



## Дробная математическая модель Макшерри

Х. Т. Алимов<sup>1</sup>, Ф. Х. Дзамихова<sup>2</sup>, Р. И. Паровик<sup>\*1,3</sup>

- <sup>1</sup> Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улутбека, Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4,
- <sup>2</sup> Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Россия, 360002, г. Нальчик, ул. Балкарова, 2.
- <sup>3</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Россия, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4.

**Аннотация.** В статье предложено обобщение математической модели Макшерри для моделирования искусственной электрокардиограммы — изменяющегося во времени сигнала, отражающий ионный ток, который заставляет сердечные волокна сокращаться, а затем расслабляться. Обобщение математической модели Макшерри заключается в учете свойства наследственности (памяти) динамического процесса, которое можно описать с помощью дробных производных в смысле Герасимова-Капуто. Эффект памяти динамической системы определяет возможность зависимости ее состояний от предыстории и может указывает на диссипативный характер, рассматриваемого процесса. Далее в работе с помощью теории конечно-разностных схем строится явная конечно-разностная схема первого порядка точности для нахождения численного решения предложенной модели. С помощью алгоритма проводится визуализация результатов моделирования: строятся осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели для здорового человека. Проводится интерпретация результатов моделирования. Показано, что порядки дробных производных влияют на динамические режимы, рассматриваемой дробной динамической системы. В случае соизмеримой дробной динамической системы предельный цикл начинает разрушаться при значениях порядков дробных производных меньше 0,5. В этом случае роль диссипации имеет значительную роль. В случае несоизмеримой дробной динамической системы могут возникать различные режимы от предельных циклов до затухающих, возможны и хаотические режимы. В работе было показано, что при достаточно больших значениях угловой скорости возникает хаотический режим. Исследование хаотических режимов заслуживает отдельного внимания и будет рассмотрено в следующих статьях. Также порядки дробных производных можно рассматривать как дополнительные степени для параметризации сигналов ЭКГ.

*Ключевые слова:* математическая модель, ЭКГ, численный анализ, производная типа Герасимова-Капуто, осциллограммы, фазовые траектории.

Получение: 13.03.2023; Исправление: 20.03.2023; Принятие: 21.03.2023; Публикация онлайн: 16.04.2023

**Для цитирования.** Алимов Х. Т., Дзамихова Ф. Х., Паровик Р. И. Дробная математическая модель Макшерри // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2023. Т. 42. № 1. С. 164-179. EDN: BSUNVQ . <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-164-179>.

**Финансирование.** Финансовая поддержка выполнена в рамках гранта президента РФ "Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением № МД-758.2022.1.1

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

\*Корреспонденция: ✉ E-mail: [romanparovik@gmail.com](mailto:romanparovik@gmail.com)

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Алимов Х. Т., Дзамихова Ф. Х., Паровик Р. И., 2023

© ИКИР ДВО РАН, 2023 (оригинал-макет, дизайн, составление)





## Fractional Mathematical Model McSherry

*Kh. T. Alimov<sup>1</sup>, F. Kh. Dzamikhova<sup>2</sup>, R. I. Parovik<sup>\*1,3</sup>*

<sup>1</sup> National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Uzbekistan, 100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4.

<sup>2</sup> Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Russia, 360002, Nalchik, st. Balkarova, 2.

<sup>3</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, Russia, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Pogranichnaya, 4.

**Abstract.** The article proposes a generalization of the McSherry mathematical model for modeling an artificial electrocardiogram — a time-varying signal that reflects the ion current that causes the heart fibers to contract and then relax. The generalization of the McSherry mathematical model consists in taking into account the property of heredity (memory) of the dynamic process, which can be described using fractional derivatives in the sense of Gerasimov-Caputo. The memory effect of a dynamic system determines the possibility of dependence of its states on the prehistory and may indicate the dissipative nature of the process under consideration. Further, using the theory of finite-difference schemes, an explicit finite-difference scheme of the first order of accuracy is constructed to find a numerical solution of the proposed model. With the help of the algorithm, the simulation results are visualized: oscillograms and phase trajectories are built for different values of the model parameters for a healthy person. The simulation results are interpreted. It is shown that the orders of fractional derivatives affect the dynamic modes of the considered fractional dynamical system. In the case of a commensurate fractional dynamical system, the limit cycle begins to collapse when the orders of the fractional derivatives are less than 0.5. In this case, the role of dissipation plays a significant role. In the case of an incommensurate fractional dynamical system, various regimes can arise from limit cycles to damped ones, and chaotic regimes are also possible. It was shown in the work that a chaotic regime arises at sufficiently large values of the angular velocity. The study of chaotic regimes deserves special attention and will be considered in the following articles. Also, the orders of fractional derivatives can be considered as additional degrees for the parameterization of ECG signals.

*Key words:* mathematical model, ECG, numerical analysis, derivative of the Gerasimov-Caputo type, oscillograms, phase trajectories


Received: 13.03.2023; Revised: 20.03.2023; Accepted: 21.03.2023; First online: 16.04.2023

**For citation.** Alimov Kh. T., Dzamikhova F. Kh., Parovik R. I. Fractional mathematical model McSherry. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023, 42: 1, 164-179. EDN: BSUNVQ . <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-164-179>.

