МАТЕМАТИКА
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-58-68
Научная статья
Полный текст на русском языке
УДК 517.956.6

Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде

*С. З. Джамалов**, *Б. К. Сипатдинова**

Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, Республика Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4б.

Аннотация. Как известно, в работе А.В. Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работах Ф.И. Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. Близкие по постановке задачи для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка, имеются в работах А.Н. Терехова, С.Н. Глазатова, М.Г. Каратопраклиевой и С.З. Джамалова. В этих работах для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка изучены нелокальные краевые задачи в ограниченных областях. Такие задачи для уравнения смешанного типа первого рода в трехмерном случае (в частности, для уравнения Трикоми) в неограниченных областях изучены в работах С.З. Джамалова и Х. Туракулова. Для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях нелокальные краевые задачи в многомерном случае практически не исследованы. С этой целью в данной работе в неограниченном параллелепипеде формулируется и изучается нелокальная краевая задача периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε-регуляризации"и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, докажем единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа второго рода, нелокальная краевая задача, преобразование Фурье, методы "ε -регуляризации" и априорных оценок.

Получение: 11.08.2022; Исправление: 05.12.2022; Принятие: 24.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Джамалов С. З., Сипатдинова Б. К. Об одной нелокальной краевой задаче периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 58-68. EDN: GMDAQU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-58-68.

Финансирование. Авторы признательны за финансовую поддержку Министерству инновационного развития Республики Узбекистан, Грант №. Ф-ФА-2021-424.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: siroj63@mail.ru, sbiybinaz@mail.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-58-68
Research Article
Full text in Russian
MSC 35B10

On a nonlocal boundary value problem of periodic type for the three-dimensional mixed-type equations of the second kind in an infinite parallelepiped

S. Z. Dzhamalov*, B. K. Sipatdinova*

Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Universitet str., 4b, Uzbekistan

Abstract. As is known, A.V. Bitsadze in his studies pointed out that the Dirichlet problem for a mixed-type equation, in particular for a degenerate hyperbolic-parabolic equation, is ill-posed. The question naturally arises: is it possible to replace the conditions of the Dirichlet problem with other conditions covering the entire boundary, which will ensure the well-posedness of the problem? For the first time, such boundary value problems (nonlocal boundary value problems) for a mixed-type equation were proposed and studied in the works of F.I. Frankl when solving the gas-dynamic problem of subsonic flow around airfoils with a supersonic zone ending in a direct shock wave. Problems close in formulation to a mixed-type equation of the second order were considered in the studies by A.N. Terekhov , S.N. Glazatov, M.G. Karatopraklieva and S.Z. Dzhamalov. In these papers, nonlocal boundary value problems in bounded domains are studied for a mixed-type equation of the second kind of the second order. Such problems for a mixed-type equation of the first kind in the three-dimensional case (in particular, for the Tricomi equation) in unbounded domains are studied in the works of S.Z. Dzhamalov and H. Turakulov. For mixed-type equations of the second kind in unbounded domains, nonlocal boundary value problems in the multidimensional case are practically not studied. In this article, nonlocal boundary value problem of periodic type for a mixed-type equation of the second kind of the second order, is formulated and studied in an unbounded parallelepiped. To prove the uniqueness of the generalized solution, the method of energy integrals is used. To prove the existence of a generalized solution, the Fourier transforms is used and as a result, a new problem is obtained on the plane. And for the solvability of this problem, the methods of "ε-regularization"and a priori estimates are used. The uniqueness, existence, and smoothness of a generalized solution of a nonlocal boundary value problem of periodic type for a three-dimensional mixed-type equation of the second kind of the second order are proved using above-mentioned methods and Parseval equality.

Key words: mixed-type equation of the second kind, nonlocal boundary value problem, Fourier transform, methods of "ε-regularization"and a priori estimates.

Received: 11.08.2022; Revised: 05.12.2022; Accepted: 24.03.2023; First online: 15.04.2023

For citation. Dzhamalov S. Z., Sipatdinova B. K. On a nonlocal boundary value problem of periodic type for the three-dimensional mixed-type equations
of the second kind in an infinite parallelepiped. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 58-68. EDN: GMDAQU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-58-68.

