

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 532.5, 517.2

Научная статья

Генерация комплексных каскадных моделей турбулентных систем методами компьютерной алгебры

Г. М. Водинчар^{1,2}, Л. К. Фещенко¹, Н. В. Подлесный³

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

² Камчатский государственный технический университет, 6830003, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35, Россия

³ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, Россия

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

Одним из популярных классов моделей мелкомасштабной турбулентности является класс каскадных моделей. В этих моделях поля турбулентной системы представляются зависящими от времени коллективными переменными (вещественными или комплексными), которые осмысливаются как интенсивность поля в заданном диапазоне пространственных масштабов. Сама модель является некоторой системой квадратично нелинейной обыкновенных дифференциальных уравнений для коллективных переменных. Составление новой каскадной модели требует достаточно сложных аналитических преобразований. Это связано с тем, что система уравнений модели при отсутствии диссипации должна иметь некоторые квадратичные инварианты и сохранять фазовый объем. Кроме того, есть ограничения, связанные с невозможностью нелинейного взаимодействия некоторых диапазонов масштабов. Все это накладывает ограничения на коэффициенты нелинейных членов модели. Ограничения образуют систему уравнений с параметрами. Сложность этой системы резко возрастает для нелокальных моделей, когда описывается взаимодействие не только близких диапазонов масштабов и при использовании комплексных коллективных переменных. В работе предложена вычислительная технология, позволяющая автоматизировать процесс построения каскадных моделей. Она позволяет легко комбинировать различные инварианты и значение нелокальности. Технология основана на методах компьютерной алгебры. Автоматизирован процесс построения уравнений для неизвестных коэффициентов и их решения. В результате получают параметрические классы каскадных моделей, обладающих нужными аналитическими свойствами.

Ключевые слова: турбулентность, каскадные модели, компьютерная алгебра, автоматизация построения моделей.

Финансирование. Работа выполнялась в рамках государственного задания по теме «Физические процессы в системе ближнего космоса и геосфер при солнечных и литосферных воздействиях» (№ АААА-А21-121011290003-0).

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-9-31

Поступила в редакцию: 29.11.2022

В окончательном варианте: 06.12.2022

Для цитирования. Водинчар Г. М., Фещенко Л. К., Подлесный Н. В. Генерация комплексных каскадных моделей турбулентных систем методами компьютерной алгебры // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2022. Т. 41. № 4. С. 9-31.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-9-31

Контент публикуется на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International* (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Водинчар Г. М., Фещенко Л. К., Подлесный Н. В., 2022

Введение

Каскадные модели (shell models) турбулентности представляют собой цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений, которые описывают процессы переноса энергии по масштабному спектру в развитой турбулентности. Известные каскадные модели достаточно хорошо воспроизводят реалистичные распределения пространственных спектров полей реальных турбулентных систем [5, 3, 2, 1, 4].

Для построения таких моделей ось волновых чисел разбивается на расширяющиеся в геометрической прогрессии зоны (оболочки). Возникает последовательность волновых чисел $k_n = q^n k_0$, где, при подходящем выборе пространственного масштаба при обезразмеривании модели, можно считать, что $k_0 = 1$. Знаменатель прогрессии q можно выбирать достаточно произвольным большим единицы. Часто берут $q = 2$.

Динамика каждого поля X турбулентной системы описывается вещественными или комплексными переменными $X_n(t)$, т.н. коллективными переменными, абсолютные значения которых интерпретируются как меры пульсаций поля X в диапазонах масштабов с волновыми числами из $[k_n; k_{n+1}]$. Такое описание (при целых q) соответствует представлению турбулентной системы как совокупности иерархически вложенных взаимодействующих вихрей, когда каждый вихрь n -го масштаба содержит в себе q^α вихрей $(n+1)$ -го масштаба. Здесь α равно размерности физического пространства турбулентной системы. Каждая коллективная переменная тогда дает меру суммарной интенсивности вихрей данного масштаба.

Для этих переменных и составляется система уравнений, качественно подобная исходным уравнениям турбулентной системы. Поскольку уравнения гидродинамики являются квадратично нелинейными, то речь идет о квадратично нелинейной динамической системе. Коэффициенты при нелинейных членах такой системы определяют в модели перенос энергии вдоль инерционного интервала масштабов в развитой турбулентности. В этой работе мы будем рассматривать только комплексные переменные.

Известно, что в бездиссипативном пределе в уравнениях гидродинамики существуют сохраняющиеся квадратичные величины (квадратичные инварианты). Поэтому необходимо, чтобы и уравнения каскадных моделей обладали бы квадратичными инвариантами, являющимися в каком-то смысле аналогами этих величин.

Основная математическая задача при выводе уравнений каскадных моделей заключается в расчете коэффициентов при нелинейных членах, которые обеспечивали бы существование тех или иных квадратичных инвариантов. Речь при этом идет не о наборе конкретных числовых коэффициентов, а о некоторых параметризованных множествах.

В настоящей работе мы описываем технологию автоматизированного построения комплексных каскадных моделей, в которой расчет коэффициентов нелинейных взаимодействий реализуется с помощью систем символьных вычислений (систем компьютерной алгебры – CAS) [6, 7, 8]. Непосредственный расчет будем проводить с использованием пакета Maple, хотя все вычисления можно проводить средствами любой CAS.

Ранее авторы рассматривали применение CAS для автоматизированного составления вещественных каскадных моделей гидродинамики и магнитной гидродинамики [9]. Однако недостаток вещественных моделей в том, что в них не удается ввести естественный аналог для инварианта спиральности, приходится вводить достаточно искусственную процедуру чередования знаков [4], а вот в комплексных моделях можно избежать этой искусственности.

Настоящая работа обобщает результаты [9] для случая комплексных моделей гидродинамической турбулентности и турбулентной конвекции.

Общий вид генерируемых каскадных моделей

Мы будем рассматривать автоматизированную генерацию комплексных каскадных моделей гидродинамики и конвекции. Пусть U_n и T_n – комплексные коллективные переменные для полей скорости и температуры.

Структура генерируемых моделей является обобщением структур таких классических моделей, как GOY [10, 11] и Sabra [13, 14]. Модели записываются в следующем виде:

– Гидродинамическая турбулентность:

$$\frac{dU_n}{dt} = \imath \sum_{l,m} P_{nlm} U_l U_m + \imath \sum_{l,m} Q_{nlm} U_l U_m^* + \imath \sum_{l,m} R_{nlm} U_l^* U_m^* - R^{-1} k_n^2 U_n + f_n(t), \quad (1)$$

где R – число Рейнольдса, $k_n = q^n$ – безразмерное волновое число, соответствующее n -ой масштабной оболочке, $f_n(t)$ – заданные функции, моделирующие подвод энергии в турбулентную систему извне. Обычно этот подвод выполняется только на основном масштабе системы (макромасштабе) $n = 0$. Звездочка здесь и далее обозначает операцию комплексного сопряжения.

– Турбулентная конвекция:

$$\begin{aligned} \frac{dU_n}{dt} &= \imath \sum_{l,m} P_{nij} U_l U_m + \imath \sum_{l,m} Q_{nlm} U_l U_m^* + \imath \sum_{l,m} R_{nlm} U_l^* U_m^* - R^{-1} k_n^2 U_n + T_n, \\ \frac{dT_n}{dt} &= \imath \sum_{l,m} W_{nlm} U_l T_m + \imath \sum_{l,m} X_{nlm} U_l^* T_m + \imath \sum_{l,m} Y_{nlm} U_l T_m^* + \imath \sum_{l,m} Z_{nlm} U_l^* T_m^* - \\ &- k_n^2 (PrR)^{-1} T_n + q_n(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где Pr – число Прандтля. Здесь внешний подвод энергии $q_n(t)$ осуществляется через температуру (тепловой источник), а в уравнении для скорости температурный член соответствует силе Архимеда. Поскольку архимедов член в уравнениях конвекции является линейным, то ясно, что пространственные масштабы температурных неоднородностей и вызываемых ими неоднородностей скорости должны совпадать, поэтому на пульсации скорости n -ой масштабной оболочки должны влиять только пульсации температуры из этой же оболочки.

Индексы n, l и m в уравнениях могут принимать любые целочисленные значения.