**Funding.** Financial support was provided within the framework of the grant of the President of the Russian Federation, No. MD-758.2022.1.1

**Competing interests.** There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

\*Correspondence:  E-mail: romanparovik@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Alimov Kh. T., Dzamikhova F. Kh., Parovik R. I., 2023

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2023 (original layout, design, compilation)



## Введение

Электрокардиограмма (ЭКГ) представляет собой изменяющийся во времени сигнал, отражающий ионный ток, который заставляет сердечные волокна сокращаться, а затем расслабляться. Поверхностную ЭКГ получают путем регистрации разности потенциалов между двумя электродами, расположенными на поверхности кожи. Один нормальный цикл ЭКГ представляет собой последовательную деполяризацию/реполяризацию предсердий и деполяризацию/реполяризацию желудочков, которые происходят при каждом сердечном сокращении. Их можно приблизительно связать с пиками и впадинами кривой ЭКГ, обозначенными буквами P, Q, R, S и T, как показано на рис. 1.

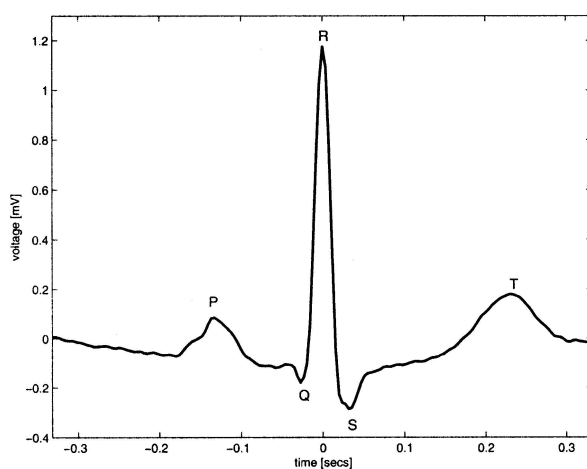


Рис. 1. Морфология среднего комплекса PQRST на ЭКГ, записанной у здорового человека  
Figure 1. Morphology of a mean PQRST-complex of an ECG recorded from a normal human

Каждый удар сердца можно наблюдать как серию отклонений от базовой линии на ЭКГ. Эти отклонения отражают временную эволюцию электрической активности сердца, которая инициирует мышечное сокращение. Одиночный синусовый (нормальный) цикл ЭКГ, соответствующий одному сердечному сокращению, традиционно обозначается буквами P, Q, R, S и T в каждой из его поворотных точек (рис. 1). ЭКГ можно разделить на следующие разделы.

**P-зубец:** Небольшое низкоамплитудное отклонение от базовой линии, вызванное деполяризацией предсердий до сокращения предсердий, когда фронт волны активации (деполяризации) распространяется от синоатриального узла через предсердия.

**PQ-интервал:** время между началом деполяризации предсердий и началом деполяризации желудочков.

**Комплекс QRS:** часть ЭКГ с наибольшей амплитудой, вызванная токами, генерируемыми при деполяризации желудочков до их сокращения. Хотя реполяризация предсердий происходит до деполяризации желудочков, последняя форма волны (то есть комплекс QRS) имеет гораздо большую амплитуду, и поэтому реполяризация предсердий не видна на ЭКГ.

Интервал QT: время между началом желудочковой деполяризации и окончанием желудочковой реполяризации. Клинические исследования показали, что интервал QT увеличивается линейно по мере увеличения интервала RR – интервалу между сердечными сокращениями [1]. Удлиненный интервал QT может быть связан с задержкой реполяризации желудочков, что может вызвать желудочковые тахикардии, приводящие к внезапной сердечной смерти [2].

Интервал ST: время между окончанием зубца S и началом зубца T. Значительно повышенные или пониженные амплитуды вдали от исходного уровня часто связаны с сердечными заболеваниями.

T-зубец: реполяризация желудочков, при которой сердечный мышца готовится к следующему циклу ЭКГ.

В работе [3] была предложена математическая модель для генерации синтетического сигнала ЭКГ с реалистичной морфологией PQRS T и заданной динамикой сердечного ритма.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) x(t) - \omega y(t), \\ \dot{y}(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) y(t) + \omega x(t), \\ \dot{z}(t) = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} a_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z(t) - z_0(t)), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $x(t) \in C^1[0, T]$ ,  $y(t) \in C^1[0, T]$ ,  $z(t) \in C^1[0, T]$  – составляющие сигнала, отражающего ионный ток и имеют размерности напряжения,  $t \in [0, T]$  – время процесса,  $T > 0$  – время моделирования,  $\Delta \theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$ ,  $\theta = \text{atan2}(x(t), y(t))$ ,  $z_0(t) = A \sin(2\pi f t)$ ,  $\omega$  – угловая скорость, амплитуда и частота имеет следующие значения  $A = 0.15$ ,  $f = 0.25$ , начальные условия:  $x_0, y_0, z_0$  – заданные константы. Здесь функция  $\text{atan2}(x(t), y(t))$  – функция, возвращающая значения из четвертого квадранта арктангенса.

Значение параметров  $\theta_i, a_i, b_i$  берутся из таблицы и соответствуют здоровому человеку.

Таблица 1

Парметры модели/Model parameters (1)

Индекс i	P	Q	R	S	T
$\theta_i$ (рад)	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{12}\pi$	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$a_i$	60	-250	1500	-375	37.5
$b_i$	0.25	0.1	0.1	0.1	0.4

Замечание 1. Отметим, что динамическая система (1) представляет собой задачу Коши, решение которой генерирует траекторию ЭКГ в трехмерном пространстве с координатами  $(x, y, z)$ . Квазипериодичность ЭКГ отображается

движением траектории по ограниченному кругу в плоскости  $(x, y)$ . Каждый проход круга соответствует одному RR-интервалу. На ЭКГ, как правило, возникают зубцы P, Q, R, S, T, которые находят по фиксированным углам  $\theta_P, \theta_Q, \theta_R, \theta_S, \theta_T$  на круге плоскости  $(x, y)$ .

