МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-80-97
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.956.6

О сопряженной задаче в области с отходом от характеристики для смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка

Б. И. Исломов, И. А. Ахмадов**

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.

Аннотация. В настоящей статье доказана классическая, сильная разрешимость и вольтерровость сопряженной задачи с отходом от характеристики для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Целью исследования является решение сопряженной задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа дробного порядка. Учитывая, свойств операторов дробного порядка найдены сопряженный оператор и применены постановки сопряженной задачи. Для исследования поставленной задачи в параболической частью смешанной области решается первой краевой задачи для уравнения параболического типа дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто. Используя, свойств функции Райта получено функциональное соотношение на линии перехода. Точно также решая, задачи Коши гиперболической частью смешанной области находим функциональное соотношение. Следовательно, поставленная задача эквивалентным образом сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода доказывается однозначной разрешимость полученного уравнения. Кроме того, используя методы операторов интегро - дифференцирования дробного порядка, теории специальных функций, априорных оценок, теория интегральных уравнений доказываются теоремы единственности, существования и вольтерровость сопряженной задачи в области с отходом от характеристики для уравнения смешанного типа дробного порядка. Полученные результаты новые и отличаются от результатов М.А. Садыбекова и А.С. Бердышева.

Ключевые слова: локальные граничные условия, уравнение дробного порядка, функция Райта и Грина, сильная разрешимость, отход от характеристики.

Получение: 06.12.2022; Исправление: 19.03.2023; Принятие: 22.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Исломов Б. И., Ахмадов И. А. О сопряженной задаче в области с отходом от характеристики для смешанного параболо-гиперболического уравнения дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 80-97. EDN: DCGBAL. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-80-97.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: E-mail: islomovbozor@yandex.com, ahmadov.ilhom@mail.ru

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-80-97

Research Article

Full text in Russian

MSC 35A02

On the Adjoint Problem in a Domain with Deviation Out from the Characteristic for the Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation with the Fractional Order Operator

B. I. Islomov*, ***I. A. Akhmadov****

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Uzbekistan, Tashkent, 100174, st. Universitetskaya, 4.

Abstract. In this article, it was proved the classical, strong solvability and Volterra property of the adjoint problem with departure from the characteristic for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with a fractional order operator in the sense of Gerasimov-Caputo. The aim of the research is to solve the conjugate problem for the equation of a mixed parabolic-hyperbolic type of fractional order. Taking into account the properties of fractional order operators, the adjoint operator is found and the statements of the adjoint problem are applied. To study the formulated problem in the parabolic part of the mixed domain, the first boundary value problem for a parabolic type equation of fractional order in the sense of Gerasimov-Caputo is solved. Using the properties of the Wright function, a functional relation is obtained on the transition line. In the same way, solving the Cauchy problem with the hyperbolic part of the mixed domain, we find a functional relation. Consequently, the problem posed reduces in an equivalent way to a Volterra integral equation of the second kind with a weak singularity. According to the theory of Volterra integral equations of the second kind, the unique solvability of the resulting equation is proved. In addition, using the methods of integro-differentiation operators of fractional order, the theory of special functions, a priori estimates, the theory of integral equations, uniqueness, existence and Volterra theorems for the adjoint problem in a domain with deviation out of the characteristic for a mixed-type equation of fractional order are proved. The results obtained are new and differ from the results of M. A. Sadybekov and A. S. Berdyshev.

Key words: local boundary conditions, fractional order equation, Wright and Green's function, strong solvability, deviation out from characteristic.

Received: 06.12.2022; Revised: 19.03.2023; Accepted: 22.03.2023; First online: 15.04.2023

For citation. Islomov B. I., Akhmadov I. A. On the adjoint problem in a domain with deviation out from the characteristic for the mixed parabolic-hyperbolic equation with the fractional order operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 80-97. EDN: DCGBAL. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-80-97.

Funding. Not applicable.

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*__Correspondence:__ E-mail: islomovbozor@yandex.com, ahmadov.ilhom@mail.ru

Введение

В последние годы возрос интерес к иследованию дифференциальних дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки: в физике, механике, биологии, инженерии и других областях.

Основные свойства оператора дробного порядка смысле Римана- Ливулля и Капуто развивались в известных работах А.М. Нахушева и М.С.Салахитдинова [1], А. М. Нахушева [2], [3], G. Hardy and J. E. Littlewood [4], E. R. Love [5], M. Saigo [6], М.С.Салахитдинова и Б. И. Исломова [7], В. П. Михайлова [8], А. В. Псху [9], С. Г. Самко, А. А. Килбаса и О. И. Маричева [10].

Отметим, что в работе В.А.Елеева [11] рассматривалась классическая разрешимость аналог задачи Трикоми для смешанных параболо– гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа Н. Ю. Капустина [12] рассматривалась сильная разрешимость задаче Трикоми для системы уравнений параболо-гиперболического типа. К. Б. Сабитов [13] доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с комплексным спектральным параметром.

А. С. Бердышев [14] изучал разрешимость и спектральных свойств локальные и нелокальные задачи, а также сопряженные задачи к ним для уравнений смешанного параболо-гиперболического и смешанно – составного типов.

В. А. Ильин [15] исследовал единственность классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения. А. Б. Нерсесян [16] ввел обобщенное уравнение типа Вольтерра и выделил классы ядер, не имеющих собственных значений.

В работе М. А. Садыбекова [17] доказана сильная разрешимость и вольтерровость (отсутствие у нее собственных значений) краевой задаче в области с отходом от характеристики для уравнения смешанного типа целого порядка.

В работах [18–20] изучены краевые задачи для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка Капуто в смешанной области, состоящая из характеристической треугольника и прямоугольника.

Насколько нам известно, что краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа дробного порядка не изучены.

В настоящей работе изучаются сопряженные задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения, в случае, когда параболическая часть содержит оператор дробного порядка Герасимова-Капуто. Установлены классическая, сильная разрешимость и вольтерровость поставленной задачи.

