho_i}(t-\tau)\Big) + D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t) + D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t)*\frac{d}{dt}\left[\lambda W_{\alpha+1}(t)+\mu W_{\alpha+1}(t-\tau)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}u_i\Big(\lambda W_{\rho_i}(t)+\mu W_{\rho_i}(t-\tau)\Big) + f(t) + D_{0t}^{\gamma_m-1}g(t)*\left[\lambda W_\alpha(t)+\mu W_\alpha(t-\tau)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} u_i \Big(\lambda W_{\rho_i}(t) + \mu W_{\rho_i}(t-\tau)\Big) + f(t) + f(t) * [\lambda W_\alpha(t) + \mu W_\alpha(t-\tau)] =$$

$$= f(t) + \lambda u(t) + \mu u(t-\tau).$$

Из формулы (8) следует, что решение (18) удовлетворяет начальным условиям (16):

$$D_{0t}^{\gamma_i - 1} D_{0t}^{\gamma_{i-1}} \dots D_{0t}^{\gamma_0} u(t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=0}^{m-1} u_i D_{0t}^{\gamma_i - 1} D_{0t}^{\gamma_{i-1}} \dots D_{0t}^{\gamma_0} W_{\gamma_0+\gamma_1+\dots+\gamma_i}(t)\Big|_{t=0} =$$

$$= u_i W_1(t)\Big|_{t=0} = u_i.$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (1), (16)

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}} u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau) u(t-\tau) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_i\}} u(t) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{19}$$

Используя соотношение, связывающее дробную производную Джрбашяна – Нерсесяна с производной Римана – Лиувилля [2]

$$D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_m\}} u(t) = D_{0t}^{\alpha} u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{\rho_k - \alpha - 1}}{\Gamma(\rho_k - \alpha)} \left[D_{0t}^{\{\gamma_0,\dots,\gamma_k\}} u(t) \right]_{t=0}, \quad m-1 < \alpha \le m,$$

и учитывая однородные начальные условия, из задачи (19) приходим к следующей

$$D_{0t}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t-\tau) u(t-\tau) = 0, \quad \lim_{t\to 0} D_{0t}^{\alpha - i} u(t) = 0, \quad i = \overline{0, m-1},$$

которая имеет только тривиальное решение [5]. Значит, решение неоднородной задачи (1), (16) единственно. □

Заключение

В работе получено фундаментальное решение для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной Джрбашяна – Нерсесяна с запаздывающим аргументом. Получен аналог формулы Лагранжа. Доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи.

Результаты, полученные в данной работе, в дальнейшем будут использованы при исследовании локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздывающим аргументом.

Список литературы

1. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. Акад. Наук Арм. ССР.*, 1968. Т. 36, №1, С. 3–29.
2. Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, *Izv. Math.*, 2009. vol. 73, no. 2, pp. 351–392.
3. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* Москва: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Factional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.
5. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. Москва: Наука, 2005. 199 с.
6. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus*. N.-Y. L.: Acad. press., 1974. 234 pp.
7. Barrett J. H. Differential equation of non-integer order, *Canad. J. Math.*, 1954. vol. 6, no. 4, pp. 529–541.
8. Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order, *Sb. Math.*, 2011. vol. 202, no. 4, pp. 571–582.
9. Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivative in Banach spaces, *Symmetry.*, 2021. vol. 13, no. 6, pp. 1058.
10. Волкова А. Р., ИжбердееваЕ. М., Федоров В. Е. Начальные задачи для уравнений с композицией дробных производных, *Челяб. физ.-матем. журн.*, 2021. Т. 6, № 3, С. 269–277.
11. Богатырева Ф. Т. Начальная задача для уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами, *Вест. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2016. Т. 16, № 4–1, С. 21–26.
12. Bellman R. E., Cooke K. L. *Differential-Difference Equations*. New York. London.: Acad. Press., 1963. 462 pp.
13. Hale J. K, Lunel S. M. V. *Introduction to Functional Differential Equations*. New York. London.: Springer, 1993. 449 pp.
14. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. Москва: Наука, 1971. 296 с.
15. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*. Москва: Наука, 1972. 351 с.
16. Норкин С. Б. О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, *УМН*, 1959. Т. 14. 1, № 85, С. 199–206.
17. Мажгихова М. Г. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Римана-Лиувилля с запаздывающим аргументом, *Известия КБНЦ РАН*, 2017. Т. 75, № 1, С. 24–28.
18. Мажгихова М. Г. Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом, *Челябинский Физико-Математический Журнал*, 1968. Т. 3, № 1, С. 27–37.
19. Mazhgikhova M. G. Dirichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument, *Differential equations*, 2018. Т. 54, № 2, С. 187–194.
20. Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 1971. vol. 19, pp. 7–15.
21. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. Москва: Наука, 1969. 528 с.

