Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. C. 37-57. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-37-57

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

Задача для смешанного уравнения с дробной степенью оператора Бесселя

А. В. Дзарахохов[*1], *Э. Л. Шишкина*[*2,3]

[1] Горский государственный аграрный университет, Россия, 362040, г. Владикавказ, ул. Кирова, 37.

[2] Воронежский государственный университет, Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

[3] Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

Аннотация. В последнее время особый интерес представляют уравнения с частными производными, содержащими дифференциальный оператор дробного порядка. Подобные уравнения и задачи для них находят применение в теории вязкой упругости, электрохимии, теории управления, моделировании эпидемий и пандемий и в других различных областях. Настоящая работа посвящена решению дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя дробной степени. В статье рассматривается прямое и обратное преобразование Мейера, модифицированное для удобства работы с оператором Бесселя дробной степени. Для рассматриваемого преобразования Мейера получена свертка. Используя преобразования Лапласа и Пуассона получены факторизации прямого и обратного преобразований Мейера. С использованием рассмотренного модифицированного преобразования Мейера находится решение обыкновенного дифференциального уравнения с оператором Бесселя дробной степени. Рассматривается нелокальная краевая задача для смешанного параболо-гиперболческого уравнения, содержащего дробной степени оператор Бесселя. Доказывается, что, при выполнении определенных условий гладкости входных функций задачи и выполнения условия сопряжения на линии раздела областей гиперболичности и параболичности, регулярное решение нелокальной краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с оператором Бесселя дробной степени существует и единственно.

Ключевые слова: преобразование Мейера, оператор Бесселя дробной степени, обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка, дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка.

Получение: 14.03.2023; Исправление: 20.03.2023; Принятие: 22.03.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Дзарахохов А. В., Шишкина Э. Л. Задача для смешанного уравнения с дробной степенью оператора Бесселя // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2023. Т. 42. № 1. C. 37-57. EDN: DFSTCW. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-37-57.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: E-mail: azambat79@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2023. vol. 42. no. 1. P. 37-57. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-37-57

Research Article

Full text in Russian

MSC 26A33; 33E20

The Problem for a Mixed Equation with Fractional Power of the Bessel Operator

***A. V. Dzarakhokhov**[1], *E. L. Shishkina**[2,3]**

[1] Gorsky State Agrarian University, Russia, 37 Kirov St., Vladikavkaz 362040.

[2] Voronezh State University, Russia, 1 Universitetskaya Pl., Voronezh 394018.

[3] Belgorod State National Research University (BelGU), Russia, 85 Pobedy St., Belgorod 308015.

Abstract. Recently, of particular interest are partial differential equations containing a fractional order differential operator. Similar equations and problems for them find application in the theory of viscous elasticity, electrochemistry, control theory, modeling of epidemics and pandemics, and in various other areas. The present work is devoted to the solution of differential equations containing the Bessel operator of fractional degree. The article discusses the direct and inverse Meyer transforms, modified for the convenience of working with the Bessel operator of a fractional degree. For the considered Meyer transformation, a convolution is obtained. Using the Laplace and Poisson transformations, factorizations of the direct and inverse Meyer transformations are obtained. Using the considered modified Meyer transform, we find a solution to an ordinary differential equation with a Bessel operator of fractional degree. A nonlocal boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation containing a fractional degree Bessel operator is considered. It is proved that, under certain conditions of smoothness of the input functions of the problem and the condition of conjugation on the dividing line of the regions of hyperbolicity and parabolicity, a regular solution of a nonlocal boundary value problem for a mixed parabolic-hyperbolic equation with a Bessel operator of fractional degree exists and is unique.

Key words: the Meyer transform, the Bessel operator of fractional degree, ordinary differential equations of fractional order, partial differential equations of fractional order.

Received: 14.03.2023; Revised: 20.03.2023; Accepted: 22.03.2023; First online: 15.04.2023

For citation. Dzarakhokhov A. V., Shishkina E. L. The problem for a mixed equation with fractional power of the Bessel operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 37-57. EDN: DFSTCW. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-37-57.

Funding. Not applicable.

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: azambat79@mail.ru, ilina_dico@mail.ru

Введение

Одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными, в силу своей теоретической и прикладной важности, является теория краевых задач для уравнений смешанного типа. Давно было замечено [1], что при решении задач для смешанных уравнений, возникает необходимость использовать аппарат дробных производных. С другой стороны, в последнее время большой интерес вызывают задачи для смешанных уравнений с частной дробной производной [2–4]. В данной статье речь идет о существовании и единственности решений краевой задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя.

Для того чтобы исследовать и строить решения смешанных уравнений с дробными степенями оператора Бесселя нужно сначала определить эти операторы получить решения простейших обыкновенных дифференциальных уравнений с ними. Поэтому, прежде всего мы дадим определения некоторых специальных функций, которые мы будем использовать, затем, приведем интегральные преобразования Лапласа и Мейера и выпишем формулу их связи посредством оператора преобразования Пуассона, определим дробные степени оператора Бесселя и рассмотрим ОДУ и УЧП с дробной степенью оператора Бесселя и, наконец, рассмотрим задачу для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя.

Дробные интегралы и производные Бесселя

Рассмотрим оператор Бесселя

$$(B_\gamma)_y = \frac{d^2}{dy^2} + \frac{\gamma}{y}\frac{d}{dy}. \tag{1}$$

Явное определение отрицательной дробной степени оператора Бесселя в терминах гипергеометрических функций Гаусса с различными приложениями к УЧП было дано в [5]. В [6] рассмотрены дробные степени гипер-бесселева оператора, которые включают в себя рассматриваемые в этой статье операторы.

Пусть $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. **Левосторонний дробный интеграл Бесселя на полуоси** $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ для $f \in L[0,\infty)$ определяется формулой

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) = (IB^{\alpha}_{\gamma,0+} f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, \alpha; 2\alpha; 1-\frac{y^2}{x^2}\right) f(y)\,dy. \tag{2}$$

В (2) ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, которую можно представить в виде ряда

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!}, \qquad (p)_n = p(p+1)\cdots(p+n-1).$$

Свойства (2) приведены в [7].