**Замечание 2.** Целью модели (1) было предоставление стандартного реалистичного сигнала ЭКГ с известными характеристиками, который может быть сгенерирован с помощью конкретных статистических данных, таких как среднее значение и стандартное отклонение частоты сердечных сокращений и характеристик частотной области variability сердечного ритма.

**Определение 1.** Математическую модель, определенную системой (1) мы будем называть моделью Макшерри по первому автору в статье [3].

Математическая модель Макшерри была объектом исследований в работе [4], где исследовались качественные свойства решения с помощью спектров максимальных показателей Ляпунова. Показано, что возможно существование хаотических режимов.

В настоящей статье предлагается обобщение математической модели Макшерри (1), которое заключается в переходе от целочисленных производных к производным дробных порядков с целью описания эффектов наследственности динамической системы. Далее для обобщенной математической модели был разработан численный алгоритм на основе нелокальной явной-конечно разностной схемы с первым порядком точности. Численный алгоритм с целью визуализации результатов моделирования, был реализован в компьютерной программе на языке Maple. Далее дается интерпретация результатов моделирования.

## Некоторые определения дробного исчисления

В этом параграфе мы рассмотрим основные определения из теории дробного исчисления, более подробно его аспекты можно изучить в книгах [5]- [8].

**Определение 2.** Дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$  имеет вид:

$$I_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, \alpha > 0, t > 0, \quad (2)$$

где  $\Gamma(\cdot)$  — гамма-функция.

Дробный интеграл Римана-Лиувилля (2) обладает следующими свойствами:

$$I_{0t}^0 x(t) = x(t), I_{0t}^{\alpha} I_{0t}^{\beta} x(t) = I_{0t}^{\alpha+\beta} x(t), I_{0t}^{\alpha} I_{0t}^{\beta} x(t) = I_{0t}^{\beta} I_{0t}^{\alpha} x(t).$$

**Определение 3.** Дробная производная Герасимова-Капуто порядка  $\alpha$  имеет вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{x^{(m)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, 0 \leq m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m x(t)}{dt^m}, m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3)$$

Оператор (3) обладает следующими свойствами:

$$\partial_{0t}^\alpha I_{0t}^\alpha x(t) = x(t), I_{0t}^\alpha \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{x^{(k)}(0) t^k}{k!}, t > 0.$$

**Замечание 3.** Необходимо отметить, что в настоящее время существует множество определений производной дробного порядка. Мы выбрали производную дробного порядка в смысле Герасимова-Капуто в силу того, что для модельных уравнений, включающих этот оператор, ставятся традиционные локальные начальные условия.

### Постановка задачи и методика решения

Эффекты наследственности в динамической системе, указывают на то, что текущее ее состояние зависит от предыдущих, т.е. от предыстории. В колебательных системах эффекты памяти определяют интенсивность диссипации энергии и связаны с такими характеристиками как добротность, АЧХ и ФЧХ [9], [10]. В работах [11] В. Вольтерра вводится понятие эредитарности (наследственности) даются ее принципы, в книге В.В. Учайкина [12] эредитарным процессам посвящена целая глава. Для различных динамических систем наследственность предложено с математической точки зрения описывать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами. Разностные ядра в таких уравнениях имеют смысл функции памяти, которая в общем случае определяется из экспериментальных данных или свойств рассматриваемого процесса. Простейший случай наследственности возникает, если функция памяти имеет степенной вид. Здесь мы можем интегро-дифференциальное уравнение записать в терминах производной дробного порядка [13].

**Определение 4.** Уравнения, записанные в терминах дробных производных будем называть дробными уравнениями, а модели, которые из них состоят - дробными моделями.

Рассмотрим следующую дробную математическую модель Макшерри (1):

$$\begin{cases} \partial_{0t}^\alpha x(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) x(t) - \omega y(t), \\ \partial_{0t}^\beta y(t) = \left(1 - \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\right) y(t) + \omega x(t), \\ \partial_{0t}^\gamma z(t) = - \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}} \alpha_i \Delta \theta_i \exp\left(-\frac{\Delta \theta_i^2}{2b_i^2}\right) - (z(t) - z_0(t)), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь производные дробных порядков понимаются в смысле (3), где  $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ .

**Замечание 4.** Отметим, что в первые два нелинейных уравнения в динамической системе (4) не входит переменная  $z(t)$ . Поэтому задачу (4) можно

разбить на две подзадачи: первая задача для определения  $x(t)$  и  $y(t)$ , а вторая —  $z(t)$ . Уравнение для определения  $z(t)$  является линейным. Это особенность может упростить использование численных методов в решении задачи (4), а также в задачах распараллеливания численного алгоритма.

**Замечание 5.** Заметим, что в частном случае  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  дробная математическая модель Макшерри переходит в обычную математическую модель Макшерри (1).

Для решения задачи (4) воспользуемся теорией конечно-разностных схем. Для этого будем считать, что функции  $x(t), y(t), z(t)$  обладают необходимыми условиями гладкости. Рассмотрим равномерную сетку по временной координате. Разобьем отрезок  $[0, T]$  на  $N$  равных частей с шагом дискретизации  $\tau = \frac{T}{N}$ . Тогда функции решения  $x(t), y(t), z(t)$  перейдут в сеточные функции  $x(t_k), y(t_k), z(t_k)$ , где  $t_k = k\tau, k = 1, \dots, N$ . Аппроксимации производных дробных порядков даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^\alpha x(t_k) &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\alpha (x_{k-i+1} - x_{k-i}) + O(\tau), \\ \partial_{0t}^\beta y(t_k) &= \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\beta (y_{k-i+1} - y_{k-i}) + O(\tau), \\ \partial_{0t}^\gamma z(t_k) &= \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i^\gamma (z_{k-i+1} - z_{k-i}) + O(\tau), \end{aligned}$$

где весовые коэффициенты имеют вид:  $w_i^\alpha = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}$ ,  $w_i^\beta = (i+1)^{1-\beta} - i^{1-\beta}$ ,  $w_i^\gamma = (i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}$ .

