Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. №1. C. 9-26. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-9-26

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.95

Разрешимость нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка

А. Б. Бекиев*

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Узбекистан,
Республика Каракалпакстан, 230112, г. Нукус, ул. Ч. Абдиров 1.

Аннотация. В данной работе для уравнения в частных производных четвертого порядка в прямоугольной области рассмотрена нелокальная обратная задача по поиску неизвестной правой части, которая зависит от одной переменной. Собственные функции и присоединенные функции соответствующей спектральной задачи, и их биортогональные функции полны и образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Установлены критерии единственности и существования решения рассматриваемой нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка. Единственность решения нелокальной обратной задачи вытекает из полноты системы биортогональных функций. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным и присоединенным функциям, соответствующей спектральной задачи. Установлены достаточные условия на граничные функции, которые гарантируют теоремы существования и устойчивости решения рассматриваемой задачи. В замкнутой области показана абсолютная и равномерная сходимость найденного решения обратной задачи в виде ряда, а также рядов, полученных почленным дифференцированием по t и x соответственно два и четыре раза, в зависимости от гладкости функции заданными начальными условиями. При этом возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. Доказано, что в зависимости от размера области, множество ненулевых решений выражения в знаменателе не пусто. А также, показано, что если этот знаменатель равен нулю, то данная задача будет иметь нетривиальное решение при однородных условиях. Доказана также, устойчивость решения обратной задачи по нормам пространств L_2, W_2^n и $C(\Omega_\pm)$, относительно изменения входных данных.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, обратная нелокальная задача, единственность, существование, устойчивость.

Получение: 02.01.2023; Исправление: 01.02.2023; Принятие: 08.04.2023; Публикация онлайн: 15.04.2023

Для цитирования. Бекиев А. Б. Разрешимость нелокальной обратной задачи для уравнения четвертого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2023. Т. 42. № 1. C. 9-26. EDN: BJBNHI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-9-26.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: ashir1976@mail.ru

MATHEMATICS
https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-9-26
Research Article
Full text in Russian
MSC 35K35

Solvability of a Nonlocal Inverse Problem for a Fourth-Order Equation

A. B. Bekiev*

Karakalpak State University named after Berdakh, Uzbekistan, Republic of Karakalpakstan, 230112, Nukus, Ch. Abdirov St. 1.

Abstract. In this paper, we consider a nonlocal inverse problem of finding an unknown right-hand side with one variable for a fourth-order partial differential equation in a rectangular domain. The eigenfunctions and associated functions of the corresponding spectral problem and its biorthogonal functions are complete and form a Riesz basis in the space $L_2(0,1)$. Criteria for the uniqueness and existence of a solution to the considered nonlocal inverse problem for a fourth-order equation are established. The uniqueness of the solution of the nonlocal inverse problem follows from the completeness of the system of biorthogonal functions. The solution of the problem is constructed as the sum of a series in terms of eigenfunctions and associated functions of the corresponding spectral problem. Sufficient conditions are established for the boundary functions that guarantee existence and stability theorems for the solution of the problem under consideration. In a closed domain, absolute and uniform convergence of the found solution of the inverse problem is shown in the form of a series, as well as series obtained by term-by-term differentiation with respect to t and x two and four times, respectively, depending on the smoothness of the function given the initial conditions. In this case, small denominators arise, which hinder the convergence of these series. It is proved that, depending on the size of the domain, the set of non-zero solutions of the expression in the denominator is not empty. And also, it is shown that if this denominator is equal to zero, then this problem will have a non-trivial solution under homogeneous conditions. It is also proved that the solution of the inverse problem is stable in the norms of the spaces L_2, W_2^n and $C(\Omega_\pm)$ with respect to changes in the input data.

Key words: fourth order equation, inverse nonlocal problem, uniqueness, existence, stability.

Received: 02.01.2023; Revised: 01.02.2023; Accepted: 08.04.2023; First online: 15.04.2023

For citation. Bekiev A. B. Solvability of a nonlocal inverse problem for a fourth-order equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, **42**: 1, 9-26. EDN: BJBNHI. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-9-26.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to print.

***Correspondence:** E-mail: ashir1976@mail.ru

Введение

Математические моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, например, некоторые задачи геофизики, аэродинамики, экологии, сейсмологии, диагностики в медицине, компьютерной томографии, неразрушающего контроля и дефектоскопии, георадиолокации, приводят к изучению обратных задач [11].

Исследование краевых задач для уравнений в частных производных высоких порядков играют важную роль, в частности, многие научно-практические исследования, приводят к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка. Например, изучение задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, задачи изгиба тонких пластинок, поперечные колебания стержня и балок и другие, сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка.

В монографии [4] изучены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. В работе [1] рассмотрена разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четвертого порядка. В [13, 14] исследованы коэффициентные обратные задачи для дифференциальных уравнений четвертого порядка в прямоугольной области. Изучение краевых задач для уравнения четвертого порядков рассматривались в работах [2, 22, 23].

В данной работе рассмотрены обратные краевые задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями. Корректность краевых задач для уравнений с частными производными четвертого порядка, устанавливается доказательством существования и единственности решения. Данная работа отличается от работ [13, 14], так как, здесь исследуется обратная задача для уравнения четвертого порядка с неизвестными правыми частями.

Такие обратные задачи для уравнений второго порядка исследованы в работах [3], [5]- [10], [12], [15]- [20], [25], [26]. В [3] изучены коэффициентные обратные задачи и обратные задачи, в которых определены краевые и начальные условий для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений с частными производными. А в [5] исследованы некорректные задачи и коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными второго порядка. В работах [17]- [20] установлены критерий единственности решения задачи и решения этих задач построено в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

Подстановка задачи

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xxxx}(x,t) - sgn\, t \cdot u_{tt}(x,t) = f(x). \tag{1}$$

Задача 1. Найти функцию $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x,t) \in C^{3,1}_{x,t}\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+ \cup \Omega_-\right), \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2[0,1], \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \; (x,t) \in \Omega_+ \cup \Omega_- \tag{4}$$

$$u(0,t) = 0, \; u_x(0,t) = u_x(1,t), \; u_{xx}(1,t) = 0, \; u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), \; -\alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \, u(x,-\alpha) = \psi(x), \, u_t(x,-\alpha) = \eta(x), \, 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}, \Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi(x), \psi(x), \eta(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(1) = 0$, $\varphi'''(0) = \varphi'''(1), \psi(0) = 0, \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(1) = 0, \psi'''(0) = \psi'''(1), \eta(0) = 0$, $\eta'(0) = \eta'(1), \eta''(1) = 0$.