Пусть $f \in L[0,\infty)$, $IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+} f \in C^2(0,\infty)$ и $f'(0)=0$. При $0<\alpha<1$ определим левостороннюю дробную производную Бесселя на полуоси равенством

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x) = (IB^{1-\alpha}_{\gamma,0+}B_\gamma f)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2(1-\alpha))}\int\limits_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{1-2\alpha} {}_2F_1\left(1-\alpha+\frac{\gamma-1}{2}, 1-\alpha; 2(1-\alpha); 1-\frac{y^2}{x^2}\right) B_\gamma f(y)dy \tag{3}$$

В [6] были введены пространства, адаптированные для работы с операторами вида $B^{\alpha}_{\gamma,0+}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

В этой статье мы сначала решим обыкновенное дифференциальное уравнение с оператором (3), смешанную задачу для уравнения в частных производных с дробной степенью оператора Бесселя (3), а затем решим задачу для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя.

Специальные функции и преобразование Мейера

Модифицированная функция Бесселя первого рода или функция Инфельда имеет вид

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

С ее помощью определяется модифицированная функция Бесселя второго рода или функция Макдональда

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)\Big]. \tag{4}$$

Двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\ z\in\mathbb{C},\ \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\alpha>0,\ \mathrm{Re}\,\beta>0. \tag{5}$$

Функция (5) имеет многочисленные приложения, в основном связанные с дробным исчислением и дробным моделированием.

Функция Фокса–Райта ${}_p\Psi_q$ определяется рядом (см. [8])

$${}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c}(a_l,\alpha_l)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\middle| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{l=1}^{p}\Gamma(a_l+\alpha_l k)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\beta_j k)}\frac{z^k}{k!}, \tag{6}$$

$$z\in\mathbb{C},\ a_l,b_j\in\mathbb{C},\ \alpha_l,\beta_j\in\mathbb{R},\ l=1,...,p,\ j=1,...,q$$

в случае, если этот ряд сходится. Когда удовлетворяется условие

$$\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{l=1}^{p}\alpha_l>-1, \tag{7}$$

ряд в правой части (6) сходится для любого $z\in\mathbb{C}$. В случае

$$\sum_{j=1}^{q}\beta_j-\sum_{l=1}^{p}\alpha_l=-1,$$

ряд в (6) сходится абсолютно при $|z|<\delta$ и при $|z|=\delta$ and $\operatorname{Re}\mu>\frac{1}{2}$, где

$$\delta=\prod_{l=1}^{p}|\alpha_l|^{-\alpha_l}\prod_{j=1}^{q}|\beta_j|^{\beta_j},$$

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{l=1}^{p}a_l+\frac{p-q}{2}.$$

Для наших целей удобно использовать следующую модификацию преобразования Мейера

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)=\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)\,dx, \tag{8}$$

где функция $K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)$ определена равенством (4). Пусть $f\in L_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ и $f(t)=o\left(t^{\beta-\frac{\gamma}{2}}\right)$ при $t\to+0$, где $\beta>\frac{\gamma}{2}-2$ если $\gamma>1$ и $\beta>-1$ если $\gamma=1$. Кроме того, пусть $f(t)=O(e^{at})$ при $t\to+\infty$. Тогда преобразование Мейера функции f существует почти всюду для $\operatorname{Re}\xi>a$ (см. [9], стр. 94). Класс таких функций обозначим K_γ.

Свертка для преобразования Мейера (8) имеет вид

$$\ll f*g\gg_\gamma=$$

$$=(\gamma+1)\int\limits_x^\infty\tau^{3-2\gamma}(x^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}d\tau\int\limits_0^{\tau^2/4}u^{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau^2-4u)^{\frac{\gamma-1}{2}}du\int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{uv}\right)g\left(\sqrt{(\tau^2-4u)(1-v)}\right)dv. \tag{9}$$

Пусть $f,g\in K_\gamma$. Тогда справедлива формула

$$\mathscr{K}_\gamma[\ll f*g\gg_\gamma](x)=x^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\mathscr{K}_\gamma[f](x)\mathscr{K}_\gamma[g](x). \tag{10}$$

Действительно, рассмотрим двумерное преобразование Лапласа

$$L\{f_i\}(p,q)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-px-qy}f_i(x,y)\,dxdy, \qquad i=1,2$$

и двумерную свертку Лапласа

$$(f_1*f_2)(x,y)=\int\limits_0^x\int\limits_0^y f_1(\xi,\eta)f_2(x-\xi,y-\eta)d\eta d\xi.$$

Если $L\{f_i\}(p,q)$, $i=1,2$ сходится абсолютно, то и $L(f_1*f_2)$ сходится абсолютно. Запишем

$$L(f_1*f_2)=Lf_1\cdot Lf_2.$$

Пусть $f_1=x^{\frac{\gamma-1}{2}}f\left(2\sqrt{xy}\right)$, $f_2=x^{\frac{\gamma-1}{2}}g\left(2\sqrt{xy}\right)$, тогда

$$(f_1*f_2)(x,y)=\left(\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}f\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)*\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}g\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)\right)(x,y)=$$

$$=\int\limits_0^x\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}(x-\xi)^{\frac{\gamma-1}{2}}d\xi\int\limits_0^y f\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)g\left(2\sqrt{(x-\xi)(y-\eta)}\right)d\eta=\{\eta=y\nu\}=$$

$$=\int\limits_0^x\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}(x-\xi)^{\frac{\gamma-1}{2}}d\xi\int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{\xi y\nu}\right)g\left(2\sqrt{(xy-y\xi)(1-\nu)}\right)y\,d\nu=\{y\xi=u\}=$$

$$=y^{1-\gamma}\int\limits_0^{xy}u^{\frac{\gamma-1}{2}}(xy-u)^{\frac{\gamma-1}{2}}du\int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{u\nu}\right)g\left(2\sqrt{(xy-u)(1-\nu)}\right)d\nu=y^{1-\gamma}\chi(xy),$$

где

$$\chi(t)=\int\limits_0^t u^{\frac{\gamma-1}{2}}(t-u)^{\frac{\gamma-1}{2}}du\int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{u\nu}\right)g\left(2\sqrt{(t-u)(1-\nu)}\right)d\nu.$$