Funding. The authors acknowledge financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant no. F-FA-2021-424.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: siroj63@mail.ru, sbiybinaz@mail.ru

Введение

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Как близкие по постановке к изучаемой, задачи для уравнения смешанного типа второго рода исследованы в ограниченных областях в работах [3]- [6].

В данной работе с использованием результатов работ [5], [6] изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном параллелепипеде.

В области

$$G=(0,1)\times(0,T)\times\mathbb{R}=Q\times\mathbb{R}=\{(x,t,z);x\in(0,1),0<t<T<+\infty,z\in\mathbb{R}\}$$

рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu=k(t)u_{tt}-\Delta u+a(x,t)\,u_t+c(x,t)\,u=f(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа. Пусть $k(0)\leq 0\leq k(T)$.
Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри интервала $[0,T]$ не налагается никаких ограничений [7].
Пусть все коэффициенты уравнения (1)- достаточно гладкие функции в области Q, а именно $k(t)\in C^1[0,T]$, $a(x,t),c(x,t)\in C^1(\overline{Q})\cap C(\overline{Q})$.

В дальнейшем для решения поставленной задачи нам необходимо ввести определения нескольких функциональных пространств и обозначений.

Обозначим через

$$\hat{u}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(x,t,z)\,e^{-i\lambda z}dz$$

преобразование Фурье по переменной z функции $u(x,t,z)$, а через

$$u(x,t,z)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)\,e^{i\lambda z}d\lambda$$

- обратное преобразование Фурье. Теперь с помощью преобразования Фурье определим пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda|^2)^s\cdot\|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q)}\,d\lambda, \tag{A}$$

где $s, l-$ любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q)$ (при $l = 0, W_2^0(Q) = L_2(Q)$) определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|_l^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)} = \sum_{|\alpha|\le l} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

где $\alpha-$ мультииндекс, $D^\alpha-$ обобщенная производная по переменным x и t.

Очевидно, что пространство $W_2^{l,s}(G)$ с нормой (A) является гильбертовым пространством [8]- [10].

Нелокальная краевая задача периодического типа

Найти обобщённое решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(G)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma\, u|_{t=0} = u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$D_x^p\, u|_{x=0} = D_x^p\, u|_{x=1}\,, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_x^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x^p}$, $D_x^0 u = u$, $\gamma-$некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$

абсолютно интегрируема по z на R при любом $(x,t) \in \overline{Q}$. (4)

Определение 1. Обобщенным решением задачи (1)-(4) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^2(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду, с условиями (2),(4)

Теорема 1. *(Основной результат). Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения* (1)*:*
$2a(x,t) - |k_t| + \mu k(t) \ge \delta_1 > 0$, $\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) \ge \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда для любой функции* $f \in W_2^{1,3}(G)$, *такой, что* $\gamma f(x,0,z) = f(x,T,z)$, *существует единственное обобщенное решение задачи* (1)-(4) *из пространства* $W_2^{2,3}(G)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:
1. Для задачи (1)-(4) формально по переменным z применим преобразование Фурье и в области Q получим новую задачу (5)-(7).
2. Изучим методами "ε -регуляризации" априорных оценок и Галеркина однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения третьего порядка с малым параметром (вспомогательная задача).
3. Затем с помощью этой вспомогательной задачи докажем однозначную разрешимость задачи (5)-(7).
4. Используя однозначную разрешимость задачи (5)-(7), дадим обоснование сходимости интегралов Фурье и докажем разрешимость задачи (1)-(4).

Приступим к реализации этой схемы.

Применяя для задачи (1)-(4) преобразование Фурье по переменным z, получим в области $Q = (0,1)\times(0,T)$ следующую задачу

$$L\hat{u} = k(t)\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x,t)\,\hat{u}_t + \left(c(x,t) + \lambda^2\right)\hat{u} = \hat{f}(x,t,\lambda), \tag{5}$$

$$\gamma\,\hat{u}|_{t=0} = \hat{u}|_{t=T}; \tag{6}$$

$$D_x^p\,\hat{u}|_{x=0} = D_x^p\,\hat{u}|_{x=1} = 0; \quad p = 0,1, \tag{7}$$

где $\lambda \in \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$,

$$\hat{f}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,t,z)\,e^{-i\lambda z}dz$$

-преобразование Фурье по переменной z функции $f(x,t,z)$.

Однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (5)-(7) изучены в работах [5], [6]. *Кратко приведем эти результаты.* $\square$

Единственность решения задачи (5)-(7)

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения* (5)*:* $2a(x,t) - k_t + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0$, $\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$, $c\,(x,0) \leq c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда, если для любой функции* $\hat{f}(x,t,\lambda) \in L_2(Q)$ *существует решение задачи* (5)-(7) *из пространства* $W_2^2(Q)$, *то оно единственное.*

Доказательство. Докажем единственность решения задачи (5)-(7) с помощью метода интеграла энергии. Пусть существует решение задачи (5)-(7) из $W_2^2(Q)$.

Рассмотрим тождество

$$2\,(L\hat{u}, e^{-\mu t}\hat{u}_t)_0 = 2\,(\hat{f}, e^{-\mu t}\hat{u}_t)_0, \tag{8}$$

где $\mu = const > 0$.

В силу условий теоремы 2 и интегрируя по частям тождество (8), легко получить следующее неравенство

$$\begin{gathered} 2\int\limits_Q L\hat{u}\cdot e^{-\mu t}\cdot\hat{u}_t dxdt \;\geq\; \int\limits_{Q_1} e^{-\mu t}\{(2a(x,t) - k_t(t) + \mu k(t))\cdot\hat{u}_t^2 + \mu\,\hat{u}_x^2 + \\ +(\mu\, c(x,t) - c_t(x,t) + \mu\,\lambda^2)\cdot\hat{u}^2\}\,dxdt \geq \quad \delta_0\int\limits_Q e^{-\mu t}\{\hat{u}_t^2 + \hat{u}_x^2 + \hat{u}^2\}dxdt, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\delta_0 = \min\{\delta_1, \mu, \delta_2, \lambda = 0\}$.

В левой части неравенства (9) используя неравенство Коши с σ [11], получим необходимую первую оценку

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1\,\|\hat{f}\|^2_{L_2(Q)}, \tag{10}$$

из которой следует единственность решения задачи (5)-(7) из $W_2^2(Q)$; в дальнейшем через c_i — будем обозначать положительные, вообще говоря, разные постоянные числа, отличные от нуля. ***Теорема 2 доказана.*** $\square$

Уравнение составного типа с малым параметром

Разрешимость задачи (5)-(7) докажем методом "ε-регуляризации а именно в области $Q=(0,1)\times(0,T)$ рассмотрим семейство уравнений составного типа с малым параметром

$$L_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} + L\hat{u}_\varepsilon = \hat{f}(x,t,\lambda) \tag{11}$$

и с нелокальными краевыми условиями периодического типа:

$$\gamma D_t^q\, \hat{u}_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q\, \hat{u}_\varepsilon|_{t=T}; q=0,1,2, \tag{12}$$

$$D_x^p\, \hat{u}_\varepsilon|_{x=0} = D_x^p\, \hat{u}_\varepsilon|_{x=1} = 0; p=0,1, \tag{13}$$

где ε — малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q=1,2$; $D_z^0 w = w$.

Ниже используем систему уравнений составного типа с малым параметром (11) в качестве "ε -регуляризирующего" уравнения для уравнения смешанного типа второго рода (5) [5]- [7], [12].

Определим пространство функции

$$W(Q)=\{\hat{u}_\varepsilon|;\hat{u}_\varepsilon \in W_2^2(Q),\ \frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \in L_2(Q)\},$$

удовлетворяющее соответствующим условиям (11),(12) с конечной нормой

$$|||\hat{u}_\varepsilon|||_W^2 = \varepsilon \left\| \frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \right\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2. \tag{B}$$

Очевидно, что пространство $W(Q)$ с нормой (B) является гильбертовым пространством [11].

Определение 2. Обобщенным решением задачи (11)-(13) будем называть функцию $\{\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\} \in W(Q)$, удовлетворяющую уравнению (11) почти всюду с условиями (12),(13).