Система функций

$$X_0(x) = 2x, \; X_{1k}(x) = 2\sin\lambda_k x, \; X_{2k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \cos\lambda_k x \tag{7}$$

и биортогональная с ней система функций

$$Y_0(x) = 1, \, Y_{1k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k} - 1} + \sin\lambda_k x, \; Y_{2k}(x) = 2\cos\lambda_k x, \quad \lambda_k = 2\pi k, \; k = 1,2,... \tag{8}$$

образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$ [24].

Единственность и существование решения задачи

Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ решение задачи (12)-(16). Рассмотрим функцию

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x,t)\, Y_0(x)\, dx \tag{9}$$

$$u_{i,k}(t) = \int_0^1 u(x,t)\, Y_{ik}(x)\, dx, \, i = 1,2; k = 1,2,.... \tag{10}$$

На основе (21) и (22) введем следующие функции

$$u_{0,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\, Y_0(x)\, dx, \; u_{ik,\varepsilon}(t) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\, Y_{ik}(x)\, dx, \, i = 1,2; k = 1,2,..., \tag{11}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя функции (23) по t два раза, учитывая уравнение (11), имеем

$$u''_{0,\varepsilon}(t)=\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[u_{xxxx}(x,t)-f(x)]Y_0(x)\,dx,\ t>0,$$

$$u''_{0,\varepsilon}(t)=\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[f(x)-u_{xxxx}(x,t)]Y_0(x)\,dx,\ t<0,$$

$$u''_{ik,\varepsilon}(t)=\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[u_{xxxx}(x,t)-f(x)]Y_{ik}(x)\,xdx,\ t>0,$$

$$u''_{ik,\varepsilon}(t)=\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}[f(x)-u_{xxxx}(x,t)]Y_{ik}(x)\,dx,\ t<0.$$

В этих равенствах вычисляя интегралы правой части, учитывая условий (15), и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, имеем

$$\begin{aligned} u''_0(t)&=-f_0,\ t>0,\\ u''_0(t)&=f_0,\ t<0, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} u''_{ik}(t)-\lambda_k^4u_{ik}(t)&=-f_{ik},\ \ t>0,\\ u''_{ik}(t)+\lambda_k^4u_{ik}(t)&=f_{ik},\ \ t<0, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$f_0=\int\limits_0^1 f(x)Y_0(x)\,dx,\ f_{ik}=\int\limits_0^1 f(x)Y_{ik}(x)\,dx. \tag{14}$$

Дифференциальные уравнения (24), (25) имеют общие решения

$$u_0(t)=\begin{cases} -f_0\dfrac{t^2}{2}+a_0t+b_0,\ t>0,\\ f_0\dfrac{t^2}{2}+c_0t+d_0,\ t<0, \end{cases} \tag{15}$$

$$u_{ik}(t)=\begin{cases} a_{ik}e^{\lambda_k^2t}+b_{ik}e^{-\lambda_k^2t}+\dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4},\ t>0,\\ c_{ik}\cos\lambda_k^2t+d_{ik}\sin\lambda_k^2t+\dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4},\ t<0, \end{cases} \tag{16}$$

где $a_0, b_0, c_0, d_0, a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}$ и d_{ik} – произвольные постоянные, $k\in\mathbb{N}$. По условию функция $u(x,t)$ принадлежит классу (12), тогда для функций (27) и (28) выполнены равенства

$$\begin{aligned} &u_0(0-0)=u_0(0+0),\ u'_0(0-0)=u'_0(0+0),\\ &u_{ik}(0-0)=u_{ik}(0+0),\ u'_{ik}(0-0)=u'_{ik}(0+0). \end{aligned} \tag{17}$$

Функции (27)-(28) удовлетворяет условиям (29) тогда и только тогда, когда

$$c_0 = a_0 + b_0,\ d_0 = a_0 - b_0,$$

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik},\ d_{ik} = a_{ik} - b_{ik}.$$

Тогда (27)-(28) примет вид

$$u_0(t) = \begin{cases} -f_0\dfrac{t^2}{2} + a_0 t + b_0,\ t > 0, \\ f_0\dfrac{t^2}{2} + a_0 t + b_0,\ t < 0, \end{cases} \tag{18}$$

$$u_{ik}(t) = \begin{cases} a_{ik}e^{\lambda_k^2 t} + b_{ik}e^{-\lambda_k^2 t} + \dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4},\ t > 0, \\ (a_{ik} + b_{ik})\cos\lambda_k^2 t + (a_{ik} - b_{ik})\sin\lambda_k^2 t + \dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4},\ t < 0. \end{cases} \tag{19}$$

Теперь для нахождения неизвестных коэффициентов $a_0, b_0, f_0, a_{ik}, b_{ik}$ и f_{ik} используем условия (16) и формулы (21)-(22), которые переходят в:

$$\begin{aligned} &u_0(\beta) = \varphi_0,\ u_0(-\alpha) = \psi_0,\ {u'}_0(-\alpha) = \eta_0, \\ &u_{ik}(\beta) = \varphi_{ik},\ u_{ik}(-\alpha) = \psi_{ik},\ {u'}_{ik}(-\alpha) = \eta_{ik}, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x)Y_0(x)\,dx,\ \psi_0 = \int_0^1 \psi(x)Y_0(x)\,dx,$$

$$\eta_0 = \int_0^1 \eta(x)Y_0(x)\,dx,$$

$$\varphi_{ik} = \int_0^1 \varphi(x)Y_{ik}(x)\,dx,\ \psi_{ik} = \int_0^1 \psi(x)Y_{ik}(x)\,dx, \tag{21}$$

$$\eta_{ik} = \int_0^1 \eta(x)Y_{ik}(x)\,dx. \tag{22}$$

Удовлетворяя функцию (18)-(19) условиям (20), получим систему уравнений

$$\begin{cases} -f_0\dfrac{\beta^2}{2} + a_0\beta + b_0 = \varphi_0, \\ f_0\dfrac{\alpha^2}{2} - a_0\alpha + b_0 = \psi_0, \\ f_0\alpha + a_0 = \eta_0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} a_{ik}e^{\lambda_k^2\beta}+b_{ik}e^{-\lambda_k^2\beta}+\dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4}=\varphi_{ik}, \\ (a_{ik}+b_{ik})\cos\lambda_k^2\alpha-(a_{ik}-b_{ik})\sin\lambda_k^2\alpha+\dfrac{f_{ik}}{\lambda_k^4}=\psi_{ik}, \\ (a_{ik}+b_{ik})\sin\lambda_k^2\alpha+(a_{ik}-b_{ik})\cos\lambda_k^2\alpha=\dfrac{\eta_{ik}}{\lambda_k^2}. \end{cases} \tag{24}$$