Будем иметь

$$L\{f_1*f_2\}(x,y)=L\left(\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}f\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)*\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}g\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)\right)(x,y)=$$

$$=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x\xi-y\eta}\xi^{1-\gamma}\chi(\xi\eta)d\xi d\eta=\{\xi\eta=t\}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\chi(t)dt\int\limits_0^\infty e^{-x\xi-yt\frac{1}{\xi}}\xi^{-\gamma}d\eta=2\int\limits_0^\infty\chi(t)x^{\frac{\gamma-1}{2}}(yt)^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\gamma-1}\left(2\sqrt{xyt}\right)dt.$$

Получим

$$L\{f_1*f_2\}(1,\zeta^2)=2\zeta^{1-\gamma}\int\limits_0^\infty\chi(t)t^{\frac{1-\gamma}{2}}K_{\gamma-1}\left(2\zeta\sqrt{t}\right)dt=\{2\sqrt{t}=\tau\}=$$

$$=2^{\gamma-1}\zeta^{1-\gamma}\int\limits_0^\infty\chi(\tau^2/4)\tau^{2-\gamma}K_{\gamma-1}\left(\zeta\tau\right)d\tau.$$

Используя формулу 2.16.3.7 из [10] вида

$$\int\limits_a^\infty x^{1\pm\rho}(x^2-a^2)^{\beta-1}K_\rho(cx)dx = 2^{\beta-1}a^{\beta\pm\rho}c^{-\beta}\Gamma(\beta)K_{\rho\pm\beta}(ac), \qquad a,c,\beta>0,$$

получим

$$K_{\gamma-1}(\zeta\tau) = \frac{2^{\frac{3-\gamma}{2}}\tau^{1-\gamma}\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}\int\limits_\tau^\infty s^{\frac{\gamma+1}{2}}(s^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(\zeta s)ds$$

и

$$L\{f_1*f_2\}(1,\zeta^2) = \frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\zeta^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty \chi(\tau^2/4)\tau^{3-2\gamma}d\tau\int\limits_\tau^\infty s^{\frac{\gamma+1}{2}}(s^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(\zeta s)ds =$$

$$= \frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\zeta^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty s^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(\zeta s)ds\int\limits_s^\infty \chi(\tau^2/4)\tau^{3-2\gamma}(s^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}d\tau =$$

$$= \frac{2^{\frac{\gamma+1}{2}}\zeta^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}(\mathscr{K}_\gamma)_s\left[\int\limits_s^\infty \chi(\tau^2/4)\tau^{3-2\gamma}(s^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}d\tau\right](\zeta) =$$

$$= (\gamma+1)2^{\gamma-1}\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}(\mathscr{K}_\gamma)_s\left[\int\limits_s^\infty \chi(\tau^2/4)\tau^{3-2\gamma}(s^2-\tau^2)^{\frac{\gamma-3}{2}}d\tau\right](\zeta) = \zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\mathscr{K}_\gamma[\ll f*g\gg_\gamma](\zeta),$$

где

$$\chi(\tau^2/4) = 2^{1-\gamma}\int\limits_0^{\tau^2/4} u^{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau^2-4u)^{\frac{\gamma-1}{2}}du\int\limits_0^1 f\left(2\sqrt{uv}\right)g\left(\sqrt{(\tau^2-4u)(1-v)}\right)dv.$$

Следовательно,

$$L\{f_1*f_2\}(1,x^2) = x^{\frac{\gamma-1}{2}}\mathscr{K}_\gamma[\ll f*g\gg_\gamma](x). \tag{11}$$

С другой стороны,

$$L\{f_1*f_2\}(x,y) = L\left\{\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}f\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)*\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}g\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)\right\}(x,y) =$$

$$= L\left\{x^{\frac{\gamma-1}{2}}f(2\sqrt{xy})\right\}\cdot L\left\{x^{\frac{\gamma-1}{2}}g(2\sqrt{xy})\right\}$$

и

$$L\left\{x^{\frac{\gamma-1}{2}}f(2\sqrt{xy})\right\} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x\xi-y\eta}\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}f\left(2\sqrt{\xi\eta}\right)d\xi d\eta = \{\xi\eta=t\} =$$

$$= \int\limits_0^\infty f\left(2\sqrt{t}\right)dt\int\limits_0^\infty e^{-x\xi-yt\frac{1}{\xi}}\xi^{\frac{\gamma-3}{2}}d\xi = 2\int\limits_0^\infty f\left(2\sqrt{t}\right)\left(\frac{ty}{x}\right)^{\frac{\gamma-1}{4}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2\sqrt{txy}\right)dt.$$

Пусть $x=1$, тогда

$$L\left\{\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}f(2\sqrt{\xi\eta})\right\}(1,y)=2\int\limits_0^\infty f\left(2\sqrt{t}\right)(ty)^{\frac{\gamma-1}{4}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(2\sqrt{ty}\right)dt=\{2\sqrt{t}=\tau,\sqrt{y}=\zeta\}=$$

$$=\int\limits_0^\infty f(\tau)\left(\frac{\tau^2\zeta^2}{4}\right)^{\frac{\gamma-1}{4}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau\zeta)\tau d\tau=\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\int\limits_0^\infty \tau^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(\tau\zeta)f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}\mathscr{K}_\gamma[f](\zeta)=\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\zeta^{\frac{\gamma-1}{2}}\mathscr{K}_\gamma[f](\zeta)$$

и

$$L\{f_1*f_2\}(1,x^2)=\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)x^{\gamma-1}\mathscr{K}_\gamma[f](x)\mathscr{K}_\gamma[g](x). \tag{12}$$

Приравнивая правые части (11) и (12), получим (10).

Преобразование (8) приспособлено для работы с дробными степенями оператора Бесселя. А именно [11], пусть $0<\alpha<1$, $f\in K_\gamma$ и $f'(x)$ ограничена, тогда при $\gamma\neq 1$

$$\mathscr{K}_\gamma[\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+}f](\xi)=\xi^{2\alpha}\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)-\xi^{2\alpha-1-\gamma}f(0+) \tag{13}$$

Если кроме $f\in K_\gamma$ и $f'(x)\sim x^\beta$ для любых $\beta>0$ при $x\to 0+$, то (13) верно и при $\gamma=1$.

