Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. C. 140-149. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.58

К свойствам одной функции Фокса

Ф. Г. Хуштова*

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

Аннотация. В работе рассматривается частный случай специальной функции Фокса с четырьмя параметрами, которая возникает в теории краевых задач для параболических уравнений с оператором Бесселя и дробной производной по времени. Целью исследования является получение некоторых рекуррентных соотношений, формул дифференцирования и интегрального преобразования рассматриваемой функции. При получении результатов работы в основном используется представление рассматриваемой функции через интеграл Меллина–Барнса. Также используются её асимптотические разложения при большом и малом значениях аргумента. С помощью указанного интегрального представления и некоторых известных формул для гамма-функции Эйлера, получены рекуррентные соотношения, связывающие функции с разными параметрами, а также функцию с её производной первого порядка. Получена формула дифференцирования n-го порядка. Исследуется несобственный интеграл первого рода, который содержит рассматриваемую функцию с двумя зависимыми параметрами из четырёх. Показывается, что этот несобственный интеграл может быть записан в терминах известной специальной функции Макдональда. При частных значениях параметров рассматриваемой в работе функции получаются некоторые известные элементарные и специальные функции. Результаты работы носят теоретический характер и будут полезны при исследовании краевых задач для вырождающихся параболических уравнений с производными дробного порядка по времени.

Ключевые слова: функция Фокса, интеграл Меллина-Барнса, гамма-функция Эйлера, функция Макдональда, гипергеометрическая функция.

Получение: 29.11.2022; Исправление: 16.03.2023; Принятие: 29.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. К свойствам одной функции Фокса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 140-149. EDN: FXXPSA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: khushtova@yandex.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149
Research Article
Full text in Russian
MSC 33C60

To the Properties of One Fox Function

F. G. Khushtova*

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

Abstract. The paper considers a particular case of a special Fox function with four parameters, which arises in the theory of boundary value problems for parabolic equations with a Bessel operator and a fractional time derivative. The research objective is to obtain some recurrence relations, formulas for differentiation and integral transformation of the function under consideration. The results are obtained through representation of the considered function in terms of the Mellin–Barnes integral. The function asymptotic expansions for large and small values of the argument are also used. Employing the integral representation and some well-known formulas for the Euler gamma function, recurrent relations are obtained connecting functions with different parameters, as well as a function with its first-order derivative. A formula for differentiation of the nth order is obtained. The paper studies an improper integral of the first kind that includes the considered function with two dependent of the four parameters. We show that the improper integral can be written out in terms of the well-known special Macdonald function. With special values of the parameters of the considered function we obtain some well-known elementary and special functions. The results of the study are theoretical and applicable in the study of boundary value problems for degenerate parabolic equations with fractional time derivatives.

Key words: Fox function, Mellin-Barnes integral, Euler gamma function, Macdonald function, hypergeometric function.

Received: 29.11.2022; Revised: 16.03.2023; Accepted: 29.03.2023; First online: 16.04.2023

For citation. Khushtova F. G. To the properties of one fox function. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 140-149. EDN: FXXPSA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-140-149.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: khushtova@yandex.ru

Введение

Решения многих задач математической физики, техники и экономики выражаются через так называемые специальные функции. В теории специальных функций важное место занимают функции гипергеометрического типа. Многие из них могут быть записаны в терминах G-функции Мейера. Обобщением G-функции Мейера является H-функция Фокса. Основные свойства этой функций, такие как представление через степенные ряды, асимптотические свойства при больших и малых значениях аргумента, некоторые интегральные преобразования, можно вывести из её представления через так зазываемый интеграл Меллина–Барнса. Однако, при выводе некоторых формул при частных значениях параметров, ввиду громоздкости её записи, удобнее пользоваться упрощенными обозначениями. В данной работе рассматривается частный случай такой функции Фокса, содержащей четыре параметра. Эта функция возникает при решении краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и производной дробного порядка по временной переменной [1], [2]

$$B_x u(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0,$$

где

$$B_x u = x^{-b} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^b \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

– оператор Бесселя, $|b| < 1$, D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка α, который определяется следующим образом [3, с. 9]: $D_{0y}^{\alpha} u = u_y$, если $\alpha = 1$, и

$$D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^y \frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\alpha}},$$

если $0 < \alpha < 1$.