Определители $\Delta_0(\alpha,\beta)$, $\Delta_k(\alpha,\beta)$ систем (23) и (24) равны соответственно

$$\Delta_0(\alpha,\beta)=-\alpha\beta-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2},$$

$$\bar{\Delta}_k(\alpha,\beta)=\frac{2}{\lambda_k^4}\Delta_k(\alpha,\beta)=\frac{2}{\lambda_k^4}\left[\cos\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_k^2\beta-\sin\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_k^2\beta-1,\right]$$

Если

$$\Delta_0(\alpha,\beta)\neq 0, \tag{25}$$

при всех $k\in N$

$$\Delta_k(\alpha,\beta)\neq 0, \tag{26}$$

то эти системы имеет единственное решение

$$a_0=\frac{1}{2\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[2\alpha(-\varphi_0+\psi_0)+\eta_0\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right],$$

$$b_0=\frac{1}{2\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[-\alpha^2(\varphi_0+\beta\eta_0)+\beta^2(\alpha\eta_0+\psi_0)-2\alpha\beta\psi_0\right],$$

$$f_0=\frac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[\eta_0(\alpha+\beta)-\varphi_0+\psi_0\right], \tag{27}$$

$$a_{ik}=\frac{1}{2\lambda_k^2\Delta_k(\alpha,\beta)}\Big[\lambda_k^2\varphi_{ik}\left(\cos\lambda_k^2\alpha-\sin\lambda_k^2\alpha\right)+\lambda_k^2\psi_{ik}\left(\sin\lambda_k^2\alpha-\cos\lambda_k^2\alpha\right)+$$
$$+\eta_{ik}\left(-\sin\lambda_k^2\alpha-\cos\lambda_k^2\alpha+e^{-\lambda_k^2\beta}\right)\Big],$$

$$b_{ik}=\frac{1}{2\lambda_k^2\Delta_k(\alpha,\beta)}\Big[\lambda_k^2\varphi_{ik}\left(\sin\lambda_k^2\alpha+\cos\lambda_k^2\alpha\right)-\lambda_k^2\psi_{ik}\left(\sin\lambda_k^2\alpha+\cos\lambda_k^2\alpha\right)+$$
$$+\eta_{ik}\left(-\sin\lambda_k^2\alpha+\cos\lambda_k^2\alpha-e^{\lambda_k^2\beta}\right)\Big],$$

$$f_{ik}=\frac{\lambda_k^2}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\Big[-\lambda_k^2\varphi_{ik}+\lambda_k^2\psi_{ik}\left(-\sin\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_k^2\beta+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_k^2\beta\right)+$$
$$+\eta_{ik}\left(\sin\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_k^2\beta+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_k^2\beta\right)\Big]. \tag{28}$$

Тогда решение уравнений (24), (25) удовлетворяющие условиям (29), (20) примут вид

$$u_0(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[\varphi_0A_0^+(t)+\psi_0B_0^+(t)+\eta_0C_0^+(t)\right],\ t>0,\\ \dfrac{1}{\Delta_0(\alpha,\beta)}\left[\varphi_0A_0^-(t)+\psi_0B_0^-(t)+\eta_0C_0^-(t)\right],\ t<0,\end{cases} \tag{29}$$

$$u_{ik}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[\varphi_{ik}A_k^+(t)+\psi_{ik}B_k^+(t)+\dfrac{1}{\lambda_k^2}\eta_{ik}C_k^+(t)\right], \ t>0,\\ \dfrac{1}{\Delta_k(\alpha,\beta)}\left[\varphi_{ik}A_k^-(t)+\psi_{ik}B_k^-(t)+\dfrac{1}{\lambda_k^2}\eta_{ik}C_k^-(t)\right], \ t<0,\end{cases} \tag{30}$$

где

$$A_0^+(t)=\frac{1}{2}\left(t^2-2\alpha t-\alpha^2\right), \ B_0^+(t)=\frac{1}{2}\left[-t^2+2\alpha(t-\beta)+\beta^2\right],$$

$$C_0^+(t)=\frac{1}{2}\left[-(\alpha+\beta)t^2+\alpha^2(t-\beta)+\beta^2(t+\alpha)\right],$$

$$A_0^-(t)=-\frac{1}{2}(t+\alpha)^2, \ B_0^-(t)=\frac{1}{2}\left[t^2+2\alpha(t-\beta)+\beta^2\right],$$

$$C_0^-(t)=\frac{1}{2}\left[(\alpha+\beta)t^2+\alpha^2(t-\beta)+(t+\alpha)\beta^2\right],$$

$$A_k^+(t)=-\sin\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_k^2t+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_k^2t-1,$$

$$B_k^+(t)=-\sin\lambda_k^2\alpha\cdot\left(\mathrm{sh}\lambda_k^2\beta-\mathrm{sh}\lambda_k^2t\right)+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot\left(\mathrm{ch}\lambda_k^2\beta-\mathrm{ch}\lambda_k^2t\right),$$

$$C_k^+(t)=-\mathrm{sh}\lambda_k^2(\beta-t)+\sin\lambda_k^2\alpha\cdot\left(\mathrm{ch}\lambda_k^2\beta-\mathrm{ch}\lambda_k^2t\right)+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot\left(\mathrm{sh}\lambda_k^2\beta-\mathrm{sh}\lambda_k^2t\right),$$

$$A_k^-(t)=\cos\lambda_k^2(t+\alpha)-1,$$

$$B_k^-(t)=-\cos\lambda_k^2(t+\alpha)-\sin\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_k^2\beta+\cos\lambda_k^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_k^2\beta,$$

$$C_k^-(t)=-\sin\lambda_k^2(t+\alpha)+\mathrm{sh}\lambda_k^2\beta\cdot\left(\cos\lambda_k^2\alpha-\cos\lambda_k^2t\right)+\mathrm{ch}\lambda_k^2\beta\cdot\left(\sin\lambda_k^2t+\sin\lambda_k^2\alpha\right).$$

Теперь докажем единственность решения задачи (12)-(16). Пусть $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\eta(x)\equiv 0$ на $[0,1]$ и выполняются условия (25) и (26) при всех $k\in N_0=N\bigcup\{0\}$. Тогда $\varphi_0\equiv 0$, $\psi_0\equiv 0$, $\eta_0\equiv 0$, $\varphi_{ik}\equiv 0$, $\psi_{ik}\equiv 0$, $\eta_{ik}\equiv 0$ и из (29) - (30) следуют, что $u_0(t)\equiv 0$, $u_{ik}(t)\equiv 0$ на $[-\alpha,\beta]$ и $f_{ik}\equiv 0$ при всех $k\in N_0$.