Из этих уравнений видно, что мы берем максимально общий вид квадратичных членов в уравнениях. Вообще, естественным «прототипом» для комплексных каскадных моделей являются спектральные формы уравнений Навье-Стокса и теплопроводности. Например, уравнение для компонент вектора пространственного спектра скорости $\hat{v}(t, k)$, т.е. уравнение Навье-Стокса в пространстве волновых векторов, можно записать в виде [5]:

$$\frac{\partial \hat{v}_j(k)}{\partial t} = \imath \int dq \int ds R_{jml}(k, q, s) \delta(k + q + s) \hat{v}_m^*(q) \hat{v}_l^*(s) - R^{-1} k^2 \hat{v}_j^*(k)_n + \hat{f}_j(t, k), \quad (3)$$

где $R_{jml}(\cdot, \cdot, \cdot)$ – некоторая тензорная функция третьего ранга от трех волновых векторов, конкретный вид которой в данной работе неважен, $\delta(\cdot)$ – трехмерная функция Дирака, а интегрирование ведется по всевозможным волновым векторам q и s . Отметим, что нелинейный интегральный член включает компоненты поля со знаками сопряжения. Аналогичную структуру имеет и спектральная форма уравнения теплопроводности.

Поэтому их прямые каскадные аналоги должны содержать только нелинейные члены с коэффициентами R_{nlm} и Z_{nlm} , где все коллективные переменные идут со знаками сопряжения. Именно такой вид имеют модели типа GOY. Однако в таких моделях возникают проблемы с существованием инварианта спиральности, о чем уже упоминалось выше. Квадратичные члены, содержащие попарные произведения переменных, а также переменных и их сопряжений, используются в модели Sabra. Модели (1) и (2) обобщают оба этих случая.

Важно отметить, что сама идея каскадных моделей предполагает отказ от описания геометрической структуры движений. В то же время хорошо известно [4], что турбулентные процессы в пространствах двух и трех измерений ведут себя качественно по-разному. Поэтому обеспечение тех или иных комбинаций сохраняющихся величин дает возможность косвенно вносить в каскадную модель информацию

о размерности физического пространства, в котором развивается турбулентный процесс.

Различные каскадные модели отличаются коэффициентами нелинейных взаимодействий P_{nlm} , Q_{nlm} , R_{nlm} , W_{nlm} , X_{nlm} , Y_{nlm} , Z_{nlm} обеспечивающими существование различных квадратичных инвариантов. Все эти коэффициенты являются вещественными числами.

Законы сохранения в комплексных каскадных моделях

В случае идеальной среды, т.е. когда $R^{-1} = Pr^{-1} = 0$, и при отсутствии внешних источников энергии уравнения гидродинамики и конвекции удовлетворяют некоторому набору законов сохранения, представленных в первом столбце табл. 1, где $v(t, r)$ и $T(t, r)$ – поля скорости и температуры, а символ dr означает интегрирование по физическому пространству. Заметим, что мы всюду работаем в безразмерных переменных. К сохраняющимся величинам относится, прежде всего, кинетическая энергия. В двумерных течениях сохраняется энстрофия, т.е. квадрат завихренности, а в трехмерных – спиральность. Кроме того, для уравнения температуропроводности сохраняется квадрат температурных пульсаций, связанный с энтропией [3].

Сохраняющиеся величины являются некоторыми квадратичными формами от турбулентных полей. В связи с этим требуется, чтобы и каскадные модели в таких ситуациях также обладали набором квадратичных инвариантов. Эти инвариантные квадратичные формы от коллективных переменных должны быть формальными аналогами точных сохраняющихся величин.

Каждый квадратичный инвариант является интегралом по физическому пространству от самих полей физической системы и, в равносильной форме, может быть представлен в виде интеграла по пространству волновых векторов (Фурье-пространству) от пространственных спектров этих полей. Эти представления приведены во втором столбце табл. 1, где $\hat{v}(t, k)$ и $\hat{T}(t, k)$ – пространственные спектры полей скорости и температуры. Именно этот вариант представления подсказывает каскадные аналоги законов сохранения, поскольку комплексные коллективные переменные являются прямыми аналогами спектров полей, точнее – спектров, проинтегрированных по соответствующим диапазонам волновых чисел и по всем направлениям волнового вектора.

Каскадные аналоги, используемые в настоящей работе, приведены в третьем столбце табл. 1. Это стандартные для каскадных моделей выражения [4, 5].

Аналоги для инвариантов E_K , Ω и E_T очевидны. Что касается спиральности H , то, чтобы понять происхождение ее каскадного аналога, распишем выражение для H в Фурье-пространстве через компоненты $\hat{v}_j = a_j + ib_j$ вектора спектра скорости и компоненты k_j волнового вектора:

$$\hat{v}(-ik \times \hat{v}^*) = 2k_1(a_2b_3 - a_3b_2) + 2k_2(-a_1b_3 + a_3b_1) + 2k_3(a_1b_2 - a_2b_1). \quad (4)$$

Из последнего выражения видно, что H является квадратичной формой, каждый одночлен которой образован произведением действительной и мнимой частей компонент спектра скорости, а коэффициентами этой формы являются компоненты волнового вектора. И именно такая структура используется для слагаемых каскадного аналога спиральности в табл. 1.

Таблица 1

Квадратичные инварианты, реализуемые в моделях [Quadratic invariants implemented in models]

Физическое пространство	Фурье-пространство	Каскадный аналог
Кинетическая энергия E_K		
$\frac{1}{2} \int v^2 dr$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int \hat{v} \hat{v}^* dk$	$\frac{1}{2} \sum_n U_n U_n^*$
Энстрофия Ω		
$\frac{1}{2} \int (\nabla \times v)^2 dr$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int (ik \times \hat{v}) (-ik \times \hat{v}^*) dk$	$\frac{1}{2} \sum_n k_n^2 U_n U_n^*$
Спиральность H		
$\int v (\nabla \times v) dr$	$\frac{1}{8\pi^3} \int \hat{v} (-ik \times \hat{v}^*) dk$	$\sum_n k_n \text{Re} U_n \text{Im} U_n$
Энергия температурных пульсаций E_T		
$\frac{1}{2} \int T^2 dr$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8\pi^3} \int \hat{T} \hat{T}^* dk$	$\frac{1}{2} \sum_n T_n T_n^*$

Инвариантность во времени каждой из приведенных в табл. 1 квадратичных форм от коллективных переменных означает, что их производные по времени тождественно нулевые, а любая такая производная будет суммой по всем масштабам от произведений как переменных, так и их производных.

Подставив в эти выражения значения производных из общих уравнений соответствующих каскадных моделей, будем получать кубичные формы от коллективных переменных, а коэффициенты этих кубичных форм будут линейными комбинациями коэффициентов нелинейных взаимодействий. Поскольку тождественное равенство нулю кубичных форм возможно только при всех нулевых коэффициентах этих форм, будем получать набор однородных линейных уравнений для искоемых коэффициентов нелинейных взаимодействий.

Формально этих уравнений, как и самих искоемых коэффициентов, бесконечно много, однако всегда вводятся ограничения на дальность взаимодействий в пространстве масштабов. Это приводит к конечному усечению как числа ненулевых коэффициентов взаимодействий, так и числа уравнений для них, поскольку остальные уравнения выродятся в тождества. Конкретный вид уравнений зависит от используемых законов сохранения, от того, какова размерность моделируемого потока, учитывается конвекция или нет. Далее мы получим общий вид уравнений для коэффициентов взаимодействий для каждой конкретной ситуации, а также предлагаемую нами общую технологию составления и решения конечных усеченных систем с помощью CAS.

Вывод уравнений на коэффициенты нелинейных членов на основе законов сохранения

В квадратичных членах, присутствующих в общих записях каскадных моделей (1) и (2), коэффициенты этих форм определяются тремя индексами, первый из которых соответствует номеру уравнения, то есть номеру выделенной масштабной оболочки, а два других – номерам оболочек, взаимодействующих с выделенной, т.е. имеется некоторая неоднородность в пространстве масштабов.