Информация об авторе

Мажгихова Мадина Гумаровна✉ – младший научный сотрудник Отдела дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, https://orcid.org/0000-0001-7612-8850.

References

[1] Dzhrbashyan M. M., Nersesyan A. B. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order, Izv. AN Arm. SSR., 1968, 36, 1, 3–29. (In Russian)

[2] Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, Izv. Math., 2009, 73, 2, 351–392. DOI: 10.4213/im2429

[3] Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 (In Russian)

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Factional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006, 523

[5] Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional order partial differential equations]. Nauka, Moskva, 2005, 199. (In Russian)

[6] Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. N.-Y. L., Acad. press., 1974, 234.

[7] Barrett J. H. Differential equation of non-integer order, Can. J. Math., 1954, 6, 4, 529–541.

[8] Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order, Sb. Math., 2011, 202, 4, 571–582.

[9] Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M. Initial value problems of linear equations with the Dzhrbashyan – Nersesyan derivative in Banach spaces, Symmetry, 2021, 13, 6, 1058.

[10] Volkova A. R., IzhberdeevaE. M., Fedorov V. E. Initial value problems for equations with a composition of fractional derivatives, Chel. fiz.-mat. zh., 2021, 6, 3, 269–277. (In Russian)

[11] Bogatyreva F. T. Initial value problem for fractional order equation with constant coefficients, Vest. KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki., 2016, 16, 4–1, 21–6. (In Russian)

[12] Bellman R. E., Cooke K. L. Differential-Difference Equations, N-Y., Acad. Press, 1963, 462.

[13] Hale J. K, Lunel S. M. V. Introduction to Functional Differential Equations, N-Y, Springer, 1993. 449.

[14] El'sgol'ts L. E. Introduction to the theory of differential equations with deviating argument. Nauka, Moskva, 1971, 296. (In Russian)

[15] Myshkis A. D. Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom [Linear delay differential equations]. Nauka, Moskva, 1972. (In Russian)

[16] Norkin S. B. On solutions of a linear homogeneous delay differential equation, UMN, 1959, 14, 1:85, 199–206. (In Russian)

[17] Mazhgikhova M. G. Cauchy problem for ordinary differential equation with Riemann-Liouville operator with delay, Izvestiya KBNTs RAN, 2017, 75, 1, 24–28. (In Russian)

[18] Mazhgikhova M. G.Initial and boundary value problems for ordinary differential equation of fractional order with delay, Chel. Phys. and Math. Journal, 2018, 3, 1, 27–37. (In Russian)

[19] Mazhgikhova M. G. Dirichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument, Differential equations, 2018, 54, 2, 187–194. (In Russian)

[20] Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, Yokohama Math. J., 1971, 19, 7–15.

[21] Naymark M. A. Lineynye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. Nauka, Moskva, 1969, 528. (In Russian)

Information about the author

Mazhgikhova Madina Gumarovna – Junior Researcher, Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Nalchik, Russia, https://orcid.org/0000-0001-7612-8850.