Тогда из равенств (21)-(22) и (26) имеем, что при всех $t\in[\alpha,\beta]$

$$\int_0^1 u(x,t)Y_0(x)\,dx=0, \ \int_0^1 f(x)Y_0(x)\,dx=0,$$

$$\int_0^1 u(x,t)Y_{ik}(x)\,dx=0, \ \int_0^1 f(x)Y_{ik}(x)\,dx=0, \ k\in N.$$

Отсюда в силу полноты (18) в пространстве и непрерывности функции $u(x,t)$ и $f(x)$ соответственно на области $\bar{\Omega}$ и $(0,1)$, следуют что $u(x,t)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$ и $f(x)\equiv 0$ на $(0,1)$.

Предположим при некоторых α, β и $k=l\in N$нарушено условие (26), т.е.

$$\Delta_l(\alpha,\beta)=\cos\lambda_l^2\alpha\cdot \mathrm{ch}\lambda_i^2\beta-\sin\lambda_l^2\alpha\cdot \mathrm{sh}\lambda_l^2\beta-1=0. \tag{31}$$

Тогда задача 1 при $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\eta(x)\equiv 0$ имеет ненулевое решение:

$$u_l(x,t)=u_l(t)\sin\lambda_l x, \ f_l(x)=\bar{f}_{1l}\sin\lambda_l x,$$

где

$$u_l(t)=\begin{cases}\dfrac{\bar f_{1l}}{\lambda_l^4}\Delta_l(\alpha,t),\ t>0,\\ \dfrac{\bar f_{1l}}{\lambda_l^4}\left(1-\cos\lambda_l^2(t+\alpha)\right),\ t<0,\end{cases}$$

где $\Delta_l(\alpha,t)=\cos\lambda_l^2\alpha\cdot\mathrm{ch}\lambda_l^2 t-\sin\lambda_l^2\alpha\cdot\mathrm{sh}\lambda_l^2 t-1$, $\bar f_{1l}\neq 0$ – произвольная постоянная.

Пусть при некоторых α и β нарушено условие (25), т.е.

$$\Delta_0(\alpha,\beta)=-\alpha\beta-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}=0.$$

Тогда однородная задача (12)-(16), где $\varphi(x)\equiv 0$, $\psi(x)\equiv 0$, $\eta(x)\equiv 0$ имеет ненулевые решение $u(x,t)=u_0(t)$, $f(x)=\bar f_0$, где

$$u_0(t)=\begin{cases}\bar f_0\left(-\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}t-\alpha\beta\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right),\ t>0,\\ \bar f_0\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}t-\alpha\beta\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right),\ t<0,\end{cases}$$

$\bar f_0\neq 0$ — произвольная постоянная.

Теперь (26) представляем в виде

$$\Delta_k(\alpha,\beta)=-\sqrt{\mathrm{ch}2\lambda_k^2\beta}\sin\left(\lambda_k^2\alpha-\gamma_k\right)-1, \tag{32}$$

где $\gamma_k=\arcsin\frac{\mathrm{ch}\lambda_k^2\beta}{\sqrt{\mathrm{ch}2\lambda_k^2\beta}}$. Из (32) видно, что выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)=0$ только в том случае, когда

$$\alpha=\frac{\gamma_k}{\lambda_k^2}+\frac{(-1)^{m+1}}{\lambda_k^2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}2\lambda_k^2\beta}}-\frac{m\pi}{\lambda_k^2},\ m=0,1,2,....$$

При таких значениях α нарушается единственности решения задачи (12)-(16).

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (12)-(16), *то оно единственно только тогда, когда выполнены условия* (25) *и* (26) *при всех* $k\in N$.

Теперь покажем существование решения задачи. Для этого приведем некоторые леммы.

Лемма 1. *Если α иррациональное число, которая представляется в виде $\alpha=\frac{l}{\pi q}$, где $q,l\in N$, $(l,q)=1$ и $(q,4)=1$, то при больших k существует положительная постоянная C_0 такая, что справедлива следующая оценка*

$$|\Delta_k(\alpha,\beta)|\geq C_0e^{\lambda_k^2\beta}. \tag{33}$$

Доказательство. Доказательство леммы показывается аналогично леммы 1 из [18]. Известно, что $\gamma_k\to\frac{\pi}{4}$ при $k\to\infty$. Пусть α - иррациональное число, представимое в виде $\frac{l}{\pi}$, $l\in N$. Тогда из (32) для всех k имеем

$$|\Delta_k(\alpha,\beta)|=\left|(-1)^{k^2l}\mathrm{ch}\lambda_k^2\beta+1\right|\geq\frac{1}{2}e^{\lambda_k^2\beta}\left|1+e^{-2\lambda_k^2\beta}-2e^{-\lambda_k^2\beta}\right|\geq C_0e^{\lambda_k^2\beta}.$$

Пусть теперь, $\alpha=\frac{l}{\pi q}$, где $q,l\in N$, $(l,q)=1$. Разделим k^2l на q с остатком: $k^2l=sq+r$, $0\le r<q$, $s,r\in N_0$. Тогда из (32) получаем:

$$\begin{gathered}|\Delta_k(\alpha,\beta)|=\left|(-1)^s\sqrt{ch2\lambda_k^2\beta}\sin\left(\frac{r\pi}{q}-\gamma_k\right)+1\right|\ge\\ \ge\frac{e^{\lambda_k^2\beta}}{\sqrt{2}}\left|\left|\sin\left(\frac{r\pi}{q}-\frac{\pi}{4}+\varepsilon_k\right)\right|-2e^{-\lambda_k^2\beta}\right|\end{gathered}\tag{34}$$

где $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$. Поскольку числа q и 4 взаимно простые, то из (34) следует (33). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть имеет место оценка* (33). *Тогда при больших натуральных* k *справедливы следующие оценки:*

$$|u_{ik}(t)|\le\begin{cases}C_1\left(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|+\dfrac{1}{\lambda_k^2}|\eta_{ik}|\right),\ t>0,\\ C_2\left(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|+\dfrac{1}{\lambda_k^2}|\eta_{ik}|\right),\ t<0,\end{cases}$$

$$\left|u'_{ik}(t)\right|\le\begin{cases}C_3\left(\lambda_k^2|\varphi_{ik}|+\lambda_k^2|\psi_{ik}|+|\eta_{ik}|\right),\ t>0,\\ C_4\left(\lambda_k^2|\varphi_{ik}|+\lambda_k^2|\psi_{ik}|+|\eta_{ik}|\right),\ t<0,\end{cases}$$

$$\left|u''_{ik}(t)\right|\le\begin{cases}C_5\left(\lambda_k^4|\varphi_{ik}|+\lambda_k^4|\psi_{ik}|+\lambda_k^2|\eta_{ik}|\right),\ t>0,\\ C_6\left(\lambda_k^4|\varphi_{ik}|+\lambda_k^4|\psi_{ik}|+\lambda_k^2|\eta_{ik}|\right),\ t<0,\end{cases}$$

$$|f_{ik}(t)|\le C_7\left(\lambda_k^4|\varphi_{ik}|+\lambda_k^4|\psi_{ik}|+\lambda_k^2|\eta_{ik}|\right)$$

здесь и далее C_i*- положительные постоянные.*

Справедливость этих оценок непосредственно вытекает из формул (30) на основании оценки (33).