Однако в реальности для нелинейного переноса энергии в пределах инерционного интервала существует масштабная однородность. В таком случае взаимодействие l -ой и m -ой оболочек с n -ой должно зависеть не от самих l и m , а только от расстояния от них до n -ой оболочки в пространстве масштабов. Кроме этого, все нелинейные члены точных уравнений гидродинамики и конвекции содержат оператор «набла». Поскольку в Фурье-пространстве действие данного оператора заменяется умножением на ik , то аналогом этого оператора в n -ой масштабной оболочке выступает множитель $ik_n = iq^n$.

Поэтому нелинейные члены для общего вида (1) и (2) каскадных моделей обычно записывают другим способом:

$$\begin{aligned}
 P_{nlm} U_l U_m &= q^n \hat{P}_{l'm'} U_{n+l'} U_{n+m'}, \\
 Q_{nlm} U_l U_m^* &= q^n \hat{Q}_{l'm'} U_{n+l'} U_{n+m'}^*, \\
 R_{nlm} U_l^* U_m^* &= q^n \hat{R}_{l'm'} U_{n+l'}^* U_{n+m'}^*, \\
 W_{nlm} U_l T_m &= q^n \hat{W}_{l'm'} U_{n+l'} T_{n+m'}, \\
 X_{nlm} U_l^* T_m &= q^n \hat{X}_{l'm'} U_{n+l'}^* T_{n+m'}, \\
 Y_{nlm} U_l T_m^* &= q^n \hat{Y}_{l'm'} U_{n+l'} T_{n+m'}^*, \\
 Z_{nlm} U_l^* T_m^* &= q^n \hat{Z}_{l'm'} U_{n+l'}^* T_{n+m'}^*, \\
 l' &= l - n, \quad m' = m - n.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Левый вариант записей оказывается удобнее для получения уравнений на коэффициенты, которые обеспечивают выполнение законов сохранения, поэтому мы и взяли его как исходный. Правый же вариант записи соответствует представлению о масштабной однородности в пределах инерционного интервала и качественно отражает дифференциальную структуру нелинейных членов гидродинамических уравнений. В дальнейшем будем использовать оба варианта, переходя при необходимости от одного к другому. Отметим также, что матрицы коэффициентов $\hat{P}_{l'm'}$ и $\hat{R}_{l'm'}$ естественно считать симметричными.

Выведем уравнения на коэффициенты матриц нелинейных взаимодействий сгруппированные по различным типам моделей, в случае представления нелинейных членов правыми частями формул (5).

В уравнении для переменных скорости $U_n(t)$ при $R^{-1} = 0$ (отсутствие вязкости) и $f_n = 0$ (отсутствие внешнего подвода энергии) должны быть два квадратичных инварианта (см. табл. 1). Это каскадные аналоги для кинетической энергии $E_K = \frac{1}{2} \sum_n U_n U_n^*$, также спиральности $H = \sum_n q^n \text{Re} U_n \text{Im} U_n$ или энстрофии $\Omega = \frac{1}{2} \sum_n q^{2n} U_n U_n^*$ (в зависимости от размерности потока).

Для изменения кинетической энергии получим тогда уравнение:

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_n U_n U_n^* = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dU_n}{dt} U_n^* + \frac{dU_n^*}{dt} U_n \right) = 0. \quad (6)$$

Ясно, что подстановка вместо $\frac{dU_n}{dt}$ и $\frac{dU_n^*}{dt}$ выражений, определяемых правыми частями уравнений (1) даст некоторые кубичные формы относительно коллективных переменных скорости и их сопряжений. Тождественное равенство этих форм нулю, равносильно равенству нулю всех коэффициентов форм. Однако получение явных выражений для коэффициентов с учетом наличия подобных слагаемых и сопряжения требует громоздких, но идейно простых преобразований. Их удобно реализовать с помощью CAS.

Рассмотрим выполнение этих преобразований в пакете Maple и результат работы пакета. Удобно ввести действительные и мнимые части коллективных переменных $U_n = x_n + iy_n$. Выполним в Maple набор команд, представленный на рис. 1. Этот рисунок является просто распечаткой фрагмента экрана для сеанса работы с пакетом.

Сначала вводятся в общем виде выражения для коллективных переменных. Команды `assume(eq,real)` указывают пакету, что переменная `eq` является вещественной. Это важно при работе с операцией сопряжения, т.к. по умолчанию Maple считает все переменные комплексными. Далее, в переменной `dU[n]` формируются правые части уравнений (1). Все символы суммирования опускаются, поскольку они излишне загромождали бы выражения, а реально они нигде здесь не используются, поскольку работа идет только с одночленами. После этого в переменной `dE_K` формируются члены кубичной формы закона сохранения энергии по формуле (6).

Из результата работы Maple (последнее синее выражение на рис. 1) видно, что, после соответствующих перестановок индексов, требуется обеспечить равенство нулю суммы двух кубичных форм — одной с одночленами $x_l x_m y_n$, другой с одночленами $y_l y_m y_n$. Для этого необходимо и достаточно равенство нулю всех коэффициентов форм, однако надо учесть подобные слагаемые. Для первой формы подобные слагаемые получаются перестановками индексов l и m , поэтому получим условие:

$$\begin{aligned} P_{nlm} + P_{nml} - P_{mln} - P_{lmn} - P_{lnm} - P_{mnl} + Q_{nlm} + Q_{nml} + Q_{mln} + Q_{lmn} - \\ - Q_{lnm} - Q_{mnl} + R_{nlm} + R_{nml} + R_{mln} + R_{lmn} + R_{lnm} + R_{mnl} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

```

> restart:
assume(x[n], real): assume(x[l], real): assume(x[m], real):
assume(y[n], real): assume(y[l], real): assume(y[m], real):
assume(P[n,l,m], real): assume(Q[n,l,m], real): assume(R[n,l,m], real):
assume(S[n,l,m], real): assume(q, real):
U[n]:=x[n]+I*y[n]: U[l]:=x[l]+I*y[l]: U[m]:=x[m]+I*y[m]:
> dU[n]:=I*P[n,l,m]*(U[l])* (U[m])+I*Q[n,l,m]*(U[l])*conjugate(U[m])+
      I*R[n,l,m]*conjugate(U[l])*conjugate(U[m]);
dU_n:=IP~_{n,l,m}(x~_l+Iy~_l)(x~_m+Iy~_m)+IQ~_{n,l,m}(x~_l+Iy~_l)(x~_m-Iy~_m)+IR~_{n,l,m}(x~_l-Iy~_l)(x~_m-Iy~_m)
> dE_K:=1/2*simplify(dU[n]*conjugate(U[n])+U[n]*conjugate(dU[n]));
dE_K:=P~_{n,l,m}x~_lx~_m y~_n - P~_{n,l,m}x~_ly~_m x~_n - P~_{n,l,m}y~_lx~_m x~_n - P~_{n,l,m}y~_ly~_m y~_n + Q~_{n,l,m}x~_lx~_m y~_n
+ Q~_{n,l,m}x~_ly~_m x~_n - Q~_{n,l,m}y~_lx~_m x~_n + Q~_{n,l,m}y~_ly~_m y~_n + R~_{n,l,m}x~_lx~_m y~_n + R~_{n,l,m}x~_ly~_m x~_n
+ R~_{n,l,m}y~_lx~_m x~_n - R~_{n,l,m}y~_ly~_m y~_n

```

Рис. 1. Команды Maple (красные) формирующие кубичные формы закона сохранения кинетической энергии и результат их выполнения (синий). Пояснения даны в тексте.

Figure 1. Maple commands (red) forming cubic forms of the law of conservation of kinetic energy and the result of their execution (blue). Explanations are given in the text.

Ясно, что в ситуации, когда $l = m$, подобных слагаемых не будет и эти перестановки не нужны, однако их формальное выполнение просто приведет к умножению всех членов уравнения на два.

Для формы с одночленами $y_l y_m y_n$ подобные слагаемые получаются перестановками всех трех индексов. Получится следующее условие

$$\begin{aligned}
& P_{nlm} + P_{nml} + P_{lnm} + P_{lmn} + P_{mln} + P_{mnl} - \\
& - Q_{nlm} - Q_{nml} - Q_{lnm} - Q_{lmn} - Q_{mln} - Q_{mnl} + \\
& + R_{nlm} + R_{nml} + R_{lnm} + R_{lmn} + R_{mln} + R_{mnl} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что и здесь, при совпадении двух или всех трех индексов, перестановки излишни, но их формальное выполнение просто приведет к умножению членов уравнения на два или шесть.