Предварительные результаты

Если $0<\gamma<2$, $F(\xi)$ аналитична в полуплоскости $H_a=\{p\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,p\geq a\}$, $a\leq 0$ и $s^{\frac{\gamma}{2}-1}F(\xi)\to 0$, $|\xi|\to+\infty$ равномерно по $\arg s$, то для любого числа c, такого, что $c>a$ существует обратное преобразование $\mathscr{K}_\gamma^{-1}$, которое имеет вид (см. [9], стр. 94)

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}[\widehat{f}](x)=f(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\widehat{f}(\xi)I_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\xi^{\frac{\gamma+1}{2}}d\xi. \tag{14}$$

Формула обращения (14) не удобна для вычислений и имеет условие $0<\gamma<2$. Здесь мы представим другую формулу обращения, использующую оператор преобразования Пуассона.

Чтобы упростить процесс восстановления функции по ее преобразованию Мейера, мы будем использовать оператор Пуассона вида [12]

$$\mathscr{P}^\gamma_x f(x)=(\mathscr{P}^\gamma_t f(t))(x)=\frac{2C(\gamma)}{x^{\gamma-1}}\int\limits_0^x\left(x^2-t^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1}f(t)\,dt,\quad C(\gamma)=\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{15}$$

Левый обратный к (15) при $\gamma>0$ для любой функции $H(x)\in C^n$ определяется как

$$(\mathscr{P}^\gamma_x)^{-1}h(x)=\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m\int\limits_0^x h(z)(x^2-z^2)^{m-\frac{\gamma}{2}-1}z^\gamma dz, \tag{16}$$

где $m=\left[\frac{\gamma}{2}\right]+1$.

Теорема 1. *Для прямого и обратного преобразования Мейера справедливы следующие факторизации:*

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)=g(\xi)=\frac{\pi\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}(\mathscr{L}z^{\gamma-1}(\mathscr{P}_x^\gamma xf(x))(z))(\xi), \tag{17}$$

$$f(x)=\mathscr{K}_\gamma^{-1}[g](x)=\frac{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi x}(\mathscr{P}_z^\gamma)^{-1}\left(z^{1-\gamma}\mathscr{L}^{-1}\left(\xi^{\frac{1-\gamma}{2}}g(\xi)\right)(z)\right)(x), \tag{18}$$

где $\mathscr{L}$ — преобразование Лапласа, $\mathscr{P}^\gamma$ — оператор Пуассона (15), *$(\mathscr{P}^\gamma)^{-1}$ — левый обратный к оператору Пуассона* (16).

Доказательство.

Используя представление функции K_ν из [13], стр. 190, формула (4) вида

$$K_\nu(x\xi)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\xi}{2x}\right)^\nu\int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dz$$

и оператор Пуассона (15), можем записать

$$x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)=\frac{\sqrt{\pi}x\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz$$

и получить следующее представление преобразования Мейера

$$\mathscr{K}_\gamma[f](\xi)=\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty x^{\frac{\gamma+1}{2}}K_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)\,f(x)\,dx=$$

$$=\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\frac{\sqrt{\pi}\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^{\frac{\gamma-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\int\limits_0^\infty f(x)x\,dx\int\limits_x^\infty e^{-\xi z}(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}dz=$$

$$=\frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty z^{\gamma-1}e^{-\xi z}\frac{2\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{z^{\gamma-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}dz\int\limits_0^z(z^2-x^2)^{\frac{\gamma}{2}-1}f(x)x\,dx=$$

$$=\frac{\pi\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty z^{\gamma-1}e^{-\xi z}(\mathscr{P}_x^\gamma xf(x))(z)dz=$$

$$=\frac{\pi\xi^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}(\mathscr{L}z^{\gamma-1}(\mathscr{P}_x^\gamma xf(x))(z))(\xi). \tag{19}$$

Таким образом, мы получили (17). Применяя последовательно обратные операторы, получим (18). □

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=$$
$$=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{matrix}\left(\frac{\gamma+1}{4}+\frac{\beta}{2},\alpha\right),(1,1)\\ \left(\frac{1-\gamma}{4}+\frac{\beta}{2},\alpha\right),\left(\beta+\frac{\gamma-1}{2},2\alpha\right)\end{matrix}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right]. \quad (20)$$

Доказательство. Используя формулу (18), найдем $\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)$:

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=\frac{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi x}(\mathscr{P}_z^\gamma)^{-1}\left(z^{1-\gamma}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\xi^{2\alpha-\frac{\gamma-1}{2}-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right)(z)\right)(x).$$

Справедлива формула (см. [14], стр. 47, формула 1.9.13):

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\xi^{2\alpha-\frac{\gamma-1}{2}-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right)(x)=x^{\beta+\frac{\gamma-1}{2}-1}E_{2\alpha,\beta+\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda x^{2\alpha}). \quad (21)$$

Будем иметь

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=\frac{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi x}(\mathscr{P}_z^\gamma)^{-1}\left(z^{\beta-\frac{\gamma+1}{2}}E_{2\alpha,\beta+\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda z^{2\alpha})\right)(x)=$$
$$=\frac{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi x}\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m\int\limits_0^x z^{\beta+\frac{\gamma-1}{2}}E_{2\alpha,\beta+\frac{\gamma-1}{2}}(\lambda z^{2\alpha})(x^2-z^2)^{m-\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Функция Миттаг–Леффлера имеет вид (5), тогда

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=\frac{2^\gamma\Gamma^2\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\pi x}\frac{2\sqrt{\pi}x}{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{\gamma}{2}\right)}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(2\alpha n+\beta+\frac{\gamma-1}{2}\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^x z^{2\alpha n+\beta+\frac{\gamma-1}{2}}(x^2-z^2)^{m-\frac{\gamma}{2}-1}dz.$$

Для интеграла имеем

$$\int\limits_0^x z^{2\alpha n+\beta+\frac{\gamma-1}{2}}(x^2-z^2)^{m-\frac{\gamma}{2}-1}dz=\frac{\Gamma\left(m-\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}(4n\alpha+2\beta+\gamma+1)\right)x^{\beta-\frac{\gamma}{2}+2m+2\alpha n-\frac{3}{2}}}{2\Gamma\left(m+n\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{4}+\frac{1}{4}\right)},$$

следовательно,

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=$$
$$=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m\sum_{n=0}^\infty\frac{\lambda^n}{\Gamma\left(2\alpha n+\beta+\frac{\gamma-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma+1}{4}\right)x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}+2\alpha n+2m}}{\Gamma\left(m+n\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{1-\gamma}{4}\right)}.$$