Лемма 3. *Пусть* $\varphi(x),\psi(x)\in C^5[0,1]$, $\eta(x)\in C^3[0,1]$ *и* $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$, $\varphi''(1)=0$, $\varphi'''(0)=\varphi'''(1)$, $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=\psi'(1)$, $\psi''(1)=0$, $\psi'''(0)=\psi'''(1)$, $\varphi^{(IV)}(0)=\psi^{(IV)}(0)=0$, $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=\eta'(1)$, $\eta''(1)=0$. *Тогда справедливы*

$$\begin{gathered}\varphi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-a_{1k}+b_{1k}\right]+\frac{1}{\lambda_k^5}\bar\varphi_{1k}^{(5)},\ \varphi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\bar\varphi_{2k}^{(5)},\\ \psi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-a_{2k}+b_{2k}\right]+\frac{1}{\lambda_k^5}\bar\psi_{1k}^{(5)},\ \psi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^5}\bar\psi_{2k}^{(5)},\\ \eta_{1k}=\frac{1}{\lambda_k^3}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[-a_{3k}+b_{3k}\right]-\frac{1}{\lambda_k^3}\bar\eta_{1k}^{(3)},\ \eta_{2k}=\frac{1}{\lambda_k^3}\bar\eta_{2k}^{(3)},\end{gathered}\tag{35}$$

где

$$a_{1k}=\int\limits_0^1\varphi^{(5)}(x)e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ b_{1k}=\int\limits_0^1\varphi^{(5)}(x)e^{-\lambda_kx}dx,$$

$$a_{2k}=\int_0^1 \psi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ b_{2k}=\int_0^1 \psi^{(5)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$a_{3k}=\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\,e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ b_{3k}=\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\,e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\bar{\varphi}_{1k}^{(5)}=\int_0^1 \varphi^{(5)}(x)\cos\lambda_k x dx,\ \bar{\varphi}_{2k}^{(5)}=2\int_0^1 \varphi^{(5)}(x)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\bar{\psi}_{1k}^{(5)}=\int_0^1 \varphi^{(5)}(x)\cos\lambda_k x dx,\ \bar{\psi}_{2k}^{(5)}=2\int_0^1 \psi^{(5)}(x)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\bar{\eta}_{1k}^{(3)}=\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\cos\lambda_k x dx,\ \bar{\eta}_{2k}^{(3)}=2\int_0^1 \psi^{(3)}(x)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\varphi_{ik}^{(5)}\right|^2\le\int_0^1\left[\varphi^{(5)}(x)\right]^2dx,\ \sum_{k=0}^{\infty}\left|\psi_{ik}^{(5)}\right|^2\le\int_0^1\left[\psi^{(5)}(x)\right]^2dx,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\eta_{ik}^{(3)}\right|^2\le\int_0^1\left[\eta^{(3)}(x)\right]^2dx. \tag{36}$$

Доказательство. Интегралы в формулах (21) и (22) интегрируя по частям соответственно пять и три раза и учитывая условий леммы, получим (35). Лемма доказана.

Решение задачи (12)-(16) можно искать в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t)=u_0(t)\,X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[u_{1k}(t)\,X_{1k}(x)+u_{2k}(t)\,X_{2k}(x)], \tag{37}$$

$$f(x)=f_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{1k}X_{1k}(x)+f_{2k}X_{2k}(x)], \tag{38}$$

где $u_0(t)$, $u_{ik}(t)$, f_0, f_{ik} соответственно определены по формулам (27)-(28) и (29)-(30). Ряды (37) почленно формально дифференцируем по t два раза и по x четыре раза и имеем

$$u_{tt}(x,t)=u''_0(t)\,X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[u''_{1k}(t)\,X_{1k}(x)+u''_{2k}(t)\,X_{2k}(x)\right], \tag{39}$$

$$u_{xxxx}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^4[u_{1k}(t)\,X_{1k}(x)+u_{2k}(t)\,X_{2k}(x)]. \tag{40}$$

Тогда ряды (39), (40) при выполнении оценки (33) мажорируются рядом

$$C_8\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left[\lambda_k^4\left(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|\right)+\lambda_k^2|\eta_{ik}|\right]. \tag{41}$$

На основании (35) и (36) доказывается сходимость ряда (41), т.е. ряд

$$C_8\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_k}\left[\left|\varphi_{ik}^{(5)}\right|+\left|\psi_{ik}^{(5)}\right|+\left|\eta_{ik}^{(3)}\right|\right]$$

сходится. Из сходимости (41) в силу признака Вейерштрасса равномерно сходится ряд (37) в области $\overline{\Omega}$, а ряды (39), (40) в областях $\overline{\Omega}_+$ и $\overline{\Omega}_-$и ряд (38) на $[0,p]$. Подставляя ряды в (38), (39) и (40) в уравнение (11) можно убеждать, что функции (37) и (38) удовлетворяют уравнению (11) на $\Omega_+\bigcup\Omega_-$.