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия для коэффициентов уравнения* (11)*; кроме того, пусть* $2a(x,t) - |k_t(t)| + \mu k(t) \geq \delta_1 > 0$, $\mu c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *при* $|\gamma| > 1$, $a(x,0)=a(x,T)$, $c(x,0)=c(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда для любой функции* $\hat{f}(x,t,\lambda) \in W_2^1(Q)$, *такой, что* $\gamma \cdot \hat{f}(x,0,\lambda) = \hat{f}(x,T,\lambda)$, *существует единственное обобщенное решение задачи* (11)-(13) *из пространства* $W(Q)$ *и для него справедливы следующие оценки*

III). $\varepsilon \|\hat{u}_{\varepsilon tt}\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_1^2 \leq c_1 \left\|\hat{f}\right\|_0^2$, *IV).* $\varepsilon \left\| \frac{\partial \triangle \hat{u}_\varepsilon}{\partial t} \right\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \leq c_2 \left\|\hat{f}\right\|_1^2$.

Доказательство. Доказательство теоремы 3 осуществляется поэтапно, с использованием метода Галеркина и соответствующих априорных оценок [5], [6]. *Сначала докажем* III)*—третью оценку.*

Рассмотрим тождество:

$$-2\int\limits_{Q_1} e^{-\mu t} \cdot L_\varepsilon \hat{u}_\varepsilon \cdot \hat{u}_{\varepsilon t}\, dx\, dt = -2\int\limits_{Q_1} e^{-\mu t} \cdot \hat{f} \cdot \hat{u}_{\varepsilon t}\, dx\, dt. \tag{14}$$

Интегрируя по частям тождество (14) и учитывая условия теоремы 3, нетрудно получить III)-третью априорную оценку, аналогичную оценке (10), откуда следует единственность обобщенного решения задачи (11)-(13).

Теперь докажем справедливость IV)*—четвертой оценки.*

Для этого рассмотрим тождество:

$$-2\int\limits_{Q_1} e^{-\mu t}\cdot L_\varepsilon\hat{u}_\varepsilon\ \cdot P\hat{u}_\varepsilon\,dx\,dt = -2\int\limits_{Q_1} e^{-\mu t}\cdot\hat{f}\cdot P\hat{u}_\varepsilon\,dx\,dt, \tag{15}$$

где $P\hat{u}_\varepsilon = (\frac{\partial\triangle\hat{u}_\varepsilon}{\partial t} - \mu\hat{u}_{\varepsilon tt} + \frac{\mu}{2}\hat{u}_{\varepsilon xx} - \mu\hat{u}_{\varepsilon t})$.

Интегрируя по частям (15), с учетом условий теоремы 3 и краевых условий (12),(13), получим необходимую оценку:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial\triangle\hat{u}_\varepsilon}{\partial t}\right\|_0^2 + \|\hat{u}_\varepsilon\|_2^2 \le c_2\left\|\hat{f}\right\|_1^2. \tag{16}$$

Из доказанных оценок методом Галеркина получим однозначную разрешимость задачи (11)-(13) из пространства $W(Q)$.

Теорема 3 доказана. □

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (5) - (7).

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теорем 2,3. Тогда обобщенное решение задачи* (5) - (7) *существует и оно единственно в* $W_2^2(Q)$.

Доказательство. Единственность решения задачи (5) - (7) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 2. Теперь докажем существование решения задачи (5) - (7) в $W_2^2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q уравнение (11) и краевые условия (12), (13) при $\varepsilon > 0$. Так как выполнены все условия теоремы 3, то существует единственное обобщенное решение задачи (11)-(13) в $W(Q)$ при $\varepsilon > 0$ и для него справедливы третья и четвертая оценки. Отсюда следует, по известной теореме о компактности [11], что из множества функций $\{\hat{u}_\varepsilon(x,t,\lambda)\}$, $\varepsilon > 0$, можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\} \to \hat{u}(x,t,\lambda)$ при $\varepsilon_i \to 0$ в $W(Q)$. Покажем, что предельная функция $\hat{u}(x,t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению $L\hat{u} = \hat{f}$ (5) почти всюду в $W_2^2(Q)$. В самом деле, так как подпоследовательность $\{\hat{u}_{\varepsilon_i}(x,t,\lambda)\}$ слабо сходится в $W(Q)$, а подпоследовательность $\{\sqrt{\varepsilon_i}\frac{\partial\triangle\hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t}(x,t,\lambda)\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q)$ и оператор L линейный, то имеем

$$L\hat{u} - \hat{f} = L\hat{u} - L\hat{u}_{\varepsilon_i} + \varepsilon_i\frac{\partial\triangle\hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t} = L(\hat{u} - \hat{u}_{\varepsilon_i}) + \varepsilon_i\frac{\partial\triangle\hat{u}_{\varepsilon_i}}{\partial t}. \tag{17}$$