С учетом аппроксимаций, приведенных выше, мы можем записать дискретный аналог задачи (4).

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{K_\alpha} \left( \left(1 - \sqrt{x_k^2 + y_k^2}\right) x_k - \omega y_k - K_\alpha \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\alpha (x_{k-i+1} - x_{k-i}) + K_\alpha x_k \right), \\ y_{k+1} = \frac{1}{K_\beta} \left( \left(1 - \sqrt{x_k^2 + y_k^2}\right) y_k + \omega x_k - K_\beta \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\beta (y_{k-i+1} - y_{k-i}) + K_\beta y_k \right), \\ z_{k+1} = \frac{1}{K_\gamma} \left( -\sum_{i=1}^5 a_i \Delta \theta_{k,i} \exp\left(-\frac{\Delta \theta_{k,i}^2}{2b_i^2}\right) + z_k^0 - K_\gamma \sum_{i=1}^{k-1} w_i^\gamma (z_{k-i+1} - z_{k-i}) + (K_\gamma - 1) z_k \right) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, z_k^0 = A \sin(2\pi f k \tau). \end{cases} \quad (5)$$

По аналогии с работами [14], [15] можно показать, что нелокальная явная конечно-разностная схема обладает первым порядком точности и условно сходится к точному решению.

Рассмотрим некоторые примеры применения схемы (5) при различных значениях параметров модели. Посмотрим, как влияют значения порядков дробных производных на процесс моделирования искусственной ЭКГ — осциллограммы и фазовую траекторию.

## Результаты моделирования

Численный алгоритм (5) был реализован в среде компьютерной математики Maple2021.

**Пример 1.** Рассмотрим случай обычной математической модели Макшерри (1),  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ . Для численного алгоритма значения параметров были следующими:  $T = 50, N = 2000, \tau = 0.025, \omega = 1, A = 0.15, f = 0.25$ . Остальные значения параметров брались из Таблицы 1. Рассмотрим как влияют различные значения угловой скорости  $\omega$  на построение искусственной ЭКГ.

На рис.1 приведены осциллограммы и фазовая траектория, характеризующие искусственную ЭКГ.

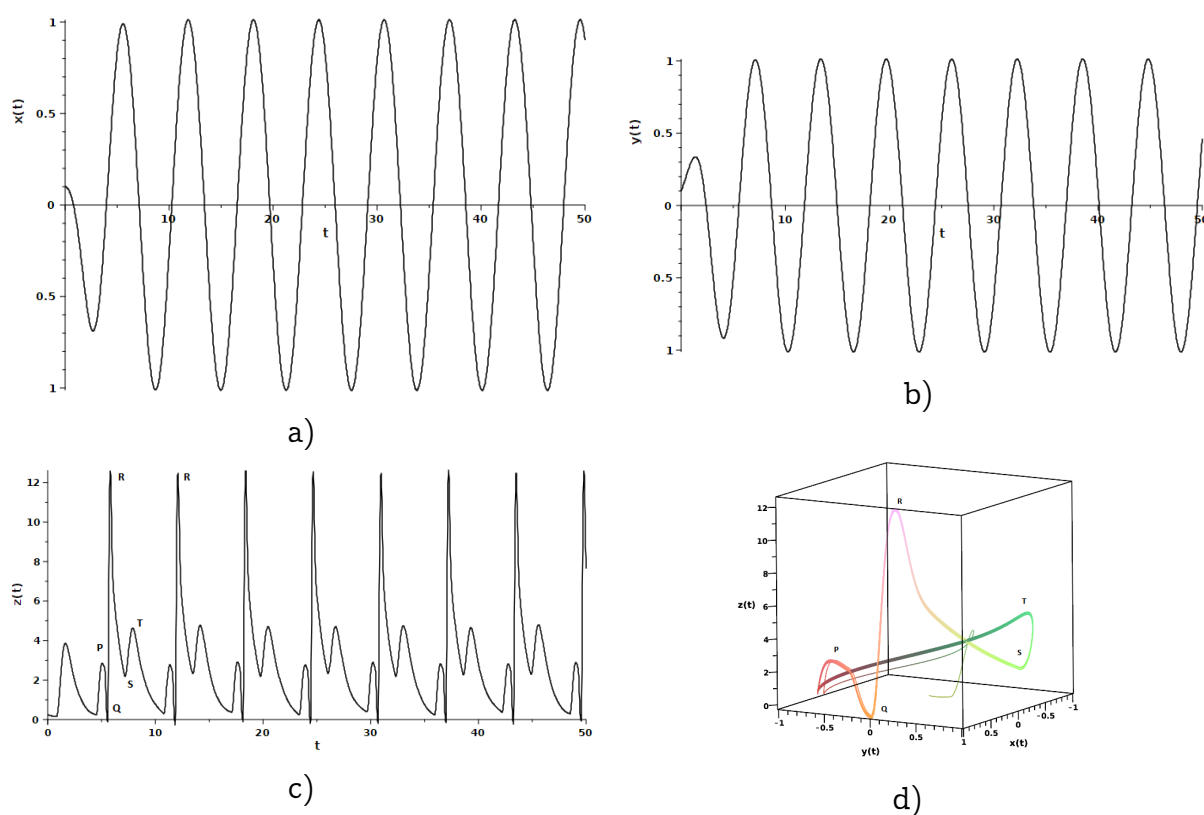


Рис. 2. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

На рис. 2 приведен случай математической модели Макшерри (1). Видно (рис.2а,б), что осциллограммы для  $x(t)$  и  $y(t)$  соответствуют гармоническим колебаниям, фазовая траектория в плоскости  $(x(t), y(t))$  представляет собой круг. В тоже время мы видим, что квазипериодичность ЭКГ представляет собой движение траектории по ограниченному кругу в плоскости  $(x(t), y(t))$ , причем каждый проход круга соответствует одному RR-интервалу между импульсами (рис. 2с). На осциллограмме (рис. 2с) мы видим зубцы P, Q, R, S, T, которые отвечают за стадии механической работы мышечных волокон сердца.



