УДК 537.874, 519.6 Научная статья

Математическое моделирование распространения плоской электромагнитной волны в полосковом волноводе с неоднородной проводимостью границ

Д. А. Твёрдый, Е. И. Малкин, Р. И. Паровик

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул.Мирная, д. 7, Россия

E-mail: dimsolid95@gmail.com

В статье проводится математическое моделирование электромагнитной динамики атмосферика. Атмосферик – широкополосный сигнал с максимумом интенсивности в диапазоне частот 8-10 кГц, который распространяется в виде плоской электромагнитной волны в сложной структуре проводящего пространства волновода, образованного поверхностью Земли и ионосферой. Математическая модель процесса описывается краевой задачей для системы уравнений Максвелла. Краевые условия задачи определяют структуру волновода (Perfectly matched layer), параметры проводящего объёма, взаимодействие с неоднородностями в волноводе, временно возникающими (локальное изменение проводимости) или существующими постоянно (прибрежная линия океанов). Математическая модель решается численным методом Finite-Difference Time-domain. Для решения поставленной задачи разработан программный комплекс в среде MATLAB. В результате компьютерных симуляций показано что, наличие искажений основной электромагнитной волны вызвано взаимной интерференцией основной волны и отражённой волны от неоднородности. В результате, наблюдая за параметрами атмосферика возможно установить наличие неоднородности на трассе его распространения. Моделирование процесса взаимодействие электромагнитного излучения с неоднородностью в волноводе может установить связь между параметрами излучения и его неоднородностями.

Ключевые слова: атмосферик, вистлер, плоская ЭМ волна, неоднородность проводимости, PML, ABC, интерференция, уравнения Максвелла, FDTD, компьютерная симуляция, MATLAB

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-66-88

Поступила в редакцию: 03.12.2022 В окончательном варианте: 06.12.2022

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Малкин Е. И., Паровик Р. И. Математическое моделирование распространения плоской электромагнитной волны в полосковом волноводе с неоднородной проводимостью границ // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 41. № 4. С. 66-88. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-66-88

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Твёрдый Д. А., Малкин Е. И., Паровик Р. И., 2022

Финансирование. Исследования выполнены в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН по теме АААА-А21-121011290003-0

Введение

Электромагнитное излучение естественного происхождения генерируются в грозовых облаках в основном молниевыми разрядами. По данным WWLLN на земле возникает до 50 молний каждую секунду, при этом большая часть молниевых разрядов возникает в мировых грозовых очагах: Американском, Азиатском и Африканском. Это позволяет их рассматривать как постоянно действующие источники импульсного электромагнитного излучения (атмосфериков). Атмосферик, или свистящий атмосферик [1, 2, 3], является широкополосным сигналом с максимумом интенсивности в диапазоне 8-10 кГц. Также стоит отметить, что атмосферик распространяется не в свободном пространстве, а в сложной проводящей структуре волновода, образованного между поверхностью земли и объёмом ионизированной атмосферы (ионосферой).

При распространении атмосферика происходит неизбежное взаимодействие с неоднородностями в волноводе, временно возникающими (локальное изменение проводимости) или существующими постоянно (прибрежная линия океанов). Данные неоднородности обусловлены изменением проводимости стенок волновода в направлении распространения атмосферика. Поэтому наблюдая за параметрами атмосферика можно установить наличие неоднородности на трассе распространения. Моделирование процесса взаимодействия электромагнитного излучения с неоднородностями в волноводе позволяет установить связь между параметрами излучения и параметрами неоднородностей.

Система фундаментальных уравнений Максвелла

Отправной точкой во всех задачах математического моделирования ЭМИ зачастую будут уравнения электродинамики Максвелла в частных производных. Сформулированные более полутора века назад они до сих пор остаются крайне востребованными среди инженеров и учёных во всем мире, а нобелевский лауреат Ричард Фейнман назвал их самым выдающимся достижением науки 19 века.

Хотя и может показаться странным, что в 21-м веке тратится столько усилий на решение лучших уравнений 19-го века, в свою же очередь уравнения Максвелла являются фундаментально важными, так как представляют собой объединение электрических и магнитных полей, предсказывающее распространение электромагнитных волн.

Дифференциальная форма записи уравнений Максвелла, зависящих от времени в трёх измерениях, будет задаваться следующим образом:

Закон Ампера о циркуляции магнитного поля:

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} + \overrightarrow{j}, \tag{1}$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} - \overrightarrow{M}, \tag{2}$$

Закон Гаусса для электрического поля:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_e, \tag{3}$$

Закон Гаусса для магнитного поля:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = \rho_m. \tag{4}$$

причём компоненты в (1)-(4) имеют следующие физические интерпретации: $\overrightarrow{E}$ – вектор напряженности электрического поля в [вольт/метр]; $\overrightarrow{D}$ – вектор электрического смещения в [кулон/метр^2]; $\overrightarrow{H}$ – вектор напряженности магнитного поля в [ампер/метр]; $\overrightarrow{H}$ — вектор напряженности магнитного поля в [ампер/метр]; $\overrightarrow{B}$ – вектор плотности магнитного потока в [вебер/метр^2]; $\overrightarrow{J}$ — вектор плотности электрического тока в [ампер/метр^2]; $\overrightarrow{M}$ – вектор плотности магнитного тока в [вольт/метр^2]; ρ_e – плотность электрического заряда в [кулон/метр^3]; ρ_m – плотность магнитного заряда в [вебер/метр^2].