Поскольку для любого μ

$$\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m x^{\mu+2m} = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+1\right)} x^{\mu},$$

то

$$\left(\frac{d}{2xdx}\right)^m x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}+2\alpha n+2m} = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1-\gamma}{4}+\alpha n+m\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1-\gamma}{4}+\alpha n\right)} x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}+2\alpha n}$$

и

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-\beta}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma+1}{4}\right)\lambda^n x^{2\alpha n}}{\Gamma\left(2\alpha n+\beta+\frac{\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(n\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{1-\gamma}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} x^{\beta-\frac{\gamma+3}{2}} {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma+1}{4}+\frac{\beta}{2},\alpha\right),(1,1) \\ \left(\frac{1-\gamma}{4}+\frac{\beta}{2},\alpha\right),\left(\beta+\frac{\gamma-1}{2},2\alpha\right) \end{array}\middle| \lambda x^{2\alpha}\right].$$

$\square$

Решение задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с дробной степенью оператора Бесселя

Теорема 3. *Пусть* $0<\alpha<1$, $g\in L_{loc}(0,\infty)$, *существуют такие константы* C *и* ℓ, *что* $|g(x)|<Ce^{2\ell x}$ *при* $x\to\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = g(0+) < \infty$. *Тогда решение уравнения*

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_x f(x) - \lambda f(x) = g(x), \qquad \lambda\in\mathbb{R} \tag{22}$$

при $f(0+)=C$ *имеет вид*

$$f(x) = \ll G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda,x) * g(x) \gg_\gamma + C\frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array}\middle| \lambda x^{2\alpha}\right],$$

где $\ll \cdot * \cdot \gg_\gamma$ *определяется формулой* (9),

$$G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda,x) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} x^{2\alpha-\frac{\gamma+3}{2}} {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma+1}{4}+\alpha,\alpha\right),(1,1) \\ \left(\frac{1-\gamma}{4}+\alpha,\alpha\right),\left(2\alpha+\frac{\gamma-1}{2},2\alpha\right) \end{array}\middle| \lambda x^{2\alpha}\right]. \tag{23}$$

Доказательство. Применим к обеим частям (22) преобразование Мейера, получим

$$\left(\xi^{2\alpha}-\lambda\right)\mathscr{K}_\gamma[f](\xi) = \mathscr{K}_\gamma[g](\xi) + \xi^{2\alpha-1-\gamma} f(0+),$$

следовательно, можем записать

$$f(x) = \mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\mathscr{K}_\gamma[g](\xi)+C\xi^{2\alpha-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x) =$$

$$= \mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\mathscr{K}_\gamma[g](\xi)}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)+C\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x).$$

Используя формулу (20), найдем $\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)$:

$$\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{\xi^{2\alpha-1-\gamma}}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{\gamma-1}{2}}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{3\gamma+3}{4},\alpha\right),(1,1)\\ \left(\frac{\gamma+3}{4},\alpha\right),\left(\frac{3\gamma+1}{2},2\alpha\right)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].$$

Пусть

$$\frac{1}{\xi^{2\alpha}-\lambda}=\mathscr{K}_\gamma[G_\gamma^\alpha(\lambda,x)](\xi),$$

тогда

$$f(x)=\ll G_\gamma^\alpha(\lambda,x)*g(x)\gg_\gamma+C\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{\gamma-1}{2}}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{3\gamma+3}{4},\alpha\right),(1,1)\\ \left(\frac{\gamma+3}{4},\alpha\right),\left(\frac{3\gamma+1}{2},2\alpha\right)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right],$$

где

$$G_\gamma^\alpha(\lambda,x)=\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{1}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x),$$

а $\ll\cdot*\cdot\gg_\gamma$ — свертка Мейера (9). Применяя формулу (20), найдем $G_\gamma^\alpha(\lambda,x)$:

$$G_\gamma^\alpha(\lambda,x)=\mathscr{K}_\gamma^{-1}\left[\frac{1}{\xi^{2\alpha}-\lambda}\right](x)=\frac{2^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}x^{2\alpha-\frac{\gamma+3}{2}}\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma+1}{4}+\alpha,\alpha\right),(1,1)\\ \left(\frac{1-\gamma}{4}+\alpha,\alpha\right),\left(2\alpha+\frac{\gamma-1}{2},2\alpha\right)\end{array}\middle|\lambda x^{2\alpha}\right].$$

□

Решение смешанных задач для параболических уравнений с дробной степенью оператора Бесселя

Рассмотрим теперь решение задач для уравнения $(\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+})_y u=u_{xx}$, где $\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+}$ — левосторонняя дробная производная Бесселя на полуоси (3).

Теорема 4. *Пусть* $0<\alpha<1/2$, *функция* $\tau\in C^4([0,l])$ *и финитная на* $[0,l]$. *Тогда при любом* $T>0$ *функция*

$$u(x,y)=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^\infty\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1)\\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|-\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right]\int\limits_0^l\tau(z)\sin\left(\frac{k\pi}{l}z\right)dz. \qquad (24)$$

является решением задачи

$$(\mathscr{B}^\alpha_{\gamma,0+})_y u=u_{xx}, \qquad (25)$$

$$u(x,0)=\tau(x),\qquad u_y(x,0)=0,\qquad u(0,y)=u(l,y)=0. \qquad (26)$$

Ряд (24) *равномерно сходится при* $0 \le x \le l$, $0 \le y \le T$, *его сумма* $u(x,y)$, *а также производные* $(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u$, u_{xx} *непрерывны при* $x \le x \le l$, $0 \le y \le T$.

Доказательство. Будем искать частные решения вида $U(x,y) = X(x)Y(y)$. Подставим $U(x,y)$ в уравнение $(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u = u_{xx}$, получим

$$X(x)(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y Y(y) = X''(x)Y(y)$$

или

$$\frac{(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y Y(y)}{Y(y)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Задача Штурма-Лиувилля

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad X(0) = X(l) = 0, \tag{27}$$

которая имеет решение

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \qquad k = 1,2,...$$

Пусть $\mu_k = \frac{k\pi}{l}$, $\lambda = -\mu_k^2$, тогда для каждого μ_k уравнение

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y Y(y) + \mu_k^2 Y(y) = 0,$$

общее решение которого при $0 < \alpha \le 1$ имеет вид (см. Теорему при $g = 0$)

$$Y_k(y) = C_k\, {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array}\middle| -\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right].$$

При этом $Y_k(0) = 1$, $Y_k'(0) = 0$.