Вспомогательные сведения.

Далее в работе $\Gamma(s)$ – *гамма-функция Эйлера*, $K_\nu(z)$ - *функция Макдональда*, для которых известны представления [4, с. 5], [5, с. 15], [6, с. 11], [7, с. 79]

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0, \tag{1}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \Gamma(\nu/2 + s)\,\Gamma(-\nu/2 + s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \quad \gamma > |\operatorname{Re}\nu|/2. \tag{2}$$

Как известно, $\Gamma(s)$ аналитична в комплексной плоскости s всюду, кроме точек $s = -n$, $n = 0,1,2,...$, в которых имеет полюсы первого порядка с вычетами

$(-1)^n/n!$. Соответственно, $\Gamma(-s)$ имеет в точках $s=n$, $n=0,1,2,...$, вычеты, равные $(-1)^{n+1}/n!$.

Справедливы формулы [4, с. 10], [5, с. 17], [7, с. 27]

$$\Gamma(s+n)=(s)_n\Gamma(s), \tag{3}$$

$$\Gamma(s+1-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(s+1)}{(-s)_n}, \tag{4}$$

где $n=0,1,2,...$, $(s)_n$ – *символ Похгаммера*, определяемый равенствами

$$(s)_n=s(s+1)(s+2)...(s+n-1), \quad (s)_0=1.$$

Частный случай функции Фокса. Пусть $0<\rho\leqslant 2$, μ, σ и $r\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,(\sigma+r)/2\notin\mathbb{Z}$. Рассмотрим функцию от комплексного переменного z

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=H^{2,1}_{2,3}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^2\left|\begin{array}{l}(1-\sigma/2,1),(\mu-\rho\sigma/2,\rho)\\(r/2,1),(1-\sigma/2,1),(-r/2,1)\end{array}\right.\right], \tag{5}$$

где $H^{2,1}_{2,3}[...]$ – H-*функция Фокса* [8]- [10].

Некоторые свойства функции (5), такие как представление через контурный интеграл, представление через степенные ряды, асимптотические свойства, формулы дифференцирования, рекуррентные соотношения, рассмотрены в работах [11], [12].

Для функции (5) имеет место представление через интеграл Меллина-Барнса

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \tag{6}$$

где

$$\Theta(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\,\Gamma(1+r/2-s)}, \tag{7}$$

$$L=L_{i\omega\infty}=(\omega-i\infty,\omega+i\infty), \quad \omega_1<\omega<\omega_2,$$

$$\omega_1=-\min\{\mathrm{Re}\,r/2,1-\mathrm{Re}\,\sigma/2\}, \quad \omega_2=\mathrm{Re}\,\sigma/2.$$

Интеграл (6) абсолютно сходится, если:

$$\rho<2, \quad |\arg z|<\pi(1-\rho/2)/2, \quad z\neq 0,$$

$$\rho\leqslant 2, \quad |\arg z|=\pi(1-\rho/2)/2, \quad (\rho-2)\,\omega>\rho\,\mathrm{Re}\,\sigma/2-\mathrm{Re}\,\mu+1/2, \quad z\neq 0.$$

Справедливы асимптотические разложения

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=a_0\left(\frac{z}{2}\right)^r+b_0\left(\frac{z}{2}\right)^{2-\sigma}+o(z^\delta), \quad z\to 0, \tag{8}$$

где $\delta=\min\{\mathrm{Re}\,r,2-\mathrm{Re}\,\sigma\}$,

$$a_0=\frac{\Gamma(1-(r+\sigma)/2)\,\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu-\rho(r+\sigma)/2)\,\Gamma(1+r)}, \quad b_0=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2-1)}{\Gamma(\mu-\rho)\,\Gamma(2+(r-\sigma)/2)},$$

и

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)=c_0\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}+o(z^{-\sigma}), \quad z\to\infty, \tag{9}$$

где

$$c_0=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1+(r-\sigma)/2)}.$$

Основные результаты.