2. Вспомогательные сведения и постановка задачи

Пусть $\Omega \in R^2$ - конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0$, $y=1$, $x=1$ соответсвенно, а при $y<0$ монотонной гладкой кривой $AC: y=-\gamma(x), 0\leq x\leq l, 0.5\leq l\leq 1, \gamma(0)=0, l+\gamma(l)=1$, расположенной внутри характеристического треугольника $D: 0\leq x+y\leq x-y<1$ и характеристикой $BC: x-y=1, l\leq x\leq 1$ уравнения

$$Lu=\left\{\begin{array}{ll} {}_cD^\alpha_{0x}u-u_{yy}, & y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0 \end{array}\right\}=f(x,y), \tag{1}$$

где ${}_cD^\alpha_{\sigma x}[\bullet]$—оператор дробного порядка α в смысле Герасимова-Капуто [9]:

$$ {}_cD^\alpha_{\sigma x}g(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{sgn(x-\sigma)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_\sigma^x|x-t|^{-\alpha}g'(t)dt, & 0<\alpha<1, \\ g'(x), & \alpha=1. \end{array}\right. \tag{2}$$

Задача M_α. *Найти решения уравнения* (1)*, удовлетворяющей условия*

$$u|_{AA_0\cup A_0B_0}=0 \tag{3}$$

$$(u_x-u_y)|_{AC}=0 \tag{4}$$

и на линии измененного типа $I=\{(x,y): 0<x<1,\ y=0\}$ *удовлетворяет условию сопряжения*

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u(x,y),\quad (x,0)\in\bar{I},\quad \lim_{y\to+0}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y),\quad (x,0)\in I. \tag{5}$$

Параболическую часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболическую - Ω_1.

Через $W_2^l(\Omega)=H^l(\Omega)$ обозначим пространство С. Л. Соболева с нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega)=L_2(\Omega)$; $L_2[0,1]$ - пространство квадратично суммируемых функций на $[0,1]$, $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\}, \Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$.

Определение 1. Для функций $h(x)$, $w(x)\in L_2[0,1]$, выражение

$$(h(x),w(x))_0=\int_0^1 h(x)\cdot w(x)dx.$$

называется скалярным произведением на пространстве $L_2[0,1]$.

Свойство оператора Капуто.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* $f(x)$, $g(x)\in L_2[0,1]$*, тогда справедливо равенства*

$$({}_cD^\alpha_{0x}h(x),w(x))_0=(h(x),{}_cD^\alpha_{1x}w(x))_0. \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая равенства (2), получаем

$$({}_cD^\alpha_{0x}h(x),w(x))_0=\int_0^1\left[\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^x\frac{h'(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right]\cdot w(x)dx, \tag{7}$$

Интегрируя по частям правую часть (7), будем иметь

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^x \frac{h'(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right]\cdot w(x)dx = \left[\frac{w(x)}{(1-\alpha)}\cdot\int_0^x dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt\right]\Bigg|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 w'(x)dx\int_0^x dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt = \frac{w(1)}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(1-t)^\alpha}dt-$$

$$-\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 w'(x)dx\int_0^x dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt. \qquad (8)$$

Далее, меняя порядок интегрирования последнего интеграла (8), имеем

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 w'(x)dx\int_0^x dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt = \frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_r^1 w'(x)dx\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt =$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}dt\int_r^1 w'(x)dx = \frac{w(1)}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(1-t)^\alpha}dt-$$

$$-\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}w(r)dt,$$

Отсюда и из (8) имеем

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^x \frac{h'(t)}{(x-t)^\alpha}dt\right]\cdot w(x)dx = \frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 dr\int_0^r \frac{h'(t)}{(r-t)^\alpha}w(r)dt,$$

Интегрируя по частям два раза правой части последнего равенство, получим

$$\frac{1}{(1-\alpha)}\int_0^1 h'(x)dx\int_x^1 \frac{w(t)}{(t-x)^\alpha}dt = \int_0^1 h(x)\left[\frac{1}{(1-\alpha)}\int_1^x \frac{w'(t)}{(t-x)^\alpha}dt\right]dx, \qquad (9)$$

В силу (2) из (9) имеем

$$\int_0^1 h(x)\left[\frac{1}{(1-\alpha)}\int_1^x \frac{w'(t)}{(t-x)^\alpha}dt\right]dx = \int_0^1 h(x)\cdot {}_cD_{1x}^\alpha w(x)dx. \qquad (10)$$

Из равенства (7) и (10) следует справведливость тождества (6).

Лемма 1 доказана. □

Умножая Lu на некоторую функцию υ, запишем слагаемые в виде

$$\upsilon u_{xx} = (\upsilon u_x)_x - (\upsilon_x u)_x + u\upsilon_{xx}, \quad \upsilon u_{yy} = (\upsilon u_y)_y - (\upsilon_y u)_y + u\upsilon_{yy}.$$

Используя, последних выражений с учетом леммы 1 получаем сопряженный оператор на операторе Lu:

$$L^*\upsilon = \begin{cases} {}_cD_{1x}^\alpha \upsilon - \upsilon_{yy}, & y>0, \\ \upsilon_{xx} - \upsilon_{yy}, & y<0, \end{cases}$$

где ${}_cD_{1x}^\alpha \upsilon$—определяется из (2).

Тогда сопряженной задаче к задаче M_α в области Ω ставится, следующим образом.

Задача M_α^*. *Найти решения уравнения*

$$L^*\upsilon = g(x,y), \tag{11}$$

удовлетворяющее условиям

$$\upsilon|_{A_0B_0\cup BB_0\cup BC} = 0 \tag{12}$$

$$(\upsilon_x + \upsilon_y)|_{AC} = 0 \tag{13}$$

и на линии изменении типа удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}\upsilon(x,y) = \lim_{y\to-0}\upsilon(x,y), \quad (x,0)\in\bar{I}, \quad \lim_{y\to+0}\upsilon_y(x,y) = \lim_{y\to-0}\upsilon_y(x,y), \quad (x,0)\in I. \tag{14}$$

В дальнейшем всюду относительно кривой $\gamma(x)$ будем предполагать, что она принадлежит классу функций $C^1(0,l)$ и таких что $(x-\gamma(x))$– монотонно возрастает.