Тогда все решения, которые удовлетворяют уравнению $(D^{\alpha}_{0+})_y u = u_{xx}$ и однородным граничным условиям $u(0,y) = u(l,y) = 0$ имеет вид

$$u_k(x,y) = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array}\middle| -\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right], \qquad k = 1,2,...$$

Следовательно, решение $u(x,y)$ можно записать в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array}\middle| -\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right]. \tag{28}$$

Поскольку

$${}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c} \left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1) \\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha) \end{array}\middle| -\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right]\Bigg|_{y=0} = 1,$$

то из (31), получаем

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) = \tau(x), \qquad x \in [0,l], \qquad y \in [0,T],$$

где C_k — коэффициенты Фурье функции $\tau(x)$ при разложении ее в ряд по собственным функциям $\{\sin(\mu_k x)\}$ задачи (27). Тогда

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \tau(z)\sin(\mu_k z)dz.$$

Пусть $\tau \in C^4([0,l])$ и финитная на $[0,l]$, тогда $C_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$ и все ряды сходятся равномерно. Поскольку $E_{\alpha,1}$ целая и ряд (28) можно почленно дифференцировать по x до второй производной и по y применять дробную производную ${}^C D^{\alpha}_{0+}$ при $0<\alpha\leq 1$, оценивая сверху одним из сходящихся числовых рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_k|, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k|C_k|, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k^2|C_k|,$$

то ряд (28) сходится равномерно и является решением задачи (25)–(26). □

Теорема 5. *Пусть $0<\alpha<1/2$, функция $\tau(x)\in C^4([0,l])$ и финитная на $[0,l]$, $\varphi_0(y),\varphi_1(y)\in C^4([0,T])$ и финитные на $[0,T]$. Тогда при любом $T>0$ функция*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \ll G^{\alpha}_{\gamma}(-k^2\pi^2/l^2,y) * 2k\pi/l^2[\varphi_0(y)-(-1)^k\varphi_1(y)] \gg_{\gamma} +,$$

$$+\frac{2^{\gamma-1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{l\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) {}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1)\\ (1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle| -\frac{k^2\pi^2}{l^2}y^{2\alpha}\right]\times$$

$$\times\int_0^l \tau(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx \tag{29}$$

является решением задачи

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u = u_{xx}, \qquad x\in[0,l], \qquad y\in[0,T] \tag{30}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad x\in[0,l], \qquad y\in[0,T] \tag{31}$$

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u(l,y) = \varphi_1(y), \qquad y\in[0,T]. \tag{32}$$

Здесь $G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda,y)$ находится по формуле (23), $\ll\cdot*\cdot\gg_{\gamma}$ определяется формулой (9) Ряд (29) равномерно сходится при $0\leq x\leq l$, $0\leq y\leq T$, его сумма $u(x,y)$, а также производные $(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u$, u_{xx} непрерывны при $0\leq x\leq l$, $0\leq y\leq T$.

Доказательство. Решение задачи (30)–(32) будем искать в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}Y_k(y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \tag{33}$$

где

$$Y_k(y) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx. \tag{34}$$

Интегрируя $Y_k(y)$ два раза по частям, получим

$$Y_k(y)=\frac{2}{\pi k}[u(0,y)-(-1)^k u(l,y)]-\frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^l u_{xx}(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

Так как $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (30) и граничным условиям (32), то

$$Y_k(y)=\frac{2}{\pi k}[\varphi_0(y)-(-1)^k\varphi_1(y)]-\frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^l (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

Применим теперь к (34) дробную производную $(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y$, получим

$$\int_0^l (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u(x,y)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx=\frac{l}{2}(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y Y_k(y),$$

что дает уравнение для $Y_k(y)$:

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y Y_k(y)+\frac{k^2\pi^2}{l^2}Y_k(y)=\frac{2k\pi}{l^2}[\varphi_0(y)-(-1)^k\varphi_1(y)].$$

Его решение имеет вид (см. Теорему):

$$Y_k(y)=\ll G^{\alpha}_{\gamma}(\lambda,y)*\frac{2k\pi}{l^2}[\varphi_0(y)-(-1)^k\varphi_1(y)]\gg_\gamma +$$

$$+\frac{2^{\gamma}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}C_k\,{}_2\Psi_2\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\gamma}{2}+1,\alpha\right),(1,1)\\(1,\alpha),(\gamma+1,2\alpha)\end{array}\middle|\lambda y^{2\alpha}\right],$$

где $\lambda=-\frac{k^2\pi^2}{l^2}$, $\ll\cdot*\cdot\gg_\gamma$ определяется формулой (9), $C_k=Y_k(0)$.

Чтобы удовлетворить начальному условию (31), потребуем выполнения равенства

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(0)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)=\tau(x),$$

тогда

$$Y_k(0)=C_k=\frac{2}{l}\int_0^l \tau(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx.$$

Подставляя найденные значения в (33), получим (29). Непрерывность $u(x,y)$ и всех необходимых производные обосновывается также как в Теореме .

□

Теперь, когда у нас есть инструмент для решения дифференциальных уравнений с дробным оператором Бесселя мы переходим к решению смешанных уравнений с таким оператором.

Решение задачи для смешанного дифференциального уравнения в частных производных с дробной степенью оператора Бесселя

Пусть $0<\alpha<1/2$. Рассмотрим смешанное параболо-гиперболическое уравнение с дробной степенью оператора Бесселя

$$0=\begin{cases} u_{xx}-(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}, & y<0 \end{cases} \tag{35}$$

в односвязной области D плоскости переменных x,y, ограниченной отрезками AA_0 прямой $x=0$, A_0B_0 прямой $x=1$, $y=1$ и действительными характеристиками при $y<0$ $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$ уравнения (35), выходящими из точек $A(0,0)$, $B(1,0)$. Пусть $D=D_1\cup D_2$, где D_1 — параболическая часть области D, $y>0$, а D_2 — гиперболическая часть области D, $y<0$. Пусть $0<\alpha<1/2$, $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0<x<1, y=0\}$.

Решение уравнения (35) $u=u(x,y)$ будем называть регулярным в области D, если $u\in C(\overline{D_1})$, $u_y\in C(D_1\cup I)$, $u_{xx}\in C(D_1)$, $u\in C(\overline{D_2})\cup C^2(D_2)$.