Теперь целесообразно перейти к двухиндексному варианту записи в соответствии с формулами (5). Получим из (7) и (8) уравнения на коэффициенты, обес-

печивающие выполнение закона сохранения энергии:

$$\begin{aligned}
& q^n \hat{P}_{l-n, m-n} + q^n \hat{P}_{m-n, l-n} - q^m \hat{P}_{l-m, n-m} - q^l \hat{P}_{m-l, n-l} - \\
& - q^l \hat{P}_{n-l, m-l} - q^m \hat{P}_{n-m, l-m} + q^n \hat{Q}_{l-n, m-n} + q^n \hat{Q}_{m-n, l-n} + \\
& + q^m \hat{Q}_{l-m, n-m} + q^l \hat{Q}_{m-l, n-l} - q^l \hat{Q}_{n-l, m-l} - q^m \hat{Q}_{n-m, l-m} + \\
& + q^n \hat{R}_{l-n, m-n} + q^n \hat{R}_{m-n, l-n} + q^m \hat{R}_{l-m, n-m} + q^l \hat{R}_{m-l, n-l} + \\
& + q^l \hat{R}_{n-l, m-l} + q^m \hat{R}_{n-m, l-m} = 0, \\
& q^n \hat{P}_{l-n, m-n} + q^n \hat{P}_{m-n, l-n} + q^l \hat{P}_{n-l, m-l} + q^l \hat{P}_{m-l, n-l} + q^m \hat{P}_{l-m, n-m} + q^m \hat{P}_{n-m, l-m} - \\
& - q^n \hat{Q}_{l-n, m-n} - q^n \hat{Q}_{m-n, l-n} - q^l \hat{Q}_{n-l, m-l} - q^l \hat{Q}_{m-l, n-l} - q^m \hat{Q}_{l-m, n-m} - \\
& - q^m \hat{Q}_{n-m, l-m} + q^n \hat{R}_{l-n, m-n} + q^n \hat{R}_{m-n, l-n} + q^l \hat{R}_{n-l, m-l} + \\
& + q^l \hat{R}_{m-l, n-l} + q^m \hat{R}_{l-m, n-m} + q^m \hat{R}_{n-m, l-m} = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Деля почленно на q^n и переходя к штрихованным индексам по схеме $l' = l - n$, $m' = m - n$, получаем:

$$\begin{aligned}
& \hat{P}_{l', m'} + \hat{P}_{m', l'} + \hat{Q}_{l', m'} + \hat{Q}_{m', l'} + \hat{R}_{l', m'} + \hat{R}_{m', l'} + \\
& + q^{l'} (-\hat{P}_{m'-l', -l'} - \hat{P}_{-l', m'-l'} + \hat{Q}_{m'-l', -l'} - \hat{Q}_{-l', m'-l'} + \hat{R}_{m'-l', -l'} + \hat{R}_{-l', m'-l'}) + \\
& + q^{m'} (-\hat{P}_{l'-m', -m'} - \hat{P}_{-m', l'-m'} + \hat{Q}_{l'-m', -m'} - \hat{Q}_{-m', l'-m'} + \hat{R}_{l'-m', -m'} + \hat{R}_{-m', l'-m'}) = 0, \\
& \hat{P}_{l', m'} + \hat{P}_{m', l'} - \hat{Q}_{l', m'} - \hat{Q}_{m', l'} + \hat{R}_{l', m'} + \hat{R}_{m', l'} + \\
& + q^{l'} (\hat{P}_{-l', m'-l'} + \hat{P}_{m'-l', -l'} - \hat{Q}_{-l', m'-l'} - \hat{Q}_{m'-l', -l'} + \hat{R}_{-l', m'-l'} + \hat{R}_{m'-l', -l'}) + \\
& + q^{m'} (\hat{P}_{l'-m', -m'} + \hat{P}_{-m', l'-m'} - \hat{Q}_{l'-m', -m'} - \hat{Q}_{-m', l'-m'} + \hat{R}_{l'-m', -m'} + \hat{R}_{-m', l'-m'}) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Итак, условие сохранения энергии дает два семейства уравнений (10).

Теперь перейдем к спиральности H . Требование её сохранения дает уравнение

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_n q^n \operatorname{Re} U_n \operatorname{Im} U_n = \\
&= \sum_n q^n \left(\operatorname{Re} U_n \operatorname{Im} \frac{dU_n}{dt} + \operatorname{Re} \frac{dU_n}{dt} \operatorname{Im} U_n \right) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Использование Марле для получения кубичной формы, соответствующей этому закону сохранения, показано на рис. 2.

Здесь видны две кубичные формы, одночлены которых после соответствующих перестановок индексов имеют вид $u_l u_m \chi_n$ и $\chi_l \chi_m \chi_n$. Как и в случае с формой сохранения энергии необходимо свести подобные слагаемые, считая индексы различными, и приравнять к нулю коэффициенты форм. Получим следующие уравнения

```

> dH:=simplify(q^n*(Re(dU[n])*Im(U[n])+Re(U[n])*Im(dU[n])));
dH:=q^n(-y_n P_n,l,m x_l y_m - y_n P_n,l,m y_l x_m + y_n Q_n,l,m x_l y_m - y_n Q_n,l,m y_l x_m
+ y_n R_n,l,m x_l y_m + y_n R_n,l,m y_l x_m + x_n P_n,l,m x_l x_m - x_n P_n,l,m y_l y_m + x_n Q_n,l,m x_l x_m
+ x_n Q_n,l,m y_l y_m + x_n R_n,l,m x_l x_m - x_n R_n,l,m y_l y_m)

```

Рис. 2. Команды Maple (красные) формирующие кубичные формы закона сохранения спиральности и результат их выполнения (синий). Пояснения даны в тексте

Figure 2. Maple commands (red) forming cubic forms of the law of conservation of helicity and the result of their execution (blue). Explanations are given in the text.

для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
& -q^l P_{lnm} - q^m P_{mnl} - q^m P_{mln} - q^l P_{lmn} + q^l Q_{lnm} + q^m Q_{mnl} - q^m Q_{mln} - q^l Q_{lmn} + \\
& + q^l R_{lnm} + q^m R_{mnl} + q^m R_{mln} + q^l R_{lmn} - q^n P_{nlm} - q^n P_{nml} + q^n Q_{nlm} + q^n Q_{nml} - \\
& - q^n R_{nlm} - q^n R_{nml} = 0, \\
& q^n (P_{nlm} + P_{nml}) + q^l (P_{lnm} + P_{lmn}) + q^m (P_{mln} + P_{mnl}) + \\
& + q^n (Q_{nlm} + Q_{nml}) + q^l (Q_{lnm} + Q_{lmn}) + q^m (Q_{mln} + Q_{mnl}) + \\
& + q^n (R_{nlm} + R_{nml}) + q^l (R_{lnm} + R_{lmn}) + q^m (R_{mln} + R_{mnl}) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Теперь переходим к двухиндексному варианту записи в соответствии с формулами (5), делим почленно на q^{2n} и используем штрихованные индексы по схеме: $l' = l - n, m' = m - n$. Получим уравнения:

$$\begin{aligned}
& q^{2l'} (-\hat{P}_{-l',m'-l'} - \hat{P}_{m'-l',-l'} + \hat{Q}_{-l',m'-l'} + \hat{Q}_{m'-l',-l'} + \hat{R}_{-l',m'-l'} + \hat{R}_{m'-l',-l'}) + \\
& + q^{2m'} (-\hat{P}_{-m',l'-m'} - \hat{P}_{l'-m',-m} - \hat{Q}_{-m',l'-m'} - \hat{Q}_{l'-m',-m'} + \hat{R}_{-m',l'-m'} + \hat{R}_{l'-m',-m'}) + \\
& + (-\hat{P}_{l',m'} - \hat{P}_{m',l'} + \hat{Q}_{l',m'} + \hat{Q}_{m',l'} - \hat{R}_{l',m'} - \hat{R}_{m',l'}) = 0, \\
& (\hat{P}_{l',m'} + \hat{P}_{m',l'} + \hat{Q}_{l',m'} + \hat{Q}_{m',l'} + \hat{R}_{l',m'} + \hat{R}_{m',l'}) + \\
& + q^{2l'} (\hat{P}_{-l',m'-l'} + \hat{P}_{m'-l',-l'} + \hat{Q}_{-l',m'-l'} + \hat{Q}_{m'-l',-l'} + \hat{R}_{-l',m'-l'} + \hat{R}_{m'-l',-l'}) + \\
& + q^{2m'} (\hat{P}_{l'-m',-m'} + \hat{P}_{-m',l'-m'} + \hat{Q}_{l'-m',-m'} + \hat{Q}_{-m',l'-m'} + \hat{R}_{l'-m',-m'} + \hat{R}_{-m',l'-m'}) = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Полученные условия выполнения законов сохранения энергии и спиральности необходимо дополнить очевидными условиями симметрии матриц коэффициентов $\hat{P}_{l,m}$ и $\hat{R}_{l,m}$ в виде

$$\hat{P}_{l',m'} - \hat{P}_{m',l'} = 0, \quad \hat{R}_{l',m'} - \hat{R}_{m',l'} = 0. \tag{14}$$