В этой работе, используя интегральное представление (6), докажем следующие свойства функции (5).

Свойство 1. *Имеет место формула*

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = (-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k}, \quad n = 1,2,..., \tag{10}$$

где

$$d_k = \frac{(-1)^k \Gamma((r+\sigma)/2+k)}{\Gamma(\mu+\rho k)\Gamma(1+(r-\sigma)/2-k)}.$$

Доказательство. Согласно (6) можем записать

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \Theta_1(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{11}$$

где

$$\Theta_1(s) = \frac{\Gamma(r/2+s)\Gamma(1-\sigma/2-n+s)\Gamma(\sigma/2+n-s)}{\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(1+r/2-s)},$$

$$L_1 = (\omega - i\infty, \omega + i\infty), \quad \omega_3 < \omega < \omega_4, \tag{12}$$

$$\omega_3 = -\min\{\mathrm{Re}\, r/2, 1 - \mathrm{Re}\,\sigma/2 - n\}, \quad \omega_4 = \mathrm{Re}\,\sigma/2 + n.$$

Из формул (3) и (4) следуют равенства

$$\Gamma(\sigma/2+n-s) = (\sigma/2-s)_n \Gamma(\sigma/2-s),$$

$$\Gamma(1-\sigma/2-n+s) = \frac{(-1)^n \Gamma(1-\sigma/2+s)}{(\sigma/2-s)_n}.$$

В силу последних интеграл (11) преобразуется к виду

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_1} \Theta(s) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2s} ds, \tag{13}$$

где $\Theta(s)$ представляется в виде (7). Заметим, что контур интегрирования L_1, определяемый из (12), оставляет слева полюсы в точках $s_k = \sigma/2 + k$, $k = 0,1,...,n-1$. Вычеты функции $\Theta(s)(z/2)^{-2s}$ в этих точках равны

$$\frac{(-1)^{k+1}\Gamma((r+\sigma)/2+k)}{\Gamma(\mu+\rho k)\Gamma(1+(r-\sigma)/2-k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k}.$$

Вычитая их из функции (13), получим

$$(-1)^n \mathscr{J}_r^{\rho,\mu+n\rho,\sigma+2n}(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}\Gamma((r+\sigma)/2+k)}{\Gamma(\mu+\rho k)\Gamma(1+(r-\sigma)/2-k)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma-2k} = \mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z),$$

что и доказывает равенство (10).

При $n=1$ (10) принимает вид

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)+\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+\rho,\sigma+2}(z)=\frac{\Gamma((r+\sigma)/2)}{\Gamma(\mu)\Gamma(1+(r-\sigma)/2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\sigma}.$$

Свойство 2. *Справедлива формула*

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2}{\rho}\left[\mu\,\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)-\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z)\right]. \tag{14}$$

Доказательство. Из представления (6) следует

$$\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \tag{15}$$

где

$$\Theta_2(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\Gamma(1-\sigma/2+s)\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu+1-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(1+r/2-s)}.$$

Домножим (15) на z^{σ} и продифференцируем полученное равенство по z. Результат дифференцирования умножим на $z^{1-\sigma}$. Получим

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)(\sigma-2s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds. \tag{16}$$

Преобразуем правую часть равенства (16), записав её в виде

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds-$$

$$-\frac{2}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds. \tag{17}$$

Из формулы (3) следует

$$\Gamma(\mu+1-\rho\sigma/2+\rho s)=(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s).$$

Учитывая последнее, равенство (17) запишется в виде

$$z^{1-\sigma}\frac{d}{dz}\left[z^{\sigma}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+1,\sigma}(z)\right]=\frac{2\mu}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_2(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds-\frac{2}{\rho}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2s}ds, \tag{18}$$

где $\Theta(s)$ определяется из (7). Сравнивая правую часть (18) с представлением (6), приходим к (14).