Определение 2. Классическим решением задачи M_α^* назовем функцию из класса $P_1^* = \left\{\upsilon(x,y):\ \upsilon(x,y)\in C^1(\bar{\Omega})\cap C_y^2(\Omega_0)\cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_1)\right\}$, удовлетворяющую краевым условиям (12), (13) и (14) задачи M_α^* и обращающую уравнение (11) в тождество.

Определение 3. Функцию $\upsilon\in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи* M_α^*, если существует последовательность функций $\{\upsilon_n(x)\}$, $\upsilon_n\in P_1^*$, удовлетворяющих краевым условиям (12), (13) задачи M_α^*, такая, что последовательности υ_n и $L\upsilon_n$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к функциям υ и g соответственно.

3. Существования и единственность решения задачи

Теорема 1. *а) для любой функций* $g(x,y)\in C^1(\Omega)$, $g(B)=0$ *существует единственное классическое решение* $\upsilon(x,y)$ *задачи* M_α^* *и оно удовлетворяет неравенству:*

$$\|\upsilon\|_1 \le c\,\|g\|_0 \tag{15}$$

и представлено в виде

$$\upsilon(x,y) = \iint_\Omega K^*(x,y,x_1,y_1)g(x_1,y_1)dx_1dy_1 = (L_1^*)^{-1}f, \tag{16}$$

где $K^*(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$.
б) для любой функций $g(x,y)\in L_2(\Omega)$ *существует единственное сильное решение* $\upsilon(x,y)$ *задачи* M_α^*. *Это решение принадлежит классу* $P_2^* = \left\{\upsilon(x,y):\ \upsilon(x,y)\in W_2{}^1(\Omega)\cap W_{2\,x,y}^{1,2}(\Omega_0)\cap C(\bar{\Omega})\right\}$, *удовлетворяет неравенству* (15) *и представимо в виде* (16).

Доказательство. В параболической части области рассмотрим первой краевой задачи: найти в области Ω_0 решение уравнение

$${}_cD_{0x}^\alpha\upsilon - \upsilon_{yy} = g(x,y), \tag{17}$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\upsilon|_{A_0B_0\cup BB_0}=0 \tag{18}$$

и неоднородному краевому условию

$$\upsilon(x,0)=\tau(x),\quad (x,0)\in\bar{I}. \tag{19}$$

Считая функцию $\tau(x)$ известной, вычислим $\nu(x)=\upsilon_x(x,0)$.

Решение начально-краевой задачи с условиями (18) и (19) для уравнения (17) в области Ω_0 имеет вид [9]:

$$\upsilon(x,y)=\int_x^1 G_{y_1}(x_1,y;x,0)\tau(x_1)dx_1+\int_x^1 dx_1\int_0^1 g(x_1,y_1)G(x_1,y;x,y_1)dy_1, \tag{20}$$

где $\tau(1)=0$, а $G(x_1,y;x,y_1)$—функции Грина первой краевой задачи для уравнения (17) в области Ω_0, представимая в виде

$$G(x_1,y;x,y_1)=\frac{(x_1-x)^{\beta-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y-y_1+2n|}{(x_1-x)^{\beta}}\right)-e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y+y_1+2n|}{(x_1-x)^{\beta}}\right)\right]. \tag{21}$$

здесь $\beta=\alpha/2$, а $e_{\sigma,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)$ - функция типа Райта. Она имеет вид:

$$e_{\sigma,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(\sigma n+\mu)(\delta-\varepsilon n)},\ \ \sigma>\varepsilon,\quad \sigma>0.$$

Дифференцируя (20) по y и устремляя y к 0, получим

$$\nu(x)=\lim_{y\to+0}\upsilon_y(x,y)=$$

$$=\lim_{y\to+0}\left[\int_x^1 G_{y_1y}(x_1,y;x,0)\tau(x_1)dx_1+\int_x^1 dx_1\int_0^1 g(x_1,y_1)G_y(x_1,y;x,y_1)dy_1\right]. \tag{22}$$

Теперь вычислим функции $G_y(x_1,y;x,y_1)$ и $G_{y_1y}(x_1,y;x,0)$. В силу формулы [9]:

$$\frac{d}{dz}e_{\nu,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)=-\frac{1}{\varepsilon z}\left[e_{\alpha,\varepsilon}^{\mu,\delta-1}(z)+(1-\delta)e_{\alpha,\varepsilon}^{\mu,\delta}(z)\right] \tag{23}$$

имеем

$$G_{y_1}(x_1,y;x,y_1)=\frac{1}{2\beta(x_1-x)}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{sign}(y-y_1+2n)(x_1-x)^{\beta}}{|y-y_1+2n|}\left[e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(z)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-\beta)e_{1,\beta}^{1,\beta}(z)\right]+\frac{\mathrm{sign}(y+y_1+2n)(x_1-x)^{\beta}}{|y+y_1+2n|}\cdot\left[e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(\bar{z})+(1-\beta)e_{1,\beta}^{1,\beta}(\bar{z})\right]\right], \tag{24}$$

где $z=-\frac{|y-y_1+2n|}{(x_1-x)^{\beta}},\quad \bar{z}=-\frac{|y+y_1+2n|}{(x_1-x)^{\beta}},$

$$\frac{dz}{dy_1}=\frac{\mathrm{sign}(y-y_1+2n)}{(x_1-x)^{\beta}},\quad \frac{d\bar{z}}{dy_1}=-\frac{\mathrm{sign}(y+y_1+2n)}{(x_1-x)^{\beta}}.$$

Положив в (24) $y_1 = 0$, а затем применив формулы [9]:

$$e_{1,\varepsilon}^{1,\delta-1}(\theta) + (1-\delta)e_{1,\varepsilon}^{1,\delta}(\theta) = -\varepsilon\theta e_{1,\varepsilon}^{1,\delta-\varepsilon}(\theta), \tag{25}$$