Итак, коэффициенты каскадной модели (1) с нелинейными членами в форме (5) для трехмерного потока должны удовлетворять уравнениям (10,13,14).

Приведем уже без вывода уравнения, обеспечивающие выполнение закона сохранения энстрофии для двумерных течений и закона сохранения энергии температурных пульсаций для моделей конвекции.

Условие сохранения энстрофии Ω можно записать в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_n q^{2n} U_n U_n^* = \frac{1}{2} \sum_n q^{2n} \left(\frac{dU_n}{dt} U_n^* + U_n \frac{dU_n^*}{dt} \right) = 0. \quad (15)$$

Применение Maple для получения кубической формы, соответствующей сохранению энстрофии, показано на рис. 3.

```
> dOmega:=1/2*simplify((q^(2*n))*(dU[n]*conjugate(U[n])+U[n]*conjugate(dU[n])));
dOmega:=q^2n*(P~n,l,m*x~l*x~m*y~n - P~n,l,m*x~l*y~m*x~n - P~n,l,m*y~l*x~m*x~n - P~n,l,m*y~l*y~m*y~n
+ Q~n,l,m*x~l*x~m*y~n + Q~n,l,m*x~l*y~m*x~n - Q~n,l,m*y~l*x~m*x~n + Q~n,l,m*y~l*y~m*y~n + R~n,l,m*x~l*x~m*y~n
+ R~n,l,m*x~l*y~m*x~n + R~n,l,m*y~l*x~m*x~n - R~n,l,m*y~l*y~m*y~n)
```

Рис. 3. Команды Maple (красные) формирующие кубические формы закона сохранения энстрофии и результат их выполнения (синий). Пояснения даны в тексте.

Figure 3. Maple commands (red) forming cubic forms of the enstrophy conservation law and the result of their execution (blue). Explanations are given in the text.

Здесь две кубические формы с одночленами $x_l x_m y_n$ и $y_l y_m y_n$. Окончательные уравнения для коэффициентов будут такие:

$$\begin{aligned} & (\hat{P}_{l',m'} + \hat{P}_{m',l'} + \hat{Q}_{l',m'} + \hat{Q}_{m',l'} + \hat{R}_{l',m'} + \hat{R}_{m',l'}) + \\ & + q^{3l'} (-\hat{P}_{-l',m'-l'} - \hat{P}_{m'-l',-l'} - \hat{Q}_{-l',m'-l'} - \hat{Q}_{m'-l',-l'} + \hat{R}_{-l',m'-l'} + \hat{R}_{m'-l',-l'}) + \\ & + q^{3m'} (-\hat{P}_{-m',l'-m'} - \hat{P}_{l'-m',-m} + \hat{Q}_{-m',l'-m'} + \hat{Q}_{l'-m',-m'} + \hat{R}_{-m',l'-m'} + \hat{R}_{l'-m',-m'}) = 0, \\ & (-\hat{P}_{l',m'} - \hat{P}_{m',l'} + \hat{Q}_{l',m'} + \hat{Q}_{m',l'} - \hat{R}_{l',m'} - \hat{R}_{m',l'}) + \\ & + q^{3l'} (-\hat{P}_{-l',m'-l'} - \hat{P}_{m'-l',-l'} + \hat{Q}_{-l',m'-l'} + \hat{Q}_{m'-l',-l'} - \hat{R}_{-l',m'-l'} - \hat{R}_{m'-l',-l'}) + \\ & + q^{3m'} (-\hat{P}_{l'-m',-m'} - \hat{P}_{-m',l'-m'} + \hat{Q}_{l'-m',-m'} + \hat{Q}_{-m',l'-m'} - \hat{R}_{l'-m',-m'} - \hat{R}_{-m',l'-m'}) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Условие сохранения энергии температурных пульсаций E_T запишем в виде

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_n T_n T_n^* = \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dT_n}{dt} T_n^* + T_n \frac{dT_n^*}{dt} \right) = 0. \quad (17)$$

Использование Maple для получения кубической формы, соответствующей этому инварианту, показано на рис. 4. Здесь видны три кубические формы с одночленами

```

> assume(a[n], real) : assume(a[l], real) : assume(a[m], real) : assume(b[n], real) :
assume(b[l], real) : assume(b[m], real) : assume(W[n,l,m], real) :
assume(X[n,l,m], real) : assume(Y[n,l,m], real) : assume(Z[n,l,m], real) :
T[n] := a[n] + I*b[n] : T[l] := a[l] + I*b[l] : T[m] := a[m] + I*b[m] :
> dT[n] := I*W[n,l,m]*U[l]*T[m] + I*X[n,l,m]*conjugate(U[l])*T[m] +
I*Y[n,l,m]*U[l]*conjugate(T[m]) + I*Z[n,l,m]*conjugate(U[l])*conjugate(T[m]) :
dE_T := 1/2*simplify(dT[n]*conjugate(T[n]) + T[n]*conjugate(dT[n])) :
dE_T := W~_{n,l,m} x~_l a~_m b~_n - W~_{n,l,m} x~_l b~_m a~_n - W~_{n,l,m} y~_l a~_m a~_n - W~_{n,l,m} y~_l b~_m b~_n + X~_{n,l,m} x~_l a~_m b~_n
- X~_{n,l,m} x~_l b~_m a~_n + X~_{n,l,m} y~_l a~_m a~_n + X~_{n,l,m} y~_l b~_m b~_n + Y~_{n,l,m} x~_l a~_m b~_n + Y~_{n,l,m} x~_l b~_m a~_n
- Y~_{n,l,m} y~_l a~_m a~_n + Y~_{n,l,m} y~_l b~_m b~_n + Z~_{n,l,m} x~_l a~_m b~_n + Z~_{n,l,m} x~_l b~_m a~_n + Z~_{n,l,m} y~_l a~_m a~_n
- Z~_{n,l,m} y~_l b~_m b~_n

```

Рис. 4. Команды Maple (красные) формирующие кубичные формы закона сохранения энергии пульсаций температуры и результат их выполнения (синий). Пояснения даны в тексте.

Figure 4. Maple commands (red) forming cubic forms of the law of conservation of energy of temperature fluctuations and the result of their execution (blue). Explanations are given in the text.

(после перестановок индексов) $a_l b_m x_n$, $a_l a_m y_n$ и $b_l b_m y_n$. Условие тождественного равенства этих форм нулю дает три семейства уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned}
& q^{l'} (-\hat{W}_{-l',m'-l'} - \hat{X}_{-l',m'-l'} + \hat{Y}_{-l',m'-l'} + \hat{Z}_{-l',m'-l'}) + \\
& q^{m'} (\hat{W}_{-m',l'-m'} + \hat{X}_{-m',l'-m'} + \hat{Y}_{-m',l'-m'} + \hat{Z}_{-m',l'-m'}) = 0, \\
& q^{l'} (-W_{-l',m'-l'} + X_{-l',m'-l'} - Y_{-l',m'-l'} + Z_{-l',m'-l'}) + \\
& + q^{m'} (-W_{-m',l'-m'} + X_{-m',l'-m'} - Y_{-m',l'-m'} + Z_{-m',l'-m'}) = 0, \\
& q^{l'} (-W_{-l',m'-l'} + X_{-l',m'-l'} + Y_{-l',m'-l'} - Z_{-l',m'-l'}) + \\
& + q^{m'} (-W_{-m',l'-m'} + X_{-m',l'-m'} + Y_{-m',l'-m'} - Z_{-m',l'-m'}) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

В табл. 2 сведены номера уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты моделей в зависимости от размерности потока и типа модели — гидродинамическая турбулентность или турбулентная конвекция.