Из равенства (17), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$, получим единственное обобщенное решение задачи (5)-(7) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ [5]- [7]. Таким образом, ***теорема 4 доказана.*** □

Существование решения задачи (1)-(4)

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1 об однозначной разрешимости обобщенного решения задачи (1)-(4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$. Для доказательства теоремы 1 необходима следующая лемма.

Лемма. *Пусть выполнены условия теорем 1-4.Тогда для решения задачи* (1)-(4) *справедливы следующие оценки:*

I). $\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} \le c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}$

II). $\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} \le c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}$.

Доказательство.

В теореме 2 для решения задачи (5)-(7) доказана справедливость оценки (10), то есть следующее

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \le c_1 \left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)}.$$

Чтобы доказать, что $u_z \in L_2(G)$, нам необходимо умножить неравенство (10) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\|u\|^2_{W_2^{1,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^1(Q)} \, d\lambda \le$$
$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_1 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{L_2(Q)} d\lambda = c_1 \|f\|^2_{W_2^{0,3}(G)}. \tag{18}$$

Точно так же, используя условия теорем 3,4 с предельным переходом при $\varepsilon \to 0$, в четвертой оценке нетрудно получить для решения задачи (5)-(7) выполнение следующей оценки

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)} \le c_2 \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{19}$$

Чтобы доказать, что $u_{zz} \in L_2(G)$, умножим неравенство (19) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^3$ и, интегрируя по λ от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^2(Q)} \, d\lambda$$
$$\le (2\pi)^{-1/2} \cdot c_2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^1(Q)} d\lambda = c_2 \|f\|^2_{W_2^{1,3}(G)}. \tag{20}$$

Лемма доказана. □

Доказательство.

Доказательство теоремы 1. Из первой априорной оценки (18) леммы следует единственность обобщенного решения задачи (1)-(4), а из справедливости второй оценки (20) леммы следует существование обобщенного решения задачи (1)-(4) из пространства $W_2^{2,3}(G)$.

Теорема 1 доказана. □

Гладкость обобщенного решения задачи (1)-(4)

Теперь обратимся к исследованию гладкости обобщенного решения задачи (1)-(4) в пространствах $W_2^{m+2,s}(G)$, где m, s - целые конечные числа, такие, что $m \geq 0$, $s \geq 3$.

Ниже для простоты будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) - достаточно дифференцируемые функции в замкнутой области $\overline{Q}$.

Теорема 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того, пусть*

$$D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}, D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}.$$

Тогда для любой функции $f \in W_2^{m+1,s}(G)$, *такой, что* $\gamma \cdot D_t^q f|_{t=0} = D_t^q f|_{t=T}$ $(q = 0,1,2,3,...,m)$, *существует, и причем единственное, обобщенное решение задачи* (1)-(4) *из пространства* $W_2^{m+2,s}(G)$, *где* $s, m-$ *любые целые конечные положительные числа,такие,что* $s \geq m+3, \quad m = 0,1,.$

Доказательство. Отметим, что в работе [6] для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (5) исследована гладкость обобщенного решения нелокальной краевой задачи периодического типа (6),(7) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ и доказаны соответствующие оценки

$$\|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} \leq c_{m+1} \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} (m = 0,1,2,3,4,...). \tag{21}$$

Чтобы доказать, что $D_z^{s-1} u \in L_2(Q)$,где $s \geq m+3, \quad m = 0,1,2,3,...$, и применить теорему вложения Соболева, нам необходимо умножить неравенство (21) на $(2\pi)^{-1/2} \cdot (1+|\lambda|^2)^s$ и интегрировать по λ от $-\infty$ до $+\infty$, тогда получим