с учетом $\delta = \beta, \quad \theta = \tilde{z}$, находим

$$e_{1,\beta}^{1,\beta-1}(\tilde{z}) + (1-\beta)e_{1,\beta}^{1,\beta}(\tilde{z}) = \beta\frac{|y+2n|}{(x_1-x)^\beta}e_{1,\beta}^{1,0}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} = -\frac{|y+2n|}{(x_1-x)^\beta}, \tag{26}$$

$$G_{y_1}(x_1,y;x,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sign}(y+2n)}{x_1-x}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|y+2n|}{(x_1-x)^\beta}\right). \tag{27}$$

Дифференцируя (27) по y с учетом формулу:

$$\frac{d}{dz}e_{1,\beta}^{1,\delta}(z) = e_{\alpha,\beta}^{1,\delta-\beta}(z), \tag{28}$$

учитывая

$$z = -|y+2n|(x-x_1)^{-\beta}, \quad z'_y = -\operatorname{sign}(y+2n)(x-x_1)^{-\beta},$$

имеем

$$G_{y_1y}(x_1,y;x,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{(x_1-x)^{1+\beta}}e_{1,\beta}^{1,-\beta}\left(-\frac{|y+2n|}{(x_1-x)^\beta}\right) \tag{29}$$

а затем применив формулы

$$s^{\delta-2}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta-1}(c\,s^{-\beta}) = \frac{d}{ds}\left(s^{\delta-1}e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(c\,s^{-\beta})\right), \tag{30}$$

с учетом $\mu = 1$, $\delta = 1-\beta$, $\alpha = 1$, $s = x - x_1$, $c = |y+2n|$, получим

$$G_{y_1y}(x_1,y;x,0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d(x_1-x)}\left[-\frac{1}{(x_1-x)^\beta}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|y+2n|}{(x_1-x)^\beta}\right)\right]. \tag{31}$$

Положив в (31) $y = +0$, имеем

$$G_{y_1y}(x_1,+0,x,0) = \frac{d}{dx_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x_1-x)^\beta}\,e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{|2n|}{(x_1-x)^\beta}\right)\right]. \tag{32}$$

Подставлля (32) в (22), а затем интегруя по частям с учетом $\tau(1) = 0$, получим

$$\upsilon_y(x,0) = \nu(x) = -\int_x^1 K(t-x)\tau'(t)\,dt + \Phi_0(x). \tag{33}$$

где

$$K(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^{-\beta}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-|2n|\Big/x^\beta\right), \tag{34}$$

$$\Phi_0(x) = \int_x^1 dx_1\int_0^1 g(x_1,y_1)G_y(x_1,0,x,y_1)\,dy_1, \tag{35}$$

$$G_y(x_1,0,x,y_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sign}(y_1+2n)}{(x_1-x)}\;e_{1,\beta}^{1,0}\left\{-\frac{|y_1+2n|}{(x_1-x)^\beta}\right\}. \tag{36}$$

Решение задачи M^*_α в области Ω_1 ищем в виде

$$\upsilon(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau(\xi)+\tau(\eta)-\int_\xi^\eta \nu(t)dt\right]-\int_\xi^\eta d\xi_1\int_{\xi_1}^\eta g_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1, \tag{37}$$

где

$$\xi=x+y,\ \eta=x-y,\ 4g_1(x,y)=g\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x-y}{2}\right). \tag{38}$$

На основание (12) и (13) из (37) находим

$$\nu(\xi)=-\tau'(\xi)-2\int_\xi^{\lambda^*(\xi)} g_1(\xi,\eta_1)d\eta,\quad 0\le\xi\le 1, \tag{39}$$

где $\eta=\lambda^*(\xi)$, $0\le\xi\le\xi_0$, $\lambda^*(\xi_0)=1$ уравнение кривой AC в характеристических переменных ξ, η и $\lambda^*(\xi)\equiv 1$, $\xi_0\le\xi\le 1$.

Подставляя полученное выражение $\nu(\xi)$ в (37), получим

$$\upsilon(x,y)=\int_\xi^\eta d\xi_1\int_\xi^{\lambda^*(\xi)} g_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1+\tau(\eta), \tag{40}$$

здесь ξ и η— определяются из (38).

Исключая функцию $\nu(x)$ из соотношений (33) и (39), получаем интегральное уравнение относительно $\tau'(x)$:

$$\tau'(x)-\int_x^1 K(t-x)\tau'(t)dt=\Phi(x), \tag{41}$$

где

$$\Phi(x)=-2\int_x^{\lambda^*(\xi)} g_1(x,\eta_1)d\eta_1-\Phi_0(x). \tag{42}$$

Принимая во внимание формуле

$$e^{\mu,\delta}_{\sigma,\varepsilon}(0)=(\Gamma(\delta)\Gamma(\mu))^{-1},$$

из (34) следует

$$K(x)=\frac{1}{(1-\beta)}x^{-\beta}+\sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0.}}^{+\infty}\frac{1}{x^\beta}e^{1,1-\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|2n|}{x^\beta}\right),$$

Очевидно, что ядра $K(t-x)$ интегрального уравнения (41) имеет слабой особенностью.

Действительно, в силу формулы [9, стр.33, (2.2.38)]:

$$y^{-\beta}e^{1,1-\beta}_{1,\beta}(0)\le C_1y^{-\beta},\qquad n=0,$$

$$x^{\sigma-1}y^{-\beta}e^{\sigma,1-\beta}_{\sigma,\beta}\left(-\lambda x^\sigma y^{-\beta}\right)\le C_2y^\beta,\qquad n\neq 0. \tag{43}$$

из (34) с учетом $\sigma = 1$, $\lambda = -1$, $x = |2n|$, $y = x - \xi$, получим оценка ядра

$$|K(t-x)| \leq C_3(t-x)^{-\beta}\ . \tag{44}$$

Ограничения, наложенные правую часть уравнения (11) позволяют утверждать, что $\Phi(x) \in C^1(0,1)$.

Таким образом, задача M^*_α эквивалентно (в смысли однозначной разрешимости) редуцирована к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода (41) со слабой особенностью.