Для уравнения (35) поставим задачу.

Задача 1. *Найти регулярное в D решение $u(x,y)$ уравнения (35), удовлетворяющее условиям*

$$u(0,y)=\varphi_0(y), \qquad u(1,y)=\varphi_1(y), \qquad y>0, \tag{36}$$

$$au\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+bu\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=\psi_1(x), \qquad 0\le x\le 1. \tag{37}$$

Кроме того, на линии $y=0$ выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y\to+0}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u(x,y), \tag{38}$$

$$\lim_{y\to+0}(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=0, \tag{39}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi_1(x)$ — заданные функции, a, b — заданные вещественные постоянные, $a^2+b^2>0$.

Условие (39) является необходимым, чтобы найденное решение было непрерывным. Оно возникает из того, что оператор Бесселя является сингулярным оператором: $(B_\gamma)_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\gamma}{y}\frac{\partial}{\partial y}$.

Теорема 6. *Если $\tau(x)\in C^4([0,1])$ и финитная на $[0,1]$, $\varphi_0(y),\varphi_1(y)\in C^4([0,T])$ и финитные на $[0,1]$ и выполнено условие*

$$a^2\lim_{y\to+0}\varphi_0(y)-b^2\lim_{y\to+0}\varphi_1(y)=a\psi_1(0)-b\psi_1(1), \tag{40}$$

то задача 1 имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существует решение $u(x,y)$ задачи 1. При $0<\alpha<1/2$ введем обозначения

$$\tau(x)=\lim_{y\to+0}u(x,y), \qquad x\in[0,1]. \tag{41}$$

$$\nu(x) = \lim_{y \to +0} (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u(x,y), \qquad x \in (0,1). \tag{42}$$

Тогда из $u_{xx} = (\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u$ получим

$$\nu(x) = \tau''(x). \tag{43}$$

По условиям задачи запишем

$$\tau(0) = \lim_{y \to +0} \varphi_0(y) = \psi_1(0), \qquad \tau(1) = \lim_{y \to +0} \varphi_1(y) = \widetilde{\varphi}_1. \tag{44}$$

Решение задачи Коши

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \qquad y < 0,$$

$$\lim_{y \to -0} u(x,y) = \tau(x), \qquad \lim_{y \to -0} u_y(x,y) = \nu(x)$$

имеет вид

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y) + \tau(x-y)}{2} - \frac{1}{2} \int\limits_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)\,d\xi. \tag{45}$$

Из условия (37) получаем

$$\frac{a}{2}\left(\tau(0) + \tau(x) - \int\limits_0^x \nu(\xi)\,d\xi\right) + \frac{b}{2}\left(\tau(1) + \tau(x) - \int\limits_x^1 \nu(\xi)\,d\xi\right) = \psi_1(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, будем иметь

$$(a+b)\tau'(x) - (a-b)\nu(x) = 2\psi_1'(x). \tag{46}$$

Выражая $\nu(x)$ из (46), получим

$$\nu(x) = \frac{a+b}{a-b}\tau'(x) - \frac{2}{a-b}\psi_1'(x). \tag{47}$$

Для доказательства единственности задачи 1, рассмотрим однородные условия $\varphi_0(y) \equiv 0$, $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$. Тогда $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = \widetilde{\varphi}_1 = 0$. Покажем, что $\tau(x) \equiv 0$. При $\psi_1(x) \equiv 0$ запишем равенство (47) в виде

$$\nu(x) = \frac{a+b}{a-b}\tau'(x).$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)\,d\xi = \frac{a+b}{a-b}\int\limits_0^1 \tau(\xi)\tau'(\xi)\,d\xi =$$

$$= 2\frac{a+b}{a-b}\int\limits_0^1 [\tau^2(\xi)]'\,d\xi = 2\frac{a+b}{a-b}(\tau^2(1) - \tau^2(0)) = 0. \tag{48}$$

Умножая (43) на $\tau(x)$ и интегрируя от 0 до 1, запишем

$$\int\limits_0^1 \tau(\xi)\nu(\xi)d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^1 \tau(\xi)(\tau''(\xi))^2 d\xi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int\limits_0^1 (\tau'(\xi))^2 d\xi = 0, \qquad (49)$$

следовательно, $\tau(x) = const$, а поскольку $\tau(0) = 0$, то $\tau(x) \equiv 0$. Из (43) тогда и $\nu \equiv 0$. Отсюда и из (45) заключаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D_2 при $\varphi_0(y) \equiv 0$, $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\psi_1(x) \equiv 0$.

В области D_1 решение задачи

$$(\mathscr{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_y u = u_{xx},$$

$$u(0,y) = \varphi_0(y), \qquad u(1,y) = \varphi_1(y),$$

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad x \in [0,1],$$

имеет вид (см. (29))

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x) \ll G^{\alpha}_{\gamma}(-k^2\pi^2, y) * 2k\pi[\varphi_0(y) - (-1)^k\varphi_1(y)] \gg_{\gamma} +$$

$$+\frac{2^{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\, {}_2\Psi_2 \left[\begin{array}{c} (\frac{\gamma}{2}+1, \alpha), (1,1) \\ (1,\alpha), (\gamma+1, 2\alpha) \end{array} \middle| -k^2\pi^2 x^{2\alpha} \right] \int\limits_0^1 \tau(s)\sin(k\pi s)\, ds. \qquad (50)$$

Из этого представления решения следует, что при $\varphi_0(y) = \varphi_1(y) = \tau(x) \equiv 0$ в области D_1 решение $u(x,y) \equiv 0$. Значит, однородная задача имеет только тривиальное решение, следовательно, если решение задачи существует, то оно единственно.