Фазовая траектория (рис. 2d) представляет собой устойчивый предельный цикл сложной формы, который характеризует ЭКГ здорового человека.

Посмотрим, как изменяться осциллограмма и фазовые траектория для искусственной ЭКГ по модели Макшерри (1) при увеличении угловой частоты  $\omega$ .

На рис. 3 приведены осциллограммы и фазовая траектория искусственной ЭКГ здорового человека в случае, когда  $\omega = 10$ .

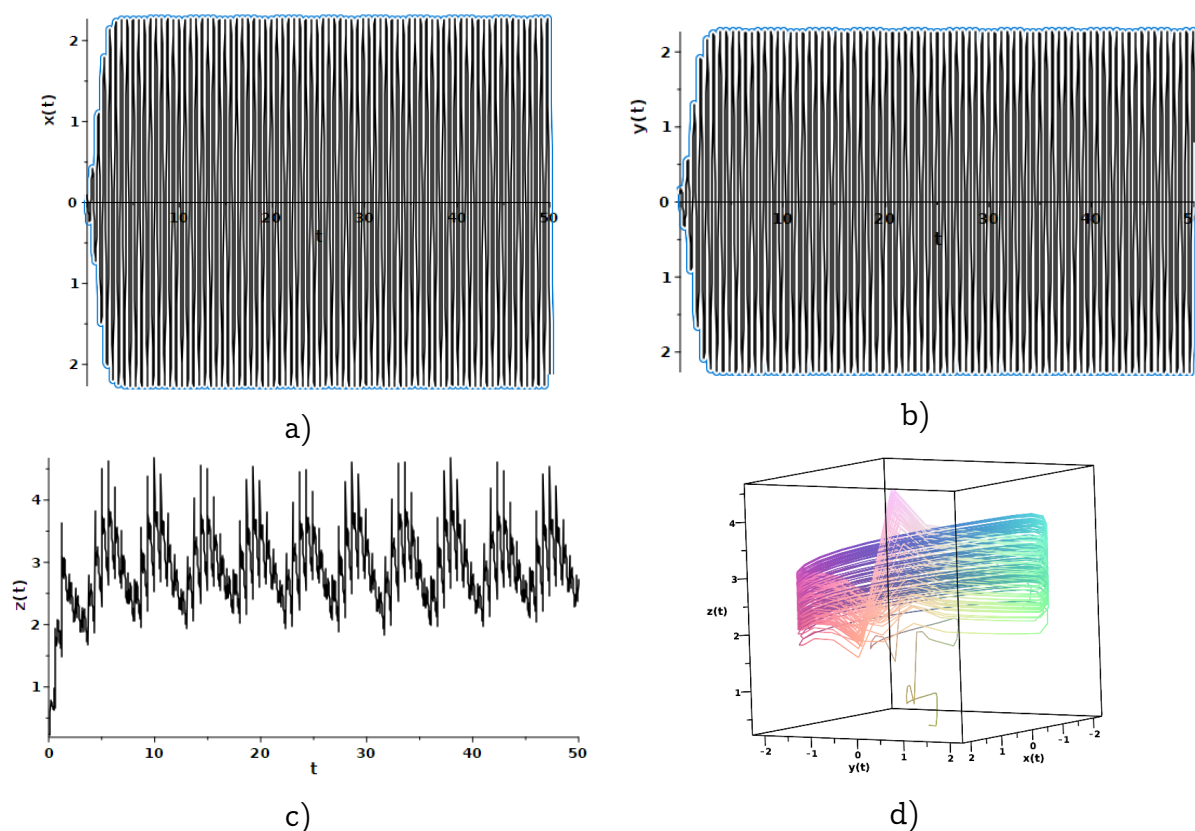


Рис. 3. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

На рис. 3 мы видим, что при увеличении значения угловой скорости  $\omega$  регулярный динамический режим перешел в хаотический. Это отчетливо видно на осциллограмме рис. 3с и фазовой траектории рис.3д. В работе [4] с помощью максимальных показателей Ляпунова было показано, что модель Макшерри (1) может обладать хаотическими режимами.

**Пример 2.** Рассмотрим случай наличия эффектов наследственности в моделировании искусственной ЭКГ. Выберем в дробной математической модели Макшерри (4) значения порядков дробных производных  $\alpha = \beta = \gamma = 0.8$ , которые соответствуют случаю несоизмеримой дробной динамической системы [16] и значение угловой скорости  $\omega = 1$ . Остальные значения параметров возьмем из предыдущего примера.

На рис. 4 приведены осциллограммы и фазовая траектория для соизмеримого случая дробной динамической системы  $\alpha = \beta = \gamma = 0.8$ .