Отсюда согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [21] заключаем, что интегральное уравнение (41) однозначно разрешимо в классе $\tau'(x) \in C^1(0,1)$ и его решение дается формулой

$$\tau'(x) = \Phi(x) + \int_x^1 R(t-x)\Phi(t)dt, \tag{45}$$

где $R(t-x)$ - резольвента ядра уравнения (41):

$$R(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(x), \quad K_1(x) = K(x), \quad K_{j+1}(x) = \int_x^1 K_1(t-x)K_j(t)dt. \tag{46}$$

На основания (44) из (46) имеем

$$|R(t-x)| \leq C_4(t-x)^{-\beta}\ . \tag{47}$$

Интегрируя (45) от x до 1 с учетом $\tau(1) = 0$ получим

$$\tau(x) = \int_x^1 \Phi(r)R_1(r-x)dr, \quad (x,0) \in I, \tag{48}$$

где

$$R_1(r-x) = -1 - \int_x^r R(r-s)ds. \tag{49}$$

В силу (47) из (49) получаем

$$|R_1(r-x)| \leq 1 + C_5(r-x)^{1-\beta}. \tag{50}$$

После определения функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из (45) и (39) соответственно, решение задачи M^*_α можно восстановить в области Ω_0 как решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка (см.(20)) а в Ω_1 как решение задачи Коши для уравнения (1) [14].

Подставлля (42) в (48), а затем используя кратные интегральные свойства (изменяем порядок интегрирования), получим

$$\tau(x) = 2\int_x^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\lambda^*(\xi)} R_1(\xi_1 - x)g_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1 + \int_x^1 dx_1 \int_0^1 g(x_1,y_1)G_1(x_1,\eta,y_1)dy_1. \tag{51}$$

где

$$G_1(x_1,\eta,y_1) = \int_\eta^{x_1} G_y(x_1,0,t,y_1)R_1(t-\eta)dt. \tag{52}$$

Подставляя (51) в (20) и (40) получаем

$$\upsilon(x,y)=2\int_x^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^{\lambda^*(\xi)} g_1(\xi_1,\eta_1)G_3(\xi_1,x,y)d\eta_1+$$

$$+\int_x^1 dx_1\int_0^1 g(x_1,y_1)G_2(x_1,y;x,y_1)dy_1,\ y>0, \tag{53}$$

$$\upsilon(x,y)=\int_\xi^\eta d\xi_1\int_\xi^{\lambda^*(\xi)} g_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1+2\int_\eta^1 d\xi_1\int_{\xi_1}^{\lambda^*(\xi)} R_1(\xi_1-\eta)g_1(\xi_1,\eta_1)d\eta_1+$$

$$+\int_\eta^1 dx_1\int_0^1 g(x_1,y_1)G_1(x_1,\eta,y_1)dy_1,\quad y<0, \tag{54}$$

где

$$G_2(x_1,y;x,y_1)=G(x_1,y;x,y_1)+\int_x^{x_1} G_1(x_1,x,y_1)G_{y_1}(t,y;x,0)dt, \tag{55}$$

$$G_3(\xi_1,x,y)=\int_x^{\xi_1} G_{y_1}(x_1,y;x,0)R_1(\xi_1-x_1)dx_1, \tag{56}$$

а ξ и η— определяются из (38).

Теперь из (53) и (54) после некоторых вычислений получим (16). В этой формуле

$$K^*(x,y,x_1,\eta)=\theta(y)\theta(y_1)K_{00}(x,y,x_1,y_1)+\theta(y)\theta(-y_1)K_{01}(x,y,x_1,y_1)+$$

$$+\theta(-y)\theta(y_1)K_{10}(x,y,x_1,y_1)+\theta(-y)\theta(-y_1)K_{11}(x,y,x_1,y_1), \tag{57}$$

$$\theta(y)=1,\ \ y>0 \qquad \text{и} \qquad \theta(y)=0,\ \ y<0.$$

где

$$K_{00}(x,y,x_1,y_1)=\theta(x_1-x)G_2(x_1,y;x,y_1),$$

$$K_{01}(x,y,x_1,y_1)=\theta(\xi_1-x)G_3(\xi_1,x,y),$$

$$K_{10}(x,y,x_1,y_1)=\theta(x_1-\eta)G_1(x_1,\eta,y_1),$$

$$K_{11}(x,y,x_1,y_1)=\frac{1}{2}\theta(\xi_1-\xi)\theta(\eta-\xi_1)\theta(\eta_1-\eta)+\theta(\xi_1-\eta)R_1(\xi_1-\eta).$$

Покажем теперь, что $K(x,y,x_1,y_1)\in L_2(\Omega\times\Omega)$. Для этого нам нужно показать, что $K_{00}(x,y,x_1,y_1)$, $K_{01}(x,y,x_1,y_1)$, $K_{10}(x,y,x_1,y_1)$, $K_{11}(x,y,x_1,y_1)$ принадлежат классу $L_2(\Omega\times\Omega)$. Функция $K(x,y,x_1,y_1)$ состоит из комбинации функций $G_{y_1}(x_1,y;x,0)$, $G_y(x_1,0,x,y_1)$, $G_2(x_1,y;x,y_1)$, $G_1(x_1,\eta,y_1)$, $R_1(\xi_1-\eta)$, $G_3(\xi_1,x,y)$. Находим оценки этих функций.

Из вида функции Грина (21) , (27) и (36) при $n=0$ имеем

$$\bar{G}(x_1,y;x,y_1)=\frac{(x_1-x)^{\beta-1}}{2}e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y-y_1|}{(x_1-x)^\beta}\right)-e_{1,\beta}^{1,\beta}\left(-\frac{|y+y_1|}{(x_1-x)^\beta}\right),$$

$$\bar{G}_{y_1}(x_1,y;x,0)=\frac{sign(y)}{x_1-x}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{|y|}{(x_1-x)^\beta}\right),$$

$$\bar{G}_y(x_1,0,x,y_1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sign}(y_1+2n)}{(x_1-x)}\,e^{1,0}_{1,\beta}\left\{-\frac{|y_1+n|}{(x_1-x)^{\beta}}\right\}.$$

Отсюда в силу [9, стр.29, (2.2.24)]:

$$\left|z^{\mu-1}t^{\delta-1}e^{\mu,\delta}_{\sigma,\beta}\left(-\frac{z^{\sigma}}{t^{\beta}}\right)\right|\le C_1 z^{\mu-\sigma\theta-1}t^{\delta+\beta\theta-1},\quad \theta\in[0,1]. \tag{58}$$