Докажем существование решения. Функцию ν из (43) подставим в (46), получим

$$\tau''(x) - \frac{a+b}{a-b}\tau'(x) = -\frac{2}{a-b}\psi_1'(x).$$

Из свойств функции $\psi_1(x)$ следует существование решения этого уравнения при условиях (44) вида

$$\tau(x) = -\frac{2}{a+b}\int\limits_0^1 G(x,\xi)\psi_1'(\xi)d\xi + G_{\xi}(x,1)\widetilde{\varphi}_1 - G_{\xi}(x,0)\psi_1(0),$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{(e^{px}-e^{p})(1-e^{-p\xi})}{e^{p}-1}, & \text{если } 0 \le \xi \le x; \\ \frac{(e^{px}-1)(1-e^{p(1-\xi)})}{e^{p}-1}, & \text{если } x \le \xi \le 1, \end{cases}$$

$$G_{\xi}(x,1) = \frac{e^{px}-1}{e^{p}-1}, \qquad G_{\xi}(x,0) = \frac{e^{px}-e^{p}}{e^{p}-1}.$$

После нахождения τ из (43) находится ν и регулярное в D решение $u(x,y)$ строится по формулам (45) и (50).

□

Заключение

За последние десятилетия многие математики исследовали различные задачи для уравнений смешанного типа. Интенсивно проводились исследования уравнений параболо-гиперболического и гиперболо-эллиптического типов. При решении задач для таких уравнений, как правило, решения для каждого из двух уравнений известны. Основной интерес составляет доказательство существования и единственности решения. Методы доказательства однозначной разрешимости таких задач основаны на методах дробного дифференцирования, теории специальных функций, уравнений Вольтерра и Фредгольма и одномерных сингулярных уравнений.

В последние годы все большую популярность приобретает изучение нового класса уравнений, а именно смешанных уравнений с различными дробными степенями дифференциальных операторов. В этой работе мы изучили двухточечную задачу для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя. При решении этой задачи возникли существенные сложности, связанные с отсутствием математического аппарата для работы с дробной степенью оператора Бесселя. Поэтому предварительно была получена свертка для преобразования Мейера, решены обыкновенное дифференциальное уравнения и смешанные задачи для параболических уравнений с дробной степенью оператора Бесселя. После предварительной работы была доказана однозначная разрешимость двухточечной задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с дробной степенью оператора Бесселя в смысле классического и сильного решений.

Список литературы

1. Бжихатлов Х. Г., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, *Докл. АН СССР*, 1968. Т. 183, № 2, С. 261–264.
2. Репин О. А., Килбас А. А. Аналог задачи Бицанзе–Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной, *Дифференциальные уравнения*, 2003. Т. 39, № 5, С. 638–644.
3. Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто, *Дифференциальные уравнения*, 2006. Т. 42, № 5, С. 599–609.
4. Хубиев К. У. Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2018. Т. 28, № 1, С. 82–90.
5. Sprinkhuizen-Kuyper I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator, *J. Math. Analysis and Applications*, 1979. vol. 72, pp. 674–702.
6. McBride A. C. *Fractional calculus and integral transforms of generalized functionsFractional calculus and integral transforms of generalized functions*. London: Pitman, 1979. 179 pp.
7. Shishkina E. L. and Sitnik S. M. On fractional powers of Bessel operators, *Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions*, 2017. vol. 8, no. 1, pp. 49–67.
8. Kilbas A. A., Saigo M. *H–Transforms. Theory and Applications*. Florida: Chapman and Hall: Boca Raton, 2004. 408 pp.
9. Glaeske H. J., Prudnikov A. P., Skornik K. A. *Operational calculus and related topics*. Florida: Chapman and Hall: Boca Raton, 2006. 424 pp.
10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*. New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1992. 808 pp.

11. Shishkina E. L. and Sitnik S. M. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov-Caputo type, *Mathematics*, 2019. vol. 7, no. 12, pp. 21.
12. Shishkina E. L. and Sitnik S. M. *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Cambridge: Academic Press, 2020. 592 pp.
13. Watson G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: University Press, 1922. 804 pp.
14. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.

Информация об авторах

Дзарахохов Азамат Валерианович ✉ – старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин, Горский государственный аграрный университет, г. Владикавказ, Россия, https://orcid.org/0000-0003-2231-4345.

Шишкина Элина Леонидовна ✉ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры Математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ БелГУ.), г. Белгород, Россия, https://orcid.org/0000-0003-4083-1207.

References

[1] Bzhikhatlov H. G., Nakhushev A. M. On a boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type, Dokl. AN SSSR, 1968, **183**, 2, 261-264. (In Russian)

[2] Repin O. A., Kilbas A. A. An analog of the Bitsadze-Samarskii problem for a mixed-type equation with a fractional derivative, Dif. equations, 2003, **39**, 5, 638-644. (In Russian)

[3] Voroshilov A.A., Kilbas A.A. The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative, Differential Equations, 2006, **42**, 5, 638-649.

[4] Khubiev K. U. Boundary value problem with shift for loaded hyperbolic-parabolic type equation involving fractional diffusion operator, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2018, **28**, 1, 82–90. (In Russian)

[5] Sprinkhuizen-Kuyper I. G. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator, J. Math. Analysis and Applications, 1979, 72, 674–702.

[6] McBride A. C. Fractional calculus and integral transforms of generalized functionsFractional calculus and integral transforms of generalized functions, London, Pitman, 1979, 179.

[7] Shishkina E. L., Sitnik S. M. On fractional powers of Bessel operators, Journal of Inequalities and Special Functions, Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions, 2017, **8**, 1, 49–67.

[8] Kilbas A. A., Saigo M. H–Transforms. Theory and Applications, Florida: Chapman and Hall, Boca Raton, 2004, 408.

[9] Glaeske H. J., Prudnikov A. P., Skornik K. A. Operational calculus and related topics, Florida: Chapman and Hall, Boca Raton, 2006, 424.

[10] Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions, New York, Gordon & Breach Sci. Publ., 1992, 808.

[11] Shishkina E. L., Sitnik S. M. A fractional equation with left-sided fractional Bessel derivatives of Gerasimov-Caputo type, Mathematics, 2019, **7**, 12, 21.

[12] Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics, Cambridge, Academic Press, 2020, 592.

[13] Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge, University Press, 1922, 804.

[14] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations, Amsterdam, Elsevier, 2006, 523.

Information about authors

Dzarakhokhov Azamat Valerianovich – Senior Lecturer Dep. of Natural Sciences, Gorsky State Agrarian University, Vladikavkaz, Russia https://orcid.org/0000-0003-2231-4345.

Shishkina Elina Leonidovna – Dr. Sci. (Math. & Phys.) Associate Professor, Professor of the Dep. of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University; Professor of the Dep. of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod State National Research University, Russia, https://orcid.org/0000-0003-4083-1207.