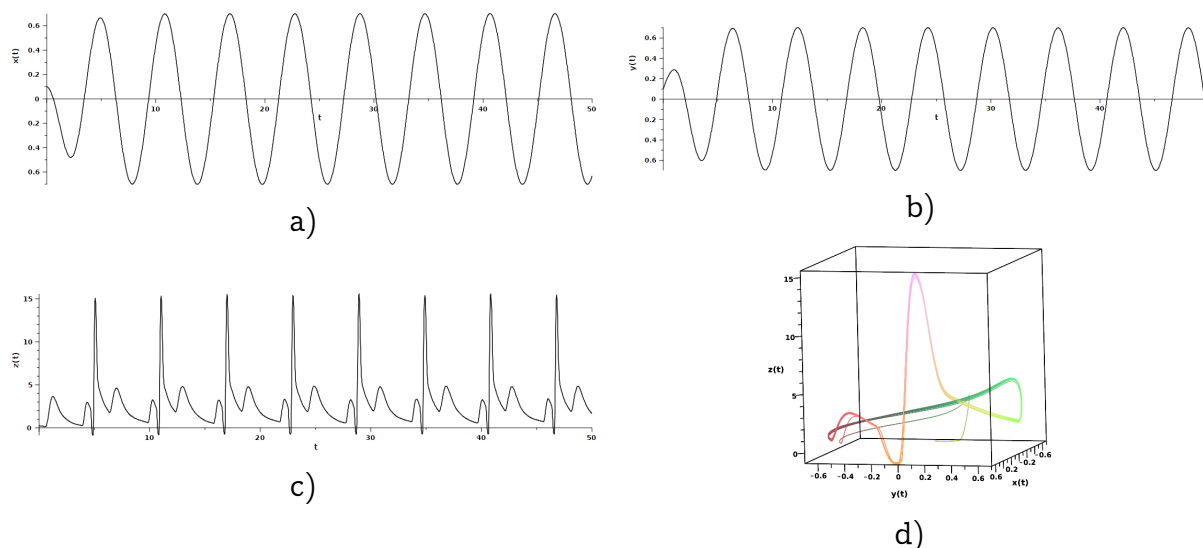


Рис. 4. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

Мы видим, что по сравнению с рис. 2а,б на рис. 4а,б осциллограммы имеют более низкие значения амплитуд, однако эти значения остаются неизменными с некоторого момента времени. Осциллограмма на рис. 4с, также отличается от осциллограммы рис.2с. Заметен рост амплитуды импульсов, а также сдвиг точек P, Q, R, ST влево по временной оси  $t$ . Этот сдвиг указывает на сжатие фазовой траектории, например, уменьшение интервала QS рис. 4д. В силу того, что значения амплитуд на рис. 4а,б ниже, то круг на плоскости  $(x, y)$  имеет меньший диаметр и фазовая траектория на рис.4д также имеет более меньшую орбиту, чем на рис. 2д. Рассмотрим случай, когда значения порядков дробных производных:  $\alpha = \beta = \gamma = 0.5$ .

На рис. 5 приведены осциллограммы и фазовая траектория. Здесь мы видим такую же динамику как и на рис. 4. Происходит сжатие фазовой траектории рис. 5д, а на осциллограммах так же мы видим уменьшение значений амплитуд рис. 5а,б, на рис.5с наоборот — увеличение значение амплитуды импульсов. Уменьшим еще значения порядков дробных производных:  $\alpha = \beta = \gamma = 0.3$ .

Мы видим, что на рис. 6а,б осциллограммы описывают уже не колебательный режим, на рис.6с мы видим некоторый колебательный режим, который выходит со временем на установившийся режим, отсутствуют зубцы P, Q, R, ST. Предельного цикла P, Q, R, ST также уже нет, фазовая траектория на рис.6д имеет принципиально другую форму отличную от предыдущей рис.5д.

Исходя из результатов этого примера, мы можем сделать вывод о том, что уменьшение значений порядков дробных производных приводит к сжатию фазовой траектории, а предельный цикл P, Q, R, ST перестает существовать.

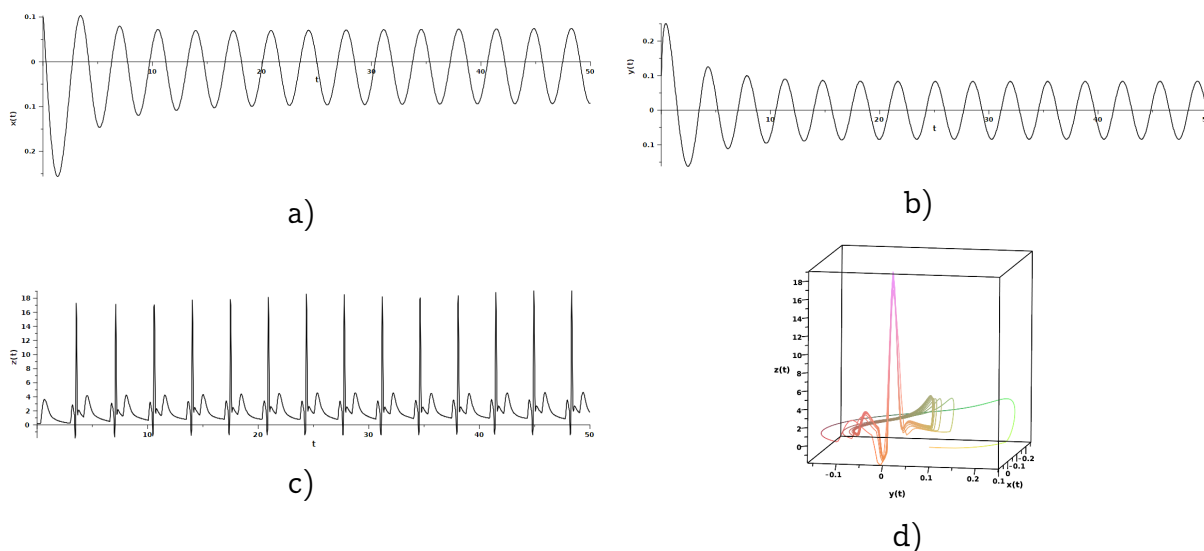


Рис. 5. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
 Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