Ограничения на коэффициенты нелинейных членов, определяемые взаимодействием волн

Есть еще одно ограничение, естественным образом вытекающее из волновых взаимодействий и не связанное с квадратичными законами сохранения. Это ограничение принципиально при построении нелокальных по масштабам моделей, когда формально присутствуют взаимодействия далеких друг от друга масштабов.

Из представления уравнений движения среды в пространстве волновых векторов, что в нелинейном взаимодействии участвуют те и только те волны, из волновых векторов которых можно составить треугольник [5]. Это хорошо видно из-за функции Дирака в спектральной форме уравнения Навье-Стокса (3). Аналогичный множитель есть и в спектральной форме уравнения температуропроводности.

При переходе к каскадным моделям это означает, что возможность взаимодействия надо оставлять только оболочкам, содержащим такие волновые числа, величины которых позволяют составить треугольник. Для оболочек с номерами n , $n + l$, $n + m$ пара индексов (l, m) должна тогда лежать в некоторой области, конкретный вид которой зависит от q , но общая форма подобна области F , изображенной на рис. 1. Область всегда неограниченно вытянута в трех направлениях. На самом рис. 1 дана форма области F при $q \geq 2$. С уменьшением q область расширяется. Схема расчета подобной области пар индексов взаимодействующих оболочек описана, например, в работах [15, 16]. Будем далее рассматривать именно случай $q \geq 2$.

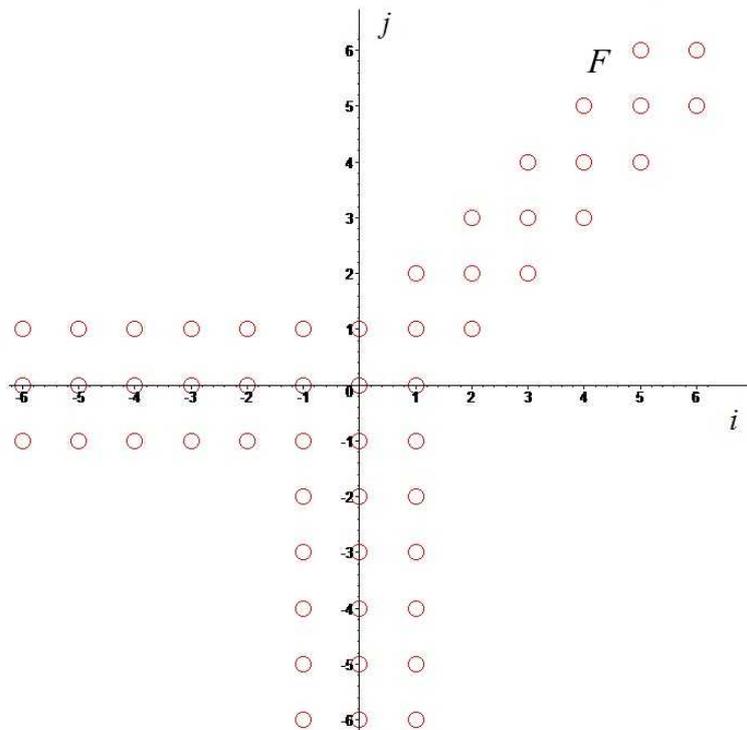


Рис. 5. Область F пар индексов взаимодействующих оболочек при $q \geq 2$.
Figure 5. Domain F of pairs of indices of interacting shells for $q \geq 2$.

Чтобы обеспечить выполнение этого ограничения, необходимо потребовать, чтобы все коэффициенты нелинейных взаимодействий, индексы которых не попадают в область F , были бы нулевыми.

Ясно, что область F выделяется в плоскости индексов предикатом

$$f(l, m) = (|l| \leq 1 \wedge m \leq 1) \vee (|m| \leq 1 \wedge l \leq 1) \vee (l \geq 1 \wedge m \geq 1 \wedge |l - m| \leq 1). \quad (19)$$

Таблица 2

Номера уравнений для коэффициентов нелинейных взаимодействий у различных типов моделей [Numbers of equations for the coefficients of nonlinear interactions for different types of models]

Двумерное течение
1) сохранение кинетической энергии — уравнения (10);
2) сохранение энтропии — уравнения (16);
3) симметрии — уравнения (14)
Трехмерное течение
1) сохранение кинетической энергии — уравнения (10);
2) сохранение спиральности — уравнения (13);
3) симметрии — уравнения (14)
Конвективные течения (дополнительное условие для температуры)
1) Сохранение энергии пульсаций температуры — уравнения (18)

Ограничения на коэффициенты нелинейных членов, определяемые теоремой Лиувилля

Еще одно ограничение, которое желательно накладывать на коэффициенты каскадных моделей, связано с теоремой Лиувилля о сохранении фазового объема. Естественно считать, что уравнения моделей при отсутствии диссипативных членов должны сохранять фазовый объем, т.е. дивергенция поля фазовых скоростей должна быть нулевой. Получим уравнения на коэффициенты нелинейных членов, которые обеспечат выполнение этого условия.

Обозначим правые части уравнений (1) через H_n , а правые части (2) через F_n и G_n , и явно выделим действительные и мнимые части коллективных переменных $U_n = x_n + iy_n$ и $T_n = a_n + ib_n$. Тогда дивергенция поля скоростей для системы (1) будет

$$\sum_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \operatorname{Re} H_n + \frac{\partial}{\partial y_n} \operatorname{Im} H_n \right), \quad (20)$$

а для системы (2):

$$\sum_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \operatorname{Re} G_n + \frac{\partial}{\partial y_n} \operatorname{Im} G_n + \frac{\partial}{\partial a_n} \operatorname{Re} F_n + \frac{\partial}{\partial b_n} \operatorname{Im} F_n \right). \quad (21)$$

Вычисляя выражение (20) и приравнявая его к нулю, получим условие

$$\sum_l y_l \sum_n (-P_{nnl} - P_{nl n} + Q_{nnl}) = 0. \quad (22)$$

Равенство этого выражения при любых значениях y_l возможно, только если

$$\sum_n (-P_{nnl} - P_{nl n} + Q_{nnl}) = 0. \quad (23)$$

Переходя к двухиндексным коэффициентам, получим окончательное семейство уравнений

$$-\hat{P}_{0,l'} - \hat{P}_{l',0} + \hat{Q}_{0,l'} = 0. \quad (24)$$

Итак, модель (1) будет удовлетворять теореме Лиувилля, если выполняются уравнения (24) для коэффициентов.

Аналогично, из выражений (21) можно получить, что для системы (2) будет выполняться теорема Лиувилля, если

$$-\hat{P}_{0,l'} - \hat{P}_{l',0} + \hat{Q}_{0,l'} - \hat{W}_{l',0} + \hat{X}_{l',0} = 0. \quad (25)$$

Следует отметить, что в последних двух уравнениях нет коэффициентов $\hat{R}_{l',m'}$ и $\hat{Z}_{l',m'}$. Поэтому любая модель, содержащая только эти коэффициенты (модель семейства GOY) будет автоматически сохранять фазовый объем.

Алгоритм символьных вычислений и его программная реализация

Покажем теперь на примере пакета Maple, как можно использовать CAS для формирования системы уравнений для коэффициентов нелинейных взаимодействий и ее решения в рациональной арифметике.

Прежде всего отметим, что в реальной турбулентной физической системе всегда существует предельная дальность нелинейного взаимодействия в пространстве масштабов (масштабная нелокальность). В каскадной модели эта конечная масштабная нелокальность определяет реальный диапазон изменения l и m . А именно, существует некоторое натуральное число N , что все коэффициенты хотя бы один из индексов которых по модулю превосходит N , будут нулевыми. Поскольку все уравнения на коэффициенты взаимодействий являются линейными однородными, то уравнения, все члены которых содержат хотя бы по одному индексу, модуль которого больше N , окажутся тождествами. Получается, что введение ограничений по дальности взаимодействий выделяет в полученных выше бесконечных системах уравнений конечные подсистемы. Именно эти подсистемы мы будем формировать и решать, используя Maple.