получим оценки

$$\left|\bar{G}(x_1,y;x,y_1)\right|\le C_5|y-y_1|^{-\theta}(x_1-x)^{\beta+\beta\theta-1}, \tag{59}$$

$$\left|\bar{G}_{y_1}(x_1,y;x,0)\right|\le C_7|y|^{-\theta}(x_1-x)^{\beta\theta-1}, \tag{60}$$

$$\left|\bar{G}_y(x_1,0,x,y_1)\right|\le C_6|y_1|^{-\theta}(x_1-x)^{\beta\theta-1}. \tag{61}$$

Используя (50), (52), (61) мы находим оценку для функции $G_1(x,x_1,y_1)$ при $n=0$:

$$|G_1(x_1,\eta,y_1)|\le C_{10}|y_1|^{-\theta}(x_1-\eta)^{\beta\theta}+C_{11}|y_1|^{-\theta}(x_1-\eta)^{\beta\theta-\beta+1}. \tag{62}$$

В силу (59), (60), (62) из (55) при $n=0$ получим неравенства

$$|G_2(x_1,y;x,y_1)|\le C_5|y-y_1|^{-\theta}(x_1-x)^{\beta+\beta\theta-1}+C_{12}|y_1|^{-\theta}|y|^{-\theta}(x_1-x)^{2\beta\theta}+$$
$$+C_{13}|y_1|^{-\theta}|y|^{-\theta}(x_1-x)^{2\beta\theta-\beta+1}, \tag{63}$$

Принимая во внимании (50), (60) из (56) следует оценку$G_3(\xi_1,x,y_1)$ при $n=0$:

$$|G_3(\xi_1,x,y)|\le C_{14}|y|^{-\theta}(\xi_1-x)^{\beta\theta}+C_{15}|y|^{-\theta}(\xi_1-x)^{\beta\theta-\beta+1}, \tag{64}$$

Из (57) непосредственным вычислением имеем

$$||K_{00}(x,y,x_1,y_1)||^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^y|K_{00}(x,y,x_1,y_1)|^2\,dy_1=$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^y|G_2(x_1,y,x,y_1)|^2\,dy_1<\infty,$$
$$||K_{01}(x,y,x_1,y_1)||^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^1|K_{01}(x,y,x_1,y_1)|^2\,dy_1=$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x d\xi_1\int_0^y|G_3(\xi_1,x,y,)|^2\,d\eta_1<\infty,$$
$$||K_{10}(x,y,x_1,y_1)||^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^y|K_{10}(x,y,x_1,y_1)|^2\,dy_1=$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^y|G_1(x_1,\eta,y_1)|^2\,dy_1<\infty,$$
$$||K_{11}(x,y,x_1,y_1)||^2_{L_2(\Omega\times\Omega)}=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^x dx_1\int_0^y|K_{11}(x,y,x_1,y_1)|^2\,dy_1\le$$
$$\le\frac{1}{2}+\int_0^1 dx\int_0^1|R_1(x-\eta_1)|^2\,d\eta_1<\infty,$$

Отсюда и из (57) следует, что $K^*(x,y,\xi,\eta) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Теперь покажем справедливость неравенство (15). Для этого расмотрим выражение

$$\Phi_1(x) = 2\int_0^x g_1(t,x)\,dt,$$

используя неравенства Коши-Буняковского

$$\int_0^1 |\Phi_1(x)|^2\,dx = \int_0^1 \left[2\int_0^x g_1(t,x)\,dt\right]^2 dx \le 4\int_0^1 \left[\int_0^x |g_1(t,x)|^2\,dt \int_0^x dt\right] dx \le$$

$$\le 4\int_0^1 dx \int_0^x |g_1(t,x)|^2\,dt. \tag{65}$$

Из (65) следует, что

$$\|\Phi_1(x)\|_{L_2(0,1)} \le C\,\|g\|_{L_2(\Omega_1)}.$$

Через $z(x,y)$ обозначим решение в Ω_0 задачи

$${}_cD_{0x}^{\alpha} z - z_{yy} = g, \quad z|_{AA_0 \cup A_0B_0 \cup AB} = 0,$$

Очевидно, что $\Phi_0(x) = \lim\limits_{y\to 0} z_y(x,y)$.

Решение задачи $z_x - z_{yy} = g$, $z|_{AA_0 \cup A_0B_0 \cup AB} = 0$, в классе $W_2^{1,2}(\Omega_0)$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству [8]:

$$\|z\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|z_x\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|z_y\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|z_{yy}\|^2_{L_2(\Omega_0)} \le c\,\|g\|_{L_2(\Omega_0)}. \tag{66}$$

Учитывая $\left\|{}_cD_{0x}^{\alpha} z\right\|^2_{L_2(\Omega_0)} \le c\,\|g\|_{L_2(\Omega_0)}$ (см. [10]) неравенства, из (66) получаем

$$\|z\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|{}_cD_{0x}^{\alpha} z\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|z_y\|^2_{L_2(\Omega_0)} + \|z_{yy}\|^2_{L_2(\Omega_0)} \le c\,\|g\|_{L_2(\Omega_0)}. \tag{67}$$

Используя очевидно равенство

$$z_y(x,0) = z_y(x,y) - \int_0^y z_{yy}(x,t)\,dt$$

и неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\|z_y(x,0)\|^2{}_{L_2(0,1)} \le \int_0^1 |z_y(x,0)|^2\,dx = \int_0^1 dy \int_0^1 |z_y(x,0)|^2\,dx \le$$

$$\le \tilde{C}\left(\|z_y(x,y)\|_{L_2(\Omega_0)} + \|z_{yy}(x,y)\|_{L_2(\Omega_0)}\right). \tag{68}$$

Из (67) и (68) имеем

$$\|\Phi_0(x)\|_{L_2(0,1)} \equiv \|z_y(x,0)\|^2_{L_2(0,1)} \le c\,\|g\|^2_{L_2(\Omega_0)}.$$

Поэтому из (45) имеет

$$\left\|\tau'(x)\right\|_{L_2(0,1)} \le C\,\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \le C\,\|g\|_0.$$

Отсюда и из свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнения (17) следует, что решение задачи M^*_α принадлежит классу P^*_2 и удовлетворяет неравенству (15).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как $C^1_0(\bar{\Omega})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ существует последовательность функции $g_n \in C^1_0(\bar{\Omega})$ таких, что $\|g_n - g\| \to 0$, $n \to 0$. Здесь $C^1_0(\bar{\Omega})$- множество дифференцируемых в области Ω функции, равные нулю в окрестности $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$-граница области Ω). Обозначим $v_n = (L^*_1)^{-1} g_n$. При $g_n \in C^1_0(\bar{\Omega})$ нетрудно видеть, что $\Phi_n(x) \in C^1[0,1]$. Здесь v_n - классическое решение задачи M^*_α с правой частью g_n. Поэтому уравнение (41) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $C^1[0,1]$.