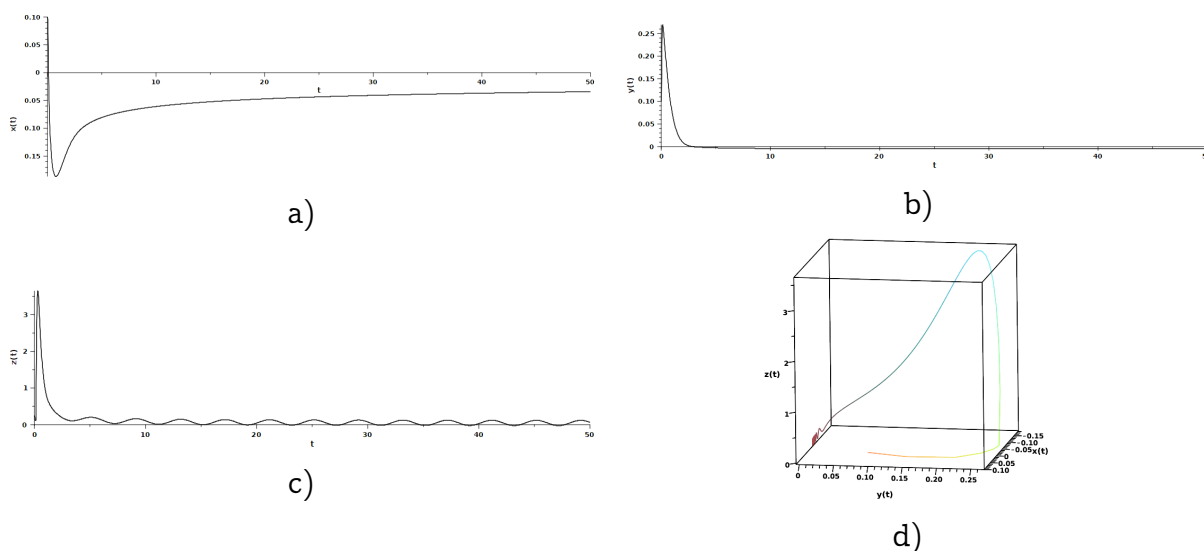


Рис. 6. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
 Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

Это связано с тем, что при уменьшении значений порядков дробной производной усиливается диссипативный эффект. Выше сказанное еще раз подтверждает ранее полученные результаты о связи порядка дробной производной с добротностью колебательной системы [9], [10].

**Пример 3.** Рассмотрим случай несоизмеримой дробной динамической системы. Возьмем в дробной математической модели Макшерри (4) значения дробных производных  $\alpha = 0.9, \beta = 0.8, \gamma = 0.7$ . Остальные значения параметров возьмем из предыдущего примера.

На рис. 7 приведены результаты моделирования в случае несоизмеримой дробной динамической системы. Видно, что осциллограммы и фазовая траектория неплохо характеризует закономерности при моделировании искусственной ЭКГ. Поэтому можно утверждать, что порядки дробных производных могут выступать как дополнительная параметризация изучаемого сигнала.

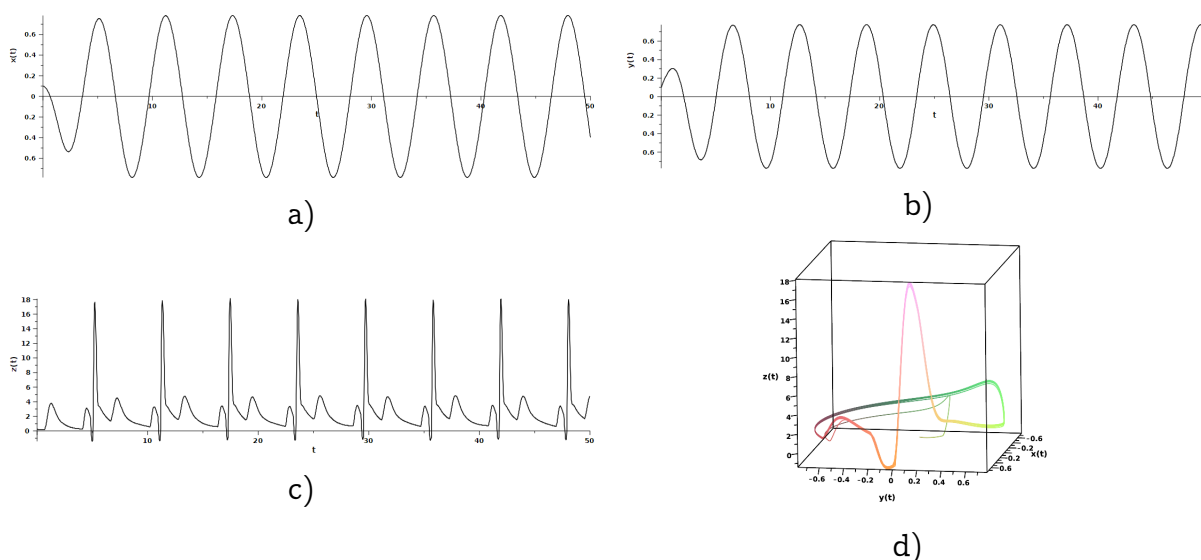


Рис. 7. Осциллограммы: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; фазовая траектория: д)  
Oscillograms: а) -  $x(t)$ ; б) -  $y(t)$ ; в) -  $z(t)$ ; phase trajectory: д)

## Заключение

В работе была предложена новая математическая модель, обобщающая ранее известную модель Макшерри, моделирующая искусственную ЭКГ здорового человека. Обобщение заключалось в учете свойства наследственности автоколебательной системы, которое описывается с помощью введение дробных производных. Порядки дробных производных связаны со свойством добротности и отвечают за диссипацию энергии в колебательной системе. В работе показано, что при уменьшении значений порядков дробных производных сжимается фазовая траектория, а некоторые осциллограммы не описывают колебательный режим. В тоже время порядки дробных производных можно рассматривать как дополнительные степени параметризации изучаемого сигнала, оптимальный выбор которых может дать наилучшее приближение к реальным ЭКГ.