Отметим также, что каждое из уравнений, номера которых приведены в табл. 2 определяется парой индексов (l, l) , причем в этом уравнении присутствуют только коэффициенты с индексами $(\pm l, \pm m)$, $(\pm l, \pm(l-m))$ и $(\pm m, \pm(l-m))$. В действительности, выше в работе все эти уравнения содержали штрихованные индексы, это связано со схемой их получения. Однако теперь мы можем опускать все штрихи.

Поэтому необязательно будут вырождаться в тождества только те уравнения, у которых определяющие их индексы (l, m) удовлетворяют предикату:

$$d(l, m) = (|l| \leq N \wedge |m| \leq N) \vee (|l| \leq N \wedge |l-m| \leq N) \vee (|m| \leq N \wedge |l-m| \leq N). \quad (26)$$

Выпуклой оболочкой таких пар в плоскости (l, m) является шестиугольник, выделяемый условиями: $|l| \leq 2N$, $|m| \leq 2N$, $|l-m| \leq 2N$.

Тогда наборы рассчитываемых коэффициентов естественно представить в Maple с помощью двумерных массивов, индексы которых меняются от $-2N$ до $2N$. Если используется CAS, не поддерживающая массивы с отрицательными индексами, достаточно использовать сдвиг на $2N$ по каждому индексу.

Тогда все элементы массивов, индексы которых удовлетворяют условию:

$$\neg f(l, m) \vee |l| > N \vee |m| > N, \quad (27)$$

должны быть нулевыми, а остальным должны быть присвоены символьные значения, которые далее будут компонентами вектора неизвестных в составляемой системе уравнений.

Далее необходимо составить выражения для левой части уравнений из табл. 2 у соответствующего течения для каждой пары индексов, удовлетворяющих $d(l, m)$. Затем необходимо для каждого индекса $l = -N, \dots, N$ составить выражения для левых частей (24) или (25) в зависимости от типа модели. При этом целесообразно контролировать, не окажется ли это выражение нулевым, т.к. тогда уравнение вырождается в тождество. Все ненулевые выражения записываются в некоторый массив.

На основе выражений из этого массива формируется в Maple система однородных линейных уравнений, которая далее может быть решена стандартными средствами пакета. Полученные выражения для коэффициентов, определяемые несколькими свободными параметрами и дадут искомое семейство каскадных моделей.

Детали программной реализации подобных расчетов описывались ранее авторами в работе [9] и здесь не приводятся.

Хорошо известным свойством развитой турбулентности являются степенные спектральные законы в пределах инерционного интервала. Поскольку коллективные переменные осмысливаются как меры пульсаций соответствующих масштабов, проявлением спектральных законов для энергии в каскадных моделях будут стационарные решения степенной формы. Эти решения должны реализовываться и в каскадных моделях.

Генерируемую в Maple систему уравнений для коэффициентов модели легко дополнить уравнениями, обеспечивающими существование стационарных степенных решений. Покажем, как это можно сделать, на примере гидродинамического течения.

Положим в модели (1) с нелинейными членами в форме (5) $R^{-1} = 0$ и $f_n = 0$ и подставим в нее стационарные решения вида $U_n = U_0 k_n^\alpha = U_0 q^{n\alpha}$, где U_0 – вещественная. Получим однородное линейное уравнение относительно коэффициентов модели:

$$\sum_{l', m'} q^{\alpha(l'+m')} (\hat{P}_{l'm'} + \hat{Q}_{l'm'} + \hat{R}_{l'm'}) = 0. \quad (28)$$

Это уравнения и необходимо добавить в Maple к системе на коэффициенты взаимодействий.

Можно добавить и несколько групп уравнений типа (28) с различными α , если мы хотим обеспечить существование нескольких стационарных степенных решений. Понятно, что добавление таких уравнений может снизить, но необязательно снижает, число независимых переменных в общем решении для коэффициентов взаимодействий. В частности, возможна ситуация, когда их добавление приведет к системе только с нулевыми решениями. Это говорит о том, что каскадной модели с таким набором инвариантов и спектральных законов не существует.

Пример генерации модели

В качестве примера генерации модели с помощью описанной выше технологии, рассмотрим модель гидродинамического двумерного потока с инвариантами энергии и энтропии и дальностью взаимодействия $N = 2$. Такая дальность используется чаще всего в каскадных моделях, т.к. определяет взаимодействие трех соседних оболочек.

Программа Maple выдала следующие значения для ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{-2,-1} = \hat{P}_{-1,-2} &= \frac{t_1 + t_2}{2q^3}, & \hat{P}_{-1,1} = \hat{P}_{1,-1} &= \frac{t_1 + t_2}{2}, & \hat{P}_{1,2} = \hat{P}_{2,1} &= \frac{q^3(t_1 + t_2)}{2}, \\
 \hat{Q}_{-2,-1} &= \frac{(q^2 - 1)t_1 + q^2 t_2}{q}, & \hat{Q}_{-1,-2} &= \frac{(1 + q^2 - q^4)t_1 + (1 - q^4)t_2}{q^3}, \\
 \hat{Q}_{-1,1} &= t_1, & \hat{Q}_{1,-1} &= t_2, \\
 \hat{Q}_{1,2} &= \frac{(q^4 - 1)t_1 + (q^4 + q^2 - 1)t_2}{q}, & \hat{Q}_{2,1} &= \frac{t_1 + (1 - q^2)t_2}{q}, \\
 \hat{R}_{-2,-1} = \hat{R}_{-1,-2} &= t_3, & \hat{R}_{-1,1} = \hat{R}_{1,-1} &= -q(1 + q^2)t_3, \\
 \hat{R}_{1,2} = \hat{R}_{2,1} &= q^4 t_3,
 \end{aligned} \tag{29}$$

где t_i – свободные параметры.

Из этих выражений прежде всего видно, что в случае $t_1 = t_2 = 0$ получается однопараметрическая модель семейства GOY, а в случае $t_3 = 0$ – двухпараметрическая модель семейства Sabra.

Классическая форма модели GOY имеет вид [5]:

$$\frac{dU_n}{dt} = \nu q^n \left(U_{n+1}^* U_{n+2}^* - \frac{\varepsilon}{q} U_{n-1}^* U_{n+1}^* - \frac{\varepsilon - 1}{q^2} U_{n-2}^* U_{n-1}^* \right) - R^{-1} q^{2n} U_n + f_n(t). \tag{30}$$

Если в формулах (29) положить $t_1 = t_2 = 0$ и $t_3 = 1/(2q^4)$, получим этот классический вид при $\varepsilon = 1 + 1/q^2$. Это косвенно подтверждает правильность работы программы.

Заключение

Составление каскадных моделей турбулентности связано с получением квадратично нелинейных систем дифференциальных уравнений типа (1, 2), обладаю-

щих определенным набором квадратичных инвариантов. Эти инварианты являются аналогами сохраняющихся величин в полных уравнениях гидродинамики и конвекции. Фактически выбор того или иного набора инвариантов определяет, какова размерность моделируемого течения. Это единственный способ внести в каскадную модель информацию о размерности течения.

Вывод уравнений модели требует достаточно громоздких формульных преобразований, сложность которых резко возрастает при построении нелокальных моделей, когда происходит взаимодействие не соседствующих масштабных оболочек. Использование комплексных коллективных переменных также усложняет выкладки.

В статье предложена вычислительная технология построения каскадных моделей, в которой составление системы уравнений на коэффициенты нелинейных взаимодействий в модели и ее точное решение реализуется с помощью систем компьютерной алгебры. Она позволяет легко варьировать размеры нелокальности нелинейного взаимодействия в пространстве масштабов и комбинации квадратичных инвариантов. Также обеспечивается несжимаемость фазового объема для генерируемых моделей.

Предложенная технология и реализующие ее программы решают задачи быстрой и безошибочной генерации параметрических классов каскадных моделей. Она также позволяет получать модели со стационарными решениями, обладающими степенными распределениями по масштабам.