Из свойств решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка и решение задачи Коши для волнового уравнения, принимая во внимание представления (20) и (40), получаем, что $v_n \in P^*_1$ для всех $g_n \in C^1_0(\bar{\Omega})$.

В силу неравенства (15) имеем

$$\|v_n - v\| \leq C\,\|g_n - g\| \to 0.$$

Следовательно, $\{v_n\}$ - есть последовательность, отвечающая определению сильного решения, задача M^*_α- сильно разрешимо для любой правой части g, и принадлежит классу P^*_2.

Теорема 1 доказана. □

4. Вольтерровость задачи M^*_α

Определение 4. (см. [16]).

1. Пусть $S \subset \Omega \times \Omega$. Функцию $K(P,Q)$ назовем $S-$ядром, если $K(N,Q) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $K(N,Q) = 0$ при $(N,Q) \notin S$.

2. Открытое множество $S \subset \Omega \times \Omega$ назовем множеством типа V, если любое $S-$ядро не имеет собственных значений.

3. Если $S \subset \Omega \times \Omega$ и $S_1 = \Omega \times \Omega - \bar{S}$ ($\bar{S}$- замыкание S) одновременно являются множествами типа V, то S назовем максимальным множеством типа V.

4. Пусть $S \subset \Omega \times \Omega$. Условимся записывать $N_1 \xrightarrow{S} N_2$ ($N_2 \xrightarrow{S} N_1$), если $(N_1, N_2) \in S$ $((N_1, N_2) \notin S)$.

5. Если $S-$множество типа V и $K(N,Q)$ - $S-$ядро, то уравнение $y(N) = \lambda \int_D K(N,Q) y(Q) dQ + f(N)$ назовем обобщенным уравнением типа Вольтерра. [4]

Лемма 2. *(Теорема Нерсесян). Для того чтобы S было множеством типа V, необходимо и достаточно, чтобы для любого $k \geq 1$ из условий $N_1 \xrightarrow{S} N_2 \xrightarrow{S} N_3 \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} N_k$ следовало $N_k \xleftarrow{S} N_1$.* Используя определения 4 и леммы 2 докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Обратный оператор $(L^*_1)^{-1}$ задачи M^*_α, определяемый формулой (16) является вольтерровым.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $N_i = (x_i, y_i),\ i = \overline{1,k}$. Пусть для любого $k \geq 0$ выполняется условие

$$N_1 \xrightarrow{S} N_2 \xrightarrow{S} N_3 \xrightarrow{S} \ldots \xrightarrow{S} N_k. \tag{69}$$

Тогда при $i < j$ из условия $(N_i, N_j) \in S$ следует соотношение

$$x_i > x_j,\ \ i < j. \tag{70}$$

Докажем, что из (69) следует условие $(N_r, N_1) \notin S$. Используя явный вид (57) ядра $K(x_k, y_k; x_1, y_1)$, непосредственным вычислением убеждаемся в том, что для выполнения условия (70), достаточно, чтобы $K(x_k, y_k; x_1, y_1) = 0$. Значит из (69) для любого $k \geq 1$ следует, что $(N_k, N_1) \notin S$. Следовательно, (57) определяет S- ядро, не имеющее собственных значений, и оператор ${L_1}^{-1}$ является вольтерровым.

Теорема 2 доказана. □

Заключение

В последние годы возрос интерес к исследованию краевых задач для смешанных уравнений с оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто. В работах М. А. Садыбекова [17] и А. С. Бердышева [14] доказана сильная разрешимость и вольтерровость (отсутствие у нее собственных значений) краевых задач в области с отходом от характеристики для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа целого порядка. Как известно, исследования по краевым задачам для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка не проводились ранее. Исходя из этого, в данной работе мы исследовали сопряженной задачи в области с отходом от характеристики для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа дробного порядка. Установлены классическая, сильная разрешимость и вольтерровость сопряженной задачи.

Список литературы

1. Нахушев А. М., Салахитдинов М. С. О законе композиции операторов дробного интегродифференцирования с различными, *Доклады АН СССР*, 1998. Т. 289, № 4, С. 1313-1316.
2. Нахушев А. М. *Элементы дробного исчисления и их применения.* Нальчик: Изд. КБНЦ, 2000. 299 с.
3. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* М.: Наука, 2006.
4. Hardy G., Littlewood J. E. Some properties of fractional integrals, *Math. Z.*, 1928. vol. 6, pp. 565-606.
5. Love E. R. A third index law for fractional integrals and derivatives, *Fractional Calculus: Res. Notes Math.*, 1985, pp. 63-74.
6. Saigo M. On the Holder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives, *Math. Rep. Kyushu Univ*, 1980. vol. 12, no. 2, pp. 55–62.
7. Салахитдинов М. С., Исломов Б. И. *Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения.* Ташкент, 2009. 264 с.
8. Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* Москва, 1983. 424 с.
9. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* Москва, 2005. 199 с.
10. Самко С. Г., Килбас А. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск, 1987. 688 с.