Продолжение работы возможно по нескольким направлениям. Одно из них связано с качественными свойствами дробной модели Макшерри, например, по аналогии с работами [4] с помощью спектров максимальных Ляпунова исследовать хаотические и регулярные режимы. Другое направление связано с дальнейшим обобщением дробной модели Макшерри в случае производных дробного переменного порядков [17], [18]. Также особый интерес представляет сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными


различных ЭКГ как здоровых так и нездоровых людей с последующим уточнением параметров математической модели.

### Список литературы


1. Davey P. A new physiological method for heart rate correction of the QT interval, *Heart*, 1999. vol. 82, no. 2, pp. 183-186.
2. Schwartz P. J., Wolf S. QT interval prolongation as predictor of sudden death in patients with myocardial infarction, *Circulation*, 1978. vol. 57, no. 6, pp. 1074-1077.
3. McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering.*, 2003. vol. 50, no. 3, pp. 289-294.
4. Марценюк В. П., Сарабун Р. О. Исследование нелинейной динамики в модели МакШерри на основе экспонент Ляпунова, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014. № 2, С. 57-61.
5. Oldham K., Spanier J. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. London: Academic Press, 1974. 240 pp.
6. Miller K., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1993. 384 pp.
7. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204: Amsterdam, 2006. 523 pp.
9. Pskhu A. V., Rekhviashvili S. S. Analysis of forced oscillations of a fractional oscillator, *Technical Physics Letters*, 2018. vol. 44, pp. 1218-1221.
10. Parovik R. I. Quality factor of forced oscillations of a linear fractional oscillator, *Technical Physics*, 2020. vol. 65, no. 7, pp. 1015-1019.
11. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
12. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 510 с.
13. Parovik R. I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums, *Int. J. Communications, Network and System Sciences*, 2013. vol. 6, no. 3, pp. 134-138.
14. Parovik R. I. On a finite-difference scheme for an hereditary oscillatory equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547-557.
15. Parovik R. I. Mathematical models of oscillators with memory / *Oscillators-Recent Developments*. London, 2019, pp. 3-21.
16. Tavazoei M. S. Haeri, M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008. vol. 237, pp. 2628-2637.
17. Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019. vol. 71, pp. 231-243.
18. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6(1), no. 23, pp. 1-27.

## Информация об авторах





*Алимов Хайриддин Тухтамуродович* – магистрант Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан  <https://orcid.org/0009-0005-0816-918X>.



*Дзамихова Фатимат Хасеновна* – аспирант Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, г. Нальчик, Россия  <https://orcid.org/0000-0002-5977-4479>.




*Паровик Роман Иванович*  – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий международной интегративной лаборатории экстремальных явлений Камчатки, Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия,  <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>.

## References


- [1] Davey P. A new physiological method for heart rate correction of the QT interval, *Heart*, 1999, 82:2, 183-186.
- [2] Schwartz P. J., Wolf S. QT interval prolongation as predictor of sudden death in patients with myocardial infarction, *Circulation*, 1978, 57:6, 1074-1077.
- [3] McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering*, 2003, 50:3, 289-294.
- [4] Martsenyuk V. P., Sarabun R. O. Issledovaniye nelineynoy dinamiki v modelyakh MakSherri na osnove eksponent Lyapunova, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii*, 2014, 2, 57-61, (In Russian).
- [5] Oldham K., Spanier J. *The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Academic Press, London, 1974, 240.
- [6] Miller K., Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication, New York, 1993, 384.
- [7] Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272, (In Russian).
- [8] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523.
- [9] Pskhu A. V., Rekhviashvili S. S. Analysis of forced oscillations of a fractional oscillator, *Technical Physics Letters*. 2018, 44, 1218-1221.
- [10] Parovik R. I. Quality factor of forced oscillations of a linear fractional oscillator, *Technical Physics*, 2020, 65:7, 1015-1019.
- [11] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York, USA, Dover Publications, 2005, 288.
- [12] Uchajkin V. V. Metod drobnnyh proizvodnyh [Fractional derivative method]. Ulyanovsk, Artichoke, 2008, 510, (In Russian).
- [13] Parovik R. I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums, *Int. J. Communications, Network and System Sciences*, 2013, 6:3, 134-138.
- [14] Parovik R. I. On a finite-difference scheme for an hereditary oscillatory equation, *Journal of Mathematical Sciences*. 2021, 253:4, 547-557.
- [15] Parovik R. I. Mathematical models of oscillators with memory, *Oscillators - Recent Developments*, Edited by Patrice Salzenstein. London, 2019, 3-21.
- [16] Tavazoei M. S. Haeri, M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, 237, 2628-2637.
- [17] Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 71, 231-243.
- [18] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022, 6(1), 23, 1-27.

## Information about authors





*Alimov Khairiddin Tukhtamurodovich* – undergraduate student of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan  <https://orcid.org/0009-0005-0816-918X>.



*Dzamikhova Fatimat Khasenovna* – post-graduate student of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia  <https://orcid.org/0000-0002-5977-4479>.



*Parovik Roman Ivanovich*  – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Head of the International Integrative Laboratory of Extreme Phenomena of Kamchatka, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia,  <https://orcid.org/0000-0002-1576-1860>.