Результаты данной работы развивают и обобщают результаты [9] на случай комплексных коллективных переменных.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли свой вклад в эту статью. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательный вариант рукописи был одобрен всеми авторами.

Список литературы

1. Mingshun J., Shida L. Scaling behavior of velocity and temperature in a shell model for thermal convective turbulence, *Physical Review E*, 1997. vol. 56, pp. 441.
2. Hattori Y., Rubinstein R., Ishizawa A. Shell model for rotating turbulence, *Physical Review E*, 2004. vol. 70, pp. 046311.
3. Ching E.S.C., Guo H., Cheng W.C. Understanding the different scaling behavior in various shell models proposed for turbulent thermal convection, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008. vol. 237, no. 4, pp. 2009–2014.
4. Фрик П. Г. *Турбулентность: подходы и модели*. Москва–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. 332 с.
5. Ditlevsen P. *Turbulence and Shell Models*. Cambridge: University Press, 2011. 152 pp.
6. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. *Компьютерная алгебра*. М.: Мир, 1991. 352 с.
7. Матросов А. В. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*. СПб.: ВХВ, 2001. 528 с.
8. Чичкарёв Е. А. *Компьютерная математика с Maxima*. М.: АЛТ Linux, 2012. 384 с.
9. Водинчар Г. М., Фещенко Л. К. Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры, *Вычислительные технологии*, 2021. Т. 26, № 5, С. 65–80.
10. Гледзер Е. Б. Система гидродинамического типа, допускающая квадратичных интеграла движения, *ДАН СССР*, 1973. Т. 209, № 5, С. 1046–1048.

11. Yamada M., Ohkitani K. Lyapunov Spectrum of a Chaotic Model of Three-Dimensional Turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1987. vol. 56, pp. 4210.
12. L'vov V., Podivilov E., Pomlyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence, *Phys. Rev. E*, 1998. vol. 58, pp. 1811.
13. Ditlevsen P. Symmetries, invariants, and cascades in a shell model of turbulence, *Phys. Rev. E*, 2000. vol. 62, pp. 484.
14. Plunian F., Stepanov R. A non-local shell model of hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence, *New Journal of Physics*, 2007. vol. 9, pp. 294.
15. Plunian F., Stepanov R. A., Frick P. G. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence, *Physics Reports*, 2013. vol. 523, pp. 1–60.



Водинчар Глеб Михайлович ✉ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, и.о. заведующего лабораторией моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, доцент кафедры систем управления Камчатского государственного технического университета, г. Петропавловск-Камчатский, Россия,  ORCID 0000-0002-5516-1931.



Фещенко Любовь Константиновна ✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-5970-7316.



Подлесный Никита Викторович ✉ – магистрант кафедры математики и физики Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга, ул. Пограничная, 4, Петропавловск-Камчатский, Камчатский край, Россия,  ORCID 0000-0002-3213-5706.

MATHEMATICAL MODELING

MSC 68W30, 76F20

Research Article

**Construction of complex shell models of turbulent systems by
computer algebra methods**

G. M. Vodinchar^{1,2}, L. K. Feshchenko¹, N. V. Podlesnyi³

¹ Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Mirnaya Str., 7, Paratunka, Kamchatka region, 683003, Russia

² Kamchatka State Technical University, Klyuchevskaya Str., 35, Petropavlovsk-
Kamchatsky, 683003, Russia

³ Vitus Bering Kamchatka State University, Pogranichnaya Str., 4, Petropavlovsk-
Kamchatsky, 683032, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru

One popular class of small-scale turbulence models is the class of shell models. In these models, the fields of a turbulent system are represented by time-dependent collective variables (real or complex), which are understood as the field intensity measure in a given range of spatial scales. The model itself is a certain system of quadratically nonlinear ordinary differential equations for collective variables. Construction a new shell model requires rather complex analytical transformations. This is due to the fact that the system of model equations in the absence of dissipation must have some quadratic invariants and phase-space volume is unchanged. In addition, there are limitations associated with the impossibility of non-linear interaction of some scales ranges. All this imposes limitations on the coefficients of the nonlinear terms of the model. Constraints form a system of equations with parameters. The complexity of this system increases sharply for non-local models, when the interaction is described not only close ranges of scales and when complex collective variables are used. The paper proposes a computational technology that allows automating the process of building shell models. It makes it easy to combine different invariants and the measure of nonlocality. The technology is based on computer algebra methods. The process of constructing equations for unknown coefficients and their solution has been automated. As a result, parametric classes of cascade models are obtained that have the required analytical properties.

Key words: turbulence, shell models, computer algebra, automation of model development.

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic «Physical processes in the system of near space and geospheres under solar and lithospheric influences» (No. AAAA-A21-121011290003-0).

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-9-31

Original article submitted: 29.11.2022

Revision submitted: 06.12.2022

For citation. Vodinchar G. M., Feshchenko L. K., Podlesnyi N. V. Construction of complex shell models of turbulent systems by computer algebra methods. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, 41: 4, 9-31.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-9-31

Competing interests. The author declare that there is no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Vodinchar G. M., Feshchenko L. K., Podlesnyi N. V., 2022

References

- [1] Mingshun J., Shida L. Scaling behavior of velocity and temperature in a shell model for thermal convective turbulence, *Physical Review E*, 1997, 56, 441
- [2] Hattori Y., Rubinstein R., Ishizawa A. Shell model for rotating turbulence, *Physical Review E*, 2004, 70, 046311
- [3] Ching E. S. C., Guo H., Cheng W. C. Understanding the different scaling behavior in various shell models proposed for turbulent thermal convection, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2008, 237:4, 2009–2014
- [4] Frik P. G. Turbulentnost': podkhody i modeli [Turbulence: approaches and models], Moskva–Izhevsk, 2010, 332 (In Russian)
- [5] Ditlevsen P. Turbulence and Shell Models, Cambridge, University Press, 2011, 152.
- [6] Davenport J., Sire I., Tournier E. Komp'yuternaya algebra [Computer algebra], Moscov, Mir, 1991, 352 (In Russian)
- [7] Matrosov A. V. Maple 6. Resheniye zadach po vysshey matematike i mekhanike [Maple 6. Solving problems in higher mathematics and mechanics], St. Petersburg, BHV, 2001, 528 (In Russian)
- [8] Chichkarev E. A. Komp'yuternaya matematika s Maxima [Computer mathematics with Maxima], Moscov, ALT Linux, 2012, 384 (In Russian)
- [9] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Automated generation of turbulence shell models by computer algebra methods, *Computing technologies*, 2021, 26:5, 65–80. (In Russian)
- [10] Gledzer E. B., A system of hydrodynamic type that allows quadratic integral of motion, *DAN USSR*, 1973, 209:5, 1046–1048. (In Russian)
- [11] Yamada M., Ohkitani K. Lyapunov Spectrum of a Chaotic Model of Three-Dimensional Turbulence, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1987, 56, 4210.
- [12] Krause F., Rädler K.H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press: Oxford, 1980, 271.
- [13] L'vov V., Podivilov E., Pomlyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence, *Phys. Rev. E*, 1998, 58, 1811.
- [14] Ditlevsen P. Symmetries, invariants, and cascades in a shell model of turbulence, *Phys. Rev. E*, 2000, 62, 484.

- [15] Plunian F., Stepanov R. A non-local shell model of hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence, *New Journal of Physics*, 2007, 9, 294.
- [16] Plunian F., Stepanov R. A., Frick P. G. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence, *Physics Reports*, 2013, 523, 1–60.



Vodinchar Gleb Mikhailovich ✉ – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Acting Head of the Laboratory for Simulation of Physical Processes, IKIR FEB RAS, Associate Professor, Department of Control Systems, Kamchatka State Technical University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia,  ORCID 0000-0002-5516-1931.



Feshchenko Liubov Konstantinovna ✉ – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory for Modeling Physical Processes, IKIR FEB RAS, Russia,  ORCID 0000-0001-5970-7316.



Podlesny Nikita Viktorovich ✉ – Master student of the Department of Mathematics and Physics of the Kamchatka State University named after Vitus Bering, Russia,  ORCID 0000-0002-3213-5706.