Итак, теорема доказана

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi(x),\psi(x)$ *и* $\eta(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 3 и выполнено условие* (25) *и* (26)*. Тогда существует единственное решение задачи* (12)-(16)*, которое определяется рядами* (37)*,* (38)*.*

Устойчивость решения

Введем следующие нормы:

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,1]}=\left(\int_0^1|u(x,t)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega}_\pm)}=\max_{\bar{\Omega}_\pm}|u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n[0,1]}=\left(\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\left|f^k(x)\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},\ n\in N_0.$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для решения* (37), (38) *задачи 1 справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2}\le C_{11}\left(\|\varphi\|_{L_2}+\|\psi\|_{L_2}+\|\eta\|_{L_2}\right),\ t>0,$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2}\le C_{12}\left(\|\varphi\|_{L_2}+\|\psi\|_{L_2}+\|\eta\|_{L_2}\right),\ t<0,$$

$$\|f(x)\|_{L_2}\le C_{13}\left(\|\varphi\|_{W_2^4}+\|\psi\|_{W_2^4}+\|\eta\|_{W_2^2}\right),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega}_+)}\le C_{14}\left(\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^1}+\|\eta\|_{W_2^0}\right),\ t>0,$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega}_-)}\le C_{15}\left(\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^1}+\|\eta\|_{W_2^0}\right),\ t<0,$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]}\le C_{16}\left(\|\varphi\|_{W_2^5}+\|\psi\|_{W_2^5}+\|\eta\|_{W_2^3}\right).$$

Доказательство. Из (37), (30) и неравенство леммы 2 при $t > 0$ имеем

$$\|u(x,t)\|_{L_2}^2 = u_0^2(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{1k}^2(t) + u_{2k}^2(t)\right] \le$$

$$\le C_1^2\left[\left(|\varphi_0| + |\psi_0| + |\eta_0|\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}| + \frac{1}{\lambda_k^2}|\eta_{ik}|\right)^2\right] \le$$

$$\le 3C_1^2\left[|\varphi_0|^2 + |\psi_0|^2 + |\eta_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}|^2 + |\psi_{ik}|^2 + \frac{1}{\lambda_k^4}|\eta_{ik}|^2\right)\right] \le$$

$$\le C_{11}\left(\|\varphi\|_{L_2}^2 + \|\psi\|_{L_2}^2 + \|\eta\|_{L_2}^2\right).$$

Аналогично получается оценка при $t < 0$.

$$\|f(x)\|_{L_2}^2 = f_0^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(f_{1k}^2 + f_{2k}^2\right) \le$$

$$\le C_7^2\left[\left(|\varphi_0| + |\psi_0| + |\eta_0|\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\lambda_k^4\left(|\varphi_{ik}| + |\psi_{ik}|\right) + \lambda_k^2|\eta_{ik}|\right)^2\right] \le$$

$$\le 3C_7^2\left[|\varphi_0|^2 + |\psi_0|^2 + |\eta_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\lambda_k^8\left(|\varphi_{ik}|^2 + |\psi_{ik}|^2\right) + \lambda_k^4|\eta_{ik}|^2\right)\right].$$

Коэффициенты φ_{ik}, ψ_{ik} и η_{ik} можно представить в виде

$$\varphi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k} - 1}\left[\bar{a}_{1k} + \bar{b}_{1k}\right] + \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\varphi}_{1k}^{(4)},\ \varphi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\varphi}_{2k}^{(4)},$$

$$\psi_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k} - 1}\left[\bar{a}_{2k} + \bar{b}_{2k}\right] + \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\psi}_{1k}^{(4)},\ \psi_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\psi}_{2k}^{(4)},$$

$$\eta_{1k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k} - 1}\left[\bar{a}_{3k} + \bar{b}_{3k}\right] + \frac{1}{\lambda_k^2}\bar{\eta}_{1k}^{(2)},\ \eta_{2k} = \frac{1}{\lambda_k^2}\bar{\eta}_{2k}^{(2)},$$

где

$$\bar{a}_{1k} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \bar{b}_{1k} = \int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\bar{a}_{2k} = \int_0^1 \psi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \bar{b}_{2k} = \int_0^1 \psi^{(4)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\bar{a}_{3k} = \int_0^1 \eta^{(2)}(x)\, e^{-\lambda_k(1-x)}dx,\ \bar{b}_{3k} = \int_0^1 \eta^{(2)}(x)\, e^{-\lambda_k x}dx,$$

$$\bar{\varphi}_{1k}^{(4)}=\int_0^1\varphi^{(4)}(x)\sin\lambda_k x dx,\ \bar{\varphi}_{2k}^{(4)}=2\int_0^1\varphi^{(4)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\bar{\psi}_{1k}^{(4)}=\int_0^1\varphi^{(4)}(x)\sin\lambda_k x dx,\ \bar{\psi}_{2k}^{(4)}=2\int_0^1\psi^{(4)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\bar{\eta}_{1k}^{(2)}=-\int_0^1\eta^{(2)}(x)\sin\lambda_k x dx,\ \bar{\eta}_{2k}^{(2)}=-2\int_0^1\eta^{(2)}(x)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\|f(x)\|_{L_2}^2\le 3C_7^2\left[|\varphi_0|^2+|\psi_0|^2+|\eta_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\left|\varphi_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\psi_{ik}^{(4)}\right|^2+\left|\eta_{ik}^{(2)}\right|^2\right)\right]\le$$
$$\le 3C_7^2\left(\|\varphi\|_{L_2}^2+\|\psi\|_{L_2}^2+\|\eta\|_{L_2}^2+\left\|\varphi^{(4)}\right\|_{L_2}^2+\left\|\psi^{(4)}\right\|_{L_2}^2+\left\|\eta^{(2)}\right\|_{L_2}^2\right)\le$$
$$\le C_{13}^2\left(\|\varphi\|_{W_2^4}^2+\|\psi\|_{W_2^4}^2+\|\eta\|_{W_2^2}^2\right).$$

Пусть (x,t) — произвольная точка области $\bar{\Omega}_+$. Тогда используя формулы (37) к неравенству леммы 2, имеем

$$\begin{gathered}|u(x,t)|\le|u_0(t)|+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|u_{1k}(t)|+|u_{2k}(t)|\right)\le\\ \le c_1\left[|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(|\varphi_{ik}|+|\psi_{ik}|+\frac{1}{\lambda_k^2}|\eta_{ik}|\right)\right].\end{gathered}\tag{42}$$

Используя представлений

$$\varphi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\tilde{a}_{1k}+\tilde{b}_{1k}\right]+\frac{1}{\lambda_k^4}\bar{\varphi}_{1k}^{(1)},\ \varphi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k}\bar{\varphi}_{2k}^{(1)},$$

$$\psi_{1k}=\frac{1}{\lambda_k}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\tilde{a}_{2k}+\tilde{b}_{2k}\right]+\frac{1}{\lambda_k}\bar{\psi}_{1k}^{(1)},\ \psi_{2k}=\frac{1}{\lambda_k}\bar{\psi}_{2k}^{(1)},$$

$$\eta_{1k}=\frac{1}{\lambda_k}\frac{e^{\lambda_k}}{e^{\lambda_k}-1}\left[\tilde{a}_{3k}+\tilde{b}_{3k}\right]+\frac{1}{\lambda_k^2}\bar{\eta}_{1k}^{(2)},\ \eta_{2k}=\frac{1}{\lambda_k}\bar{\eta}_{2k}^{(1)},$$