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2,s}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} d\lambda \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-1/2} \cdot c_{m+1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \left\|\hat{f}\right\|^2_{W_2^{m+1}(Q)} d\lambda = c_{m+1} \|f\|^2_{W_2^{m+1,s}(G)}. \tag{22}$$

Отсюда получим существование единственного обобщенного решения задачи (1)-(4) из пространства $W_2^{m+2,s}(G)$. *Теорема 5 доказана.* □

Заключение

Заключение. В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде. Для этой задачи методами «ε-регуляризации», априорных оценок с применением преобразования Фурье доказаны теоремы существования, единственности и гладкости обобщенного решения в определенном классе интегрируемых функции.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, *ДАН СССР*, 1953. Т. 122, №2, С. 167-170.
2. Франкль Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до - и сверх звуковых течений, *Изв.АН СССР Сер. матем.*, 1945. Т. 9, №2, С. 121-143.
3. Глазатов С. Н. Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике, *Сиб. мат. журн*, 1985. Т. 26, №6, С. 162-164.
4. Каратопраклиева М. Г. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, 1991. Т. 27, №1, С. 68-79.
5. Джамалов С. З. О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве, *Мат. заметки СВФУ*, 2017. №4, С. 17-28.
6. Джамалов С. З. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве., *Журнал Средневолжского мат общества*, 2019. Т. 21, №1, С. 24-33.
7. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск: НГУ, 1983.
8. Лионс Ж.Л., Мадженес Е. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.*. М.: Мир, 1971.
9. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* М: Мир, 1965.
10. Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.
11. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М., 1973,.
12. Кожанов А.И. *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка.* Новосибирск: НГУ, 1990.

Информация об авторах

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Института математики Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-3925-5129.

Сипатдинова Бийбиназ Кенесбайевна – докторант PhD, Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0002-7833-6992.

References

[1] Bitsadze A. V. Ill-posedness of the Dirichlet problem for equations of mixed type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1953, **122**, 2, 167–170 (In Russian).

[2] Frankl F. I. On Chaplygin's problems for mixed subsonic and supersonic flows, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1945, **9**, 2, 121–143 (In Russian).

[3] Glazatov S. N. Nonlocal Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations in a Rectangle. Sibirsk. Mat. Zh., 1985, **26**, 6, 162-164 (In Russian).

[4] Karatopraklieva M. G. On a nonlocal boundary value problem for an equation of mixed type. Differential Equations 1991, **27**, 1, 68-79 (In Russian).

[5] Dzhamalov S. Z. On well-posedness of a nonlocal boundary value problem with constant coefficients for a mixed type equation of the second kind of the second order in space, Mathematical notes of NEFU, 2017, 4, 17-28 (In Russian).

[6] Dzhamalov S. Z. On the smoothness of the solution of a nonlocal boundary value problem for the multidimensional second-order equation of the mixed type of the second kind in Sobolev space, Zhurnal SVMO, 2019, **21**, 1, 24-33 (In Russian).

[7] Vragov V. N. Krayevyye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki [Boundary Value Problems for Nonclassical Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, NGU, 1983 (In Russian).

[8] Lyons J. L., Magenes E. Neodnorodnyye granichnyye zadachi i ikh prilozheniya [Inhomogeneous boundary value problems and their applications]. Moscow, Mir, 1971 (In Russian).

[9] Hermander L. Lineynyye differentsial'nyye operatory s chastnymi proizvodnymi [Linear partial differential operators]. Moscow, Mir, 1965 (In Russian).

[10] Nikolsky S. M. Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya [Approximation of functions of several variables and embedding theorems]. Moscow, Nauka, 1977 (In Russian.).

[11] Ladyzhenskaya O. A. Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. Moscow, 1973 (In Russian).

[12] Kozhanov A. I. Krayevyye zadachi dlya uravneniy matematicheskoy fiziki nechetnogo poryadka [Boundary Value Problems for Odd-Order Equations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, NSU, 1990 (In Russian).

Information about authors

Dzhamalov Sirojiddin Zuxriddinovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Chief Researcher of the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-3925-5129.

Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.) student of the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0002-7833-6992.