Свойство 3. *Имеет место формула дифференцирования*

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\,\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}\,\mathscr{J}_r^{\rho,\mu-n,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2}), \tag{19}$$

где $\lambda=const$, $n=1,2,...$

Доказательство. Продифференцируем n раз по z равенство

$$z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})=\frac{z^{\mu-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds.$$

Получим

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=$$
$$=\frac{(-1)^n z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\,(1-\mu+\rho\sigma/2-\rho s)_n\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds. \qquad (20)$$

Из формулы (4) следует

$$(1-\mu+\rho\sigma/2-\rho s)_n=\frac{(-1)^n\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)}{\Gamma(\mu-n-\rho\sigma/2+\rho s)}.$$

Учитывая последнее, (20) примет вид

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2})\right]=\frac{z^{\mu-n-\rho\sigma/2-1}}{2\pi i}\int\limits_L\Theta_3(s)\left(\frac{\lambda z^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds,$$

где

$$\Theta_3(s)=\frac{\Gamma(r/2+s)\,\Gamma(1-\sigma/2+s)\,\Gamma(\sigma/2-s)}{\Gamma(\mu-n-\rho\sigma/2+\rho s)\,\Gamma(1+r/2-s)},$$

откуда следует (19).

Свойство 4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$, $\lambda=\mathrm{const}$. *Тогда справедлива формула*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu+\alpha,\sigma}(\lambda z^{-\rho/2}). \qquad (21)$$

Доказательство. Отметим, что сходимость интеграла в (21) следует из асимптотического разложения (9). Из представления (6) имеем

$$\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda t^{-\rho/2}}{2}\right)^{-2s}ds\,dt. \qquad (22)$$

Меняя в (22) порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2-1}\mathscr{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(\lambda t^{-\rho/2})\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\Theta(s)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-2s}\int\limits_0^z(z-t)^{\alpha-1}t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1}dt\,ds. \qquad (23)$$

Внутренний интеграл равен [13, с. 238]

$$\int_0^z (z-t)^{\alpha-1} t^{\mu-\rho\sigma/2+\rho s-1} dt = z^{\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu-\rho\sigma/2+\rho s)}{\Gamma(\mu+\alpha-\rho\sigma/2+\rho s)}.$$

Подставляя найденное значение в (23) и учитывая (7), приходим к формуле (21).

Частные случаи. Справедливы представления

$$\left(\frac{z}{2}\right)^r \mathscr{J}_r^{1,1,r}(z) = \gamma\left(r;\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,2+r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \mathscr{J}_r^{1,2,4+r}(z) = -\left(\frac{z}{2}\right)^r \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,2-r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r E_{1,1+r}\left(-\frac{z^2}{4}\right), \quad \mathscr{J}_r^{1,2,4-r}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{r-2} E_{1,r}\left(-\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\mathscr{J}_r^{1,1,\sigma}(z) = \frac{\Gamma((\sigma+r)/2)}{\Gamma(1+r)}\left(\frac{z}{2}\right)^r \Phi\left((\sigma+r)/2, 1+r; -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^r \mathscr{J}_r^{\rho,\rho,2+r}(z) = H_{1,2}^{2,0}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\, \begin{matrix}(0,\rho)\\ (r,1),(0,1)\end{matrix}\right].$$

Здесь $\gamma(r;z)$ – неполная гамма-функция [5, с. 254], $E_{\rho,\mu}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффелера [7, с. 101], $\Phi(a,c;z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [5, с. 237], [7, с. 73].

Приведённые частные случаи нетрудно получить придавая параметрам ρ, μ и σ в (6) соответствующие значения и учитывая представления через интеграл Меллина-Барнса получающихся функций [5, с. 244], [7, с. 168, 136, 101, 74].

Заключение

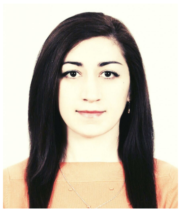
Рассматривается частный случай специальной функции Фокса. Используя её интегральное представление, получены формулы, связывающие функции с разными параметрами, а также функцию с её производной первого порядка, формула дифференцирования n-го порядка. Исследуются два интеграла с рассматриваемой функцией. При частных значениях параметров получаются некоторые известные элементарные и специальные функции. Полученные результаты могут быть применены при исследовании краевых задач для некоторых дифференциальных уравнений с производными дробного порядка.