где

$$\tilde{a}_{jk},\tilde{b}_{jk},\ j=1,2,3;\ \bar{\varphi}_{mk}^{(1)},\bar{\psi}_{mk}^{(1)},\ \bar{\eta}_{mk}^{(1)},\ m=1,2$$

коэффициенты получается соответственно интегрирования интегралы (21)-(22) по частям один раз, из (31) получим

$$|u(x,t)|\le c_1\left[|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\lambda_k}\left|\varphi_{ik}^{(1)}\right|+\frac{1}{\lambda_k}\left|\psi_{ik}^{(1)}\right|+\frac{1}{\lambda_k^2}|\eta_{ik}|\right)\right]\le$$

$$\le c_1\left(|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|+\right)+c_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{ik}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{ik}^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+c_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^4}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\eta_{ik}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le \bar{c}_1\left(\|\varphi\|_{L_2}+\|\psi\|_{L_2}+\left\|\varphi'\right\|_{L_2}+\left\|\psi'\right\|_{L_2}+2\|\eta\|_{L_2}\right)\le$$

$$\le c_{14}\left(\|\varphi\|_{W_2^1}+\|\psi\|_{W_2^1}+\|\eta\|_{W_2^0}\right),$$

$$|f(x)|\le|f_0|+\sum_{k=1}^{\infty}(|f_{1k}|+|f_{2k}|)\le$$

$$\le c_7\left[|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\left(\lambda_k^4|\varphi_{ik}|+\lambda_k^4|\psi_{ik}|+\lambda_k^2|\eta_{ik}|\right)\right]\le$$

$$\le c_7\left[|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=2}^{2}\frac{1}{\lambda_k}\left(\left|\varphi_{ik}^{(5)}\right|+\left|\psi_{ik}^{(5)}\right|+\left|\eta_{ik}^{(3)}\right|\right)\right]\le$$

$$\le c_7\left(|\varphi_0|+|\psi_0|+|\eta_0|\right)+c_7\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=2}^{2}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{ik}^{(5)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi_{ik}^{(5)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\eta_{ik}^{(3)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\le$$

$$\le \bar{c}_7\left(\|\varphi\|_{L_2}+\|\psi\|_{L_2}+\|\eta\|_{L_2}+\left\|\varphi^{(5)}\right\|_{L_2}+\left\|\psi^{(5)}\right\|_{L_2}+\left\|\eta^{(3)}\right\|_{L_2}\right)\le$$

$$\le c_{16}\left(\|\varphi\|_{W_2^5}+\|\psi\|_{W_2^5}+\|\eta\|_{W_2^3}\right).$$

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе рассмотрена обратная задача для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области. Решение построено в виде суммы биортогонального ряда. При выполнении условий (25)-(26) показаны существование, единственность и устойчивость решения этой задачи. Также было показано, что множество решений этих неравенств не пусто в зависимости от размера области. Если эти условия не выполняются, то показано, что однородная задача имеет нетривиальное решение. В этом случае нарушается единственность решения данной задачи. Полученные результаты могут быт использованы для дальнейшего развития различных обратных задач с нелокальными условиями для вырождающегося уравнения четвертого порядка

Список литературы

1. Аманов Д. *Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка*, автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Ташкент: АН РУз, 2019. 44 с.
2. Амиров Ш., Кожанов А. И. Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска, *Мат. заметки*, 2016. Т. 99, № 2, С. 171–180 DOI: 10.4213/mzm10617.
3. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.

4. Джураев Т. Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка, 2000. 144 с.
5. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
6. Калиев И. А., Мугафаров М. Ф., Фаттахова О. В. Обратная задача для параболического уравнения с переменным направлением времени с обобщенными условиями сопряжения, *Уфим. матем. журн.*, 2011. Т. 3, № 2, С. 34-42.
7. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения правой части и младшего коэффициента в параболическом уравнении со многими пространственными переменными, *Мат. заметки*, 2015. Т. 97, № 3, С. 368-381 DOI: 10.4213/mzm10499.
8. Камынин В. Л. Обратная задача одновременного определения двух зависящих от пространственной переменной младших коэффициентов в параболическом уравнении, *Мат. заметки*, 2019. Т. 106, № 2, С. 248-261 DOI: 10.4213/mzm12164.
9. Кожанов А. И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении, *Мат. заметки СВФУ*, 2016. Т. 23, № 4, С. 31-45.
10. Кожанов А. И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентами, зависящими от времени, *Ж. вычисл. матем. и мат. физ.*, 2017. Т. 57, № 6, С. 961-972.
11. Короткий А. И., Стародубцева Ю. В. *Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса.* Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.
12. Лаврентьев М. М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения, *Докл. АН СССР*, 1964. Т. 157, № 3, С. 520-521.
13. Мегралиев Я. Обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием, *Дальнев. мат. жур.*, 2013. Т. 13, № 1, С. 83-101.
14. Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода, *Вест. Удмурт. универ. Математика. Механика. Компьютерные науки.*, 2016. Т. 26, № 4, С. 503-514 DOI: 10.20537/vm160405.
15. Пятков С.Г., Квич Е.С. Восстановление младших коэффициентов в параболическом уравнении с меняющимся направлением времени, *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика»*, 2018. Т. 10, № 4, С. 23-29 DOI: 10.14529/mmph180403.
16. Романов В. Г. *Обратные задачи математической физики.* М.: Наука, 1984. 264 с.
17. Сабитов К. Б., Хаджи И. А. Краевая задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с неизвестной правой частью, *Изв. вузов. матем.*, 2011. № 5, С. 44-52.
18. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа, *Изв. вузов. Матем.*, 2011. № 2, С. 71-85.
19. Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа с нелокальным граничным условиям, *Сиб. мат. журн.*, 2012. Т. 53, № 3, С. 633-647.
20. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, *Изв. вузов. Математика*, 2015. № 1, С. 46-59.
21. Телешова Л. А. *Обратные задачи для параболических уравнений высокого порядка*, дис. канд. физ.-мат. наук: Улан-Уде, 2017. 155 с.
22. Юлдашев Т.К. Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка, *Изв. Инстит. мат. и инф. УдГУ*, 2016. Т. 1(47), С. 119-128.
23. Юлдашев Т. К. Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска, *Вест. Волгогр. гос. ун-та. Сер.1, Мат. Физ.*, 2016. № 2(33), С. 13-23 DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.2.2.
24. Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator, *Computers and Mathematics with Applications*, 2011. vol. 62, pp. 3884-3893.
25. Jiang D., Liu Y., Yamamoto M. Inverse source problem for the hyperbolic equation witha time-dependent principal part, *J. Diff. Equat.*, 2017. vol. 262, no. 1, pp. 653-681 DOI: 10.1016/j.jde.2016.09.036.
26. Prilepko A. I., Orlovsky D. G. Vasin I. A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics.* New York-Basel: Global Express Ltd., 1999. 709 pp.