11. Елеев В. А. Аналог задачи Трикоми для смешанных парабологипер-болических уравнений с нехарактеристической линией изменения, *Дифференциальные уравнения*, 1977. Т. 13, № 1, С. 56–163.
12. Капустин Н. Ю. Оценка решения задачи Трикоми для системы уравнений параболо-гиперболического типа, *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 265, № 3, С. 524-525.
13. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного параболо-гиперболичес-кого типа со спектральным параметром., *Дифференциальные уравнения*, 1989. Т. 25, № 1, С. 117-126.
14. Бердышев А. С. *Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанного-составного типов.* Алматы, 2015. 224 с.
15. Ильин В. А. Единственность и принадлежность классического решения смешанной задачи для самосопряженного гиперболического уравнения, *Математические заметка*, 1975. Т. 17, № 1, С. 93-103.
16. Нерсесян А. Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтерра, *Докл. АН СССР*, 1964. Т. 155, № 5, С. 1006-1009.
17. Садыбеков М. А. *Краевые задачи в областях с отходом от характеристики для уравнений гиперболического и смешанного типов второго порядка.* Докт.дисс. Ташкент, 1993.
18. Karimov E. T., Akhatov J. S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014. vol. 2014, no. 14, pp. 1–6..
19. Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области., *Научный вестник. Математика*, 2017. № 5, С. 25-30.
20. Исломов Б. И. , Абдуллаев О. Х. О нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с оператором Капуто и нелинейной нагруженной частью, *Уфимск. матем. журн.*, 2021. Т. 13, № 3, С. 45–57.
21. Михлин С. Г. *Лекции линейным интегральным уравнениям.* Москва, 1959. 232 с.

Информация об авторах

Исломов Бозор Исломович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры "Дифференциальных уравнений и математической физики" Национального Университета Узбекистана имени М. Улугбека, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-3060-3019.

Ахмадов Илхом Али угли – аспирант кафедры "Дифференциальных уравнений и математической физики" Национального университета Узбекистана имени М. Улугбека, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-5797-7424.

References

[1] Nakhushev A. M., Salakhitdinov M. S. O zakone kompozitsii operatorov drobnogo integrodifferentsirovaniya s razlichnymi nachalami. [On the law of composition of fractional integro-differentiation operators with different origins]. Doklady AN USSR, 1998, **289**, 4, 1313–1316, (In Russian)

[2] Nakhushev A. M. Elementy drobnogo ischisleniya i ikh prilozheniya. [Elements of fractional calculus and their applications], Nalchik, Izd. KBNTs, 2000, 299, (In Russian)

[3] Nakhushev A. M. Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh. [Problems with displacement for partial differential equations]. Moscow, Nauka, 2006. (In Russian)

[4] Hardy G., Littlewood J. E. Some properties of fractional integrals. Math. Z, 1928, **27**, 4, 565–606.

[5] Love E. R. A third index law for fractional integrals and derivatives. Fractional Calculus: Res. Notes Math. 138: A.C. McBride, G.F. Roach, eds Pitman Advanced Publ. Progr. Boston ets., 1985, 63–74.

[6] Saigo M. On the Holder continuity of the generalized fractional integrals and derivatives. Math. Rep. Kyushu Univ, 1980, **12**, 2, 55–62.

[7] Salakhitdinov M. S., Islomov B. I. Uravneniya smeshannogo tipa s dvumya liniyami vyrozhdeniya. [Mixed type equations with two lines of degeneracy]. Tashkent, 2009, 264 (In Russian)

[8] Mikhailov V. P. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. [Partial Differential Equations]. Moscow, 1983, 424. (In Russian)

[9] Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka. [Equations in partial derivatives of fractional order]. Moscow, 2005, 199 (In Russian)

[10] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O.I. Drobnyye integraly i proizvodnyye i nekotoryye ikh prilozheniya. [Fractional integrals and derivatives and some of their applications]. Minsk, 1987, 688 (In Russian)

[11] Eleev V. A. An analogue of the Tricomi problem for mixed parabolic-perbolic equations with a non-characteristic line of type change, Differential Equations, 1977, **13**, 1, 56–63 (In Russian)

[12] Kapustin N. Yu. Estimation of the solution of the Tricomi problem for a system of equations of parabolic-hyperbolic type. Doklady AN USSR, 1982, **265**, 3, 524–525 (In Russian)

[13] Sabitov K. B. On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. Differential Equations, 1989, **25**, 1, 117–126 (In Russian)

[14] Berdyshev A. S. Boundary problems and their spectral properties for the equation of mixed parabolic-hyperbolic and mixed-component types. Almaty, 2015, 224, (In Russian)

[15] Ilyin V. A. The unity and belonging of a classic solution to a mixed problem for the self-adjoint hyperbolic equation. Mathsaticheskie zametka, 1975, **17**, 1, 93–103, (In Russian)

[16] Nersesyan A. B. On the theory of integral equations of the Volterra type, Doklady AN USSR, 1964, **155**, 5, 1006–1009. (In Russian)

[17] Sadybekov M. A. Boundary value problems in domains with departure from the characteristic for equations of hyperbolic and mixed types of the second order. Doct. Diss., Tashkent, 1993 (In Russian)

[18] Karimov E. T., Akhatov J. S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative. Electronic Journal of Differential Equations, 2014, 14, 1–6.

[19] Islomov B. I., Ubaidullaev U. Sh. Boundary value problem for an equation of parabolic - hyperbolic type with a fractional order operator in the sense of Caputo in a rectangular region, Nauchny Vestnik. Mathematika, 2017, 5, 25–30. (In Russian)

[20] Islomov B. I., Abdullaev O. Kh. On nonlocal problems for a third-order equation with the Caputo operator and a nonlinear loaded part. Ufimsk. mate. Journal, 2021, **13**, 3, 45-57 (In Russian)

[21] Mikhlin S. G. Lektsiya lineynym integral'nym uravneniyem. [Lectures linear integral equations]. Moscow, Mattizgiz, 1959, 232 (In Russian)

Information about authors

Islomov Bozor Islomovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor of the Department of "Differential Equations and Mathematical Physics" of the National University of Uzbekistan named after Ulugbek, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-3060-3019.

Akhmadov Ilkhom Ali ugli – Doctoral student (PhD) of the Department of "Differential Equations and Mathematical Physics" of the National University of Uzbekistan, named after Ulugbek, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-5797-7424.