Список литературы

1. Хуштова Ф.Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2016. Т. 99, № 6, С. 921–928.
2. Хуштова Ф.Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2018. Т. 103, № 3, С. 460–470.
3. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Кузнецов Д.С. *Специальные функции.* М.: Высшая школа, 1962. 248 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*, Т. 1. М.: Наука, 1965. 296 с.
6. Лебедев Н. *Специальные функции и их приложения.* М.: Физматлит, 1963. 358 с.
7. Маричев О.И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул).* Мн.: Наука и техника, 1978. 312 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*, Т. 3. М.: Наука, 1986. 800 с.
9. Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transform. Theory and Applications.* Boca Raton, London, New York and Washington, D.C.: Chapman and Hall/CRC, 2004. 389 с.
10. Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J. *The H-function. Theory and Applications.* Springer, 2010. 270 с.
11. Хуштова Ф.Г. Формулы дифференцирования и формула автотрансформации для одного частного случая функции Фокса, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 20, №4, С. 15–18.
12. Хуштова Ф.Г. О некоторых свойствах одной специальной функции, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 22, №2, С. 34–40.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Т. 1. М.: Физматлит, 2002. 632 с.

Информация об авторе



Хуштова Фатима Гидовна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела дробного исчисления, Институт прикладной математики и автоматизации РАН, г. Нальчик, Россия, https://orcid.org/0000-0003-4088-3621.

References

[1] Khustova F. G. First Boundary-Value Problem in the Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Derivative, Matematicheskie Zametki, 2016, 99, 6, 921–928 (In Russian)

[2] Khustova F. G. The Second Boundary-Value Problem in a Half-Strip for a Parabolic-Type Equation with Bessel Operator and Riemann–Liouville Partial Derivative, Matematicheskie Zametki, 2018, 103, 3, 460–470.

[3] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application], Moskva Fizmatlit. 2003, 272 (In Russian.)

[4] Kuznetsov D. S. Spetsial'nyye funktsii [Special Functions], Moskva, Vysshaya shkola, 1962, 248 (In Russian)

[5] Bateman G., Erdeyi A. Vysshiye transtsendentnyye funktsii [Higher transcendental functions], vol. I, Moskva, Nauka, 1965, 296(In Russian.)

[6] Lebedev N. Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications], Moskva, Fizmatlit, 1963, 358(In Russian.)

[7] Marichev O. I. Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy (teoriya i tablitsy formul) [Method for calculating integrals of special functions (theory and tables of formulas)], Nauka i tekhnika, 1978, 312(In Russian.)

[8] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Tom 3. Dopolnitel'nyye glavy [Integrals and series. vol. 3. Additional chapters], Moskva, Nauka, 1986, 800(In Russian.)

[9] Kilbas A. A., Saigo M. H-Transform. Theory and Applications, Boca Raton, London, New York and Washington, D.C., Chapman and Hall/CRC, 2004, 389.

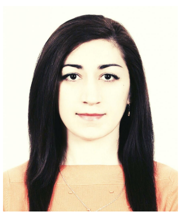
[10] Mathai A. M., Saxena R. K., Haubold H. J. The H-function. Theory and Applications, Springer, 2010, 270.

[11] Khushtova F. G. Differentiation formulas and an autotransformation formula for one particular case of the Fox function, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 2020, 20, 4, 15–18(In Russian.)

[12] Khushtova F. G. On some properties of one special function, Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 2020, 22, 2, 34–40(In Russian.)

[13] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. Tom. 1. Elementarnyye funktsii [Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions], Moskva, Fizmatlit, 2002, 632(In Russian.)

Information about the author



Khushtova Fatima Gidovna✉ – PhD (Math. & Phys.), Professor, Researcher, Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation RAS, Nalchik, Russia, https://orcid.org/0000-0003-4088-3621.