References

[1] Amanov D. Razreshimost i spektralnye svoistva kraevykh zadach dlia uravnenii chetnogo poriadka [Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order]. avtoref. dis. d-ra fiz.mat. Tashkent: AN RUz, 2019, P. 64. (In Russian)

[2] Amirov Sh., Kokhanov A. I. Global solvability of initial boundary-value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation, Matem. zametki, 2016, , 2, 171-180. DOI: 10.4213/mzm10617(In Russian)

[3] Denisov A.M. Vvedenie d teoriyu obratnykh zadach [Elements of the Theory of inverse Problems]. Moskva-Izd-vo MGU, 1994, 208.(In Russian)

[4] Dzhuraev T. D., Sopuev A. K teorii differentsialnykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka [To the theory of partial differential equations of the fourth order], Tashkent, Fan, 2000, 144.(In Russian)

[5] Kavanikhin S. I. Obratye i nekorrektnye zadachi [Inverse and ill-posed problems], Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2009, 457.(In Russian)

[6] Kaliev I. A., Mugafarov M. F., Fattakhova O. V Inverse problem for forward-backward parabolic equation with generalized conjugation conditions, Ufimsk. matem/zhurn., 2011, **3**, 97, 368-381. mi.mathnet.ru/ufa92(In Russian)

[7] Kamynin V. L. The inverse problem of the simultaneous determination of the right-hand side and the lowest coeffcient in a parabolic equation with many space variables, Mat. zametki, 2015, **97**, 3, 368-381. DOI: 10.4213/mzm10499(In Russian)

[8] Kamynin V. L. The Inverse Problem of Simultaneous Determination of the Two Lower Space-Dependent Coeffcients in a Parabolic Equation, Mat. zametki, 2019, **106**, 2, 248-261, DOI: 10.4213/mzm12164(In Russian)

[9] Kozhanov A. I. Inverse problems of recovering the right-hand side of a special type of parabolic equations. Mathematical Notes, Mat. zametki SVFU, 2016, **23**, 4, 31-45,(In Russian)

[10] Kokhanov A. I. Parabolic equations with unknown time-dependent coeffcients, Zh. vychisl. matem. i matem. fiz., 2017, **57**, 6, 961-972,(In Russian)

[11] Korotkii A. I. Starodubtseva Yu. V. Modelirovanie priamykh i obratnykh granichnykh zadach dlia stratsionarnykh modelei teplomassoperenosa [Modeling direct and inverse boundary value problems for stationary models of heat and mass transfer]. Ekaterinburg, Izd-vo Ural. un-ta, 2015, 168,(In Russian)

[12] Lavrentev M. M. Ob odnoi obratnoi zadache dlia volnovogo uravnenia [On an inverse problem for the wave equation]. // Dokl. AN SSSR, 1964, **57**, 2,520-521,(In Russian)

[13] Megraliev Ia. Inverse boundary value problem for the equation of bending of thin plates with an additional integral condition, Dalnevostochnyi matematicheskii zhurnal, 2013, **13**, 1, 83-101,(In Russian)

[14] Megraliev Ia. T. Inverse boundary value problem for a Boussinesq type equation of fourth order with nonlocal time integral conditions of the second kind, Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuternym nauki, 2016, **26**, 4, 503-514,(In Russian)

[15] Piatkov S. G., Kvich E. S. Recovering of Lower order coeffcients in forwardbackward parabolic equations, Vestnik YuUrGU. Seriia Matematika. Mekhanika. Fizika., 2018, 10, 4, 23-29, DOI: 10.14529/mmph180403,(In Russian)

[16] Romanov V. G. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse Problems of Mathematical Physics], Moskva, Nauka, 1984, 264 (In Russian)

[17] Sabitov K. B., Khadzhi I. A. Boundary value problem for Lavrentyev-Biczadze's Equ ation with unknown right-hand part, Izv. vuzov. Matem. 2011, 5, 44-52 (In Russian)

[18] Sabitov K. B., Martemianova N. V. Nonlocal inverse problem for a mixed type equation, Izv. vizov. Matem., 2011, 2, 71-85,(In Russian)

[19] Sabitov K. B. Martemianova N. V. An inverse problem for an elliptic-hyperbolic equation with nonlocal boundary conditions, Sib. mate. zhurn., 2012, 52, 3, 633-647,(In Russian)

[20] Sabitov K. B., Sidorov S. N. Inverse problem for degenerate parabolic-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition, Izvestiia vuzov. Matematika, 2015, 1, 46-59 (In Russian)

[21] Teleshova L. A. obratnye zadachi dlia parabolicheskikh uravnenii vysokogo poriadka [Inverse problems for high-order parabolic equations]. Dis. kand. fiz.-matem. nauk. Ulan-Ude, 2017, 155.

[22] Yuldashev T. K. On one mixed differential equation of the fourth order, Izvestiia Instituta matematiki i informatiki UdGU, 2016, 1(47), 119-128 (In Russian)

[23] Yuldashev T. K. Mixed differential equation of Boussinesq type, Vest. Volgogr. gos. un-ta. Ser. 1, Mat. Fiz. 2016, 2(33), 13-23,(In Russian)

[24] Berdyshev A. S., Cabada A., Kadirkulov B. J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator, Computers and Mathematics with Applications, 2011, 67, 3884-3893.

[25] Jiang D., Liu Y., Yamamoto M. Inverse source problem for the hyperbolic equation witha time-dependent principal part, J. Differential Equations. 2017, 262, 1, 653-681. DOI 10.1016/j.jde.2016.09.036

[26] Prilepko A. I., Orlovsky D. G. and Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics, New York-Basel, Global Express Ltd., 1999, 709.

Информация об авторе

Бекиев Аширмет Бекиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Дифференциальное уравнение» Каракалпакского государственного университета имени Бердаха, г. Нукус, Узбекистан, https://orcid.org/0000-0001-8630-4360.

Information about the author

Bekiev Ashirmet Bekievich – Ph.D. (Phys.& Math.), Assistant professor, Department of Differensial Equation, Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan, https://orcid.org/0000-0001-8630-4360.