Такая форма [4, p.2] уравнений (1)-(4) необходима для описания поведения полей энергий во времени. А смысл их, согласно [5, p.202], в следующем:

- Уравнение (1): электрическое поле $\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$ (ток смещения) или/и электрический ток $\overrightarrow{J}$ (свободные и/или посторонние токи) генерируют магнитное $\overrightarrow{H}$ поле.

- Уравнение (2): магнитное поле $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ индуцирует электрическое $\overrightarrow{E}$ поле.

- Уравнение (3): Неподвижный источник (электрический заряд ρ_e , т.е. электроны и т.д.) создаёт электрическое поле $\overrightarrow{D}$. Обычно плотность электрического потока $\rho_e \neq 0$, выходящего из объёма, пропорциональна электрическому заряду внутри объёма [5, p.211].

- Уравнение (4): стационарных источников плотности магнитного потока нет. Поэтому обычно $\rho_m = 0$, т.е. полный магнитный поток через замкнутую поверхность равен 0, подтверждая отсутствие магнитных монополей [5, p.211].

Следующие определяющие соотношения необходимы для дополнения уравнений Максвелла характеристиками материальных сред, и для линейных, изотропных и недисперсионных материалов их можно записать так:

$$\overrightarrow{D} = \varepsilon \overrightarrow{E}, \qquad \overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H}, \tag{5}$$

где ε – диэлектрическая проницаемость [фарад/метр], μ — магнитная проницаемость материала [генри/метр]. В свободном пространстве:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}, \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}. \tag{6}$$

Методика решения

До 1960-х годов моделирование ЭМ – явлений в основном осуществлялось с помощью методов решения синусоидальных стационарных уравнений Максвелла, а именно аналитических решений в замкнутой форме и бесконечный рядов. В 1970-х и 1980-х годах начались исследованиям нового альтернативного подхода: прямых решений во временной области дифференциальных (роторных) уравнений Максвелла на пространственных сетках или решётках. Метод FDTD (Finite-Difference Time-Domain) или Алгоритм Йи, представленный [6], был первым методом в этом классе и оставался предметом постоянного развития.

В общем, FDTD и связанные с ним методы – это синхронизируемые процедуры, которые имитируют непрерывные реальные ЭМ волны в конечной-пространственной области с помощью числовых аналогов дискретных данных, распространяющихся во времени в пространстве компьютерных данных.

Замечание 1. То что дифференциальные уравнения Максвелла (1)–(4) на самом деле являются гиперболическими уравнениями в частных производных, является основой всего метода FDTD. Таким образом у него есть решения, которые ведут себя как волны, а возмущения распространяются с конечной скоростью.

Далее, нам нужно учитывать только уравнения ротора (1)-(2) при выводе уравнений FDTD, потому что уравнениям дивергенции (3)-(4) могут удовлетворять разработанные уравнения обновления FDTD [7, p.60], они неявно входят в уравнения обновления FDTD, что наглядно видно на рисунке в [7, p.59], для положения компонент полей $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ относительно элементарной 3-D ячейки пространственной решетки Йи, для случая 3-х мерной задачи.

Плотность электрического тока $\overrightarrow{J}$ из (1) является суммой плотности тока проводимости $\overrightarrow{J}_c = \sigma^e \overrightarrow{E}$ и плотности приложенного тока $\overrightarrow{J}_i$ при $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{J}_c + \overrightarrow{J}_i$. Аналогично в (2), для плотности магнитного тока $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_c + \overrightarrow{M}_i$, где $\overrightarrow{M}_c = \sigma^m \overrightarrow{H}$: σ^e – электропроводность в [сименс/метр]; σ^m – магнитная проводимость в [ом/метр].

Разложив плотности тока в (1)-(4) на составляющие и используя определяющие соотношения (5), мы можем переписать уравнения ротора Максвелла в виде:

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \sigma^e \overrightarrow{E} + \overrightarrow{J}_i, \nabla \times \overrightarrow{H} = \varepsilon \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \sigma^e \overrightarrow{E} + \overrightarrow{J}_i, \tag{7}$$

Эта формулировка рассматривает только электромагнитные поля $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$, а не потоки $\overrightarrow{D}$ и $\overrightarrow{B}$. Присутствуют все четыре определяющих параметра ε, μ, σ^e и σ^m, так что можно указать любой линейный изотропный материал [4, p.3].

Каждое из двух векторных уравнений системы (7) можно разложить на три скалярных уравнения для трехмерного пространства. Следовательно, уравнения ротора Максвелла могут быть представлены следующими шестью скалярными

уравнениями в декартовой системе координат (x, y, z):

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_x}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x^e E_x - J_{ix}\right], \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_y}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y^e E_y - J_{iy}\right],$$
$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_z}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z^e E_z - J_{iz}\right], \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x}\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_x^m H_x - M_{ix}\right],$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_y^m H_y - M_{iy}\right], \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_z}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_z^m H_z - M_{iz}\right]. \quad (8)$$

Материальные параметры ε_x, ε_y и ε_z связаны с компонентами электрического поля E_x, E_y и E_z определяющими соотношениями $D_x = \varepsilon_x E_x$, $D_y = \varepsilon_y E_y$ и $D_z = \varepsilon_z E_z$, соответственно. Аналогично параметры μ_x, μ_y и μ_z связаны с компонентами магнитного поля H_x, H_y и H_z определяющими соотношениями $B_x = \mu_x H_x$, $B_y = \mu_y H_y$ и $B_z = \mu_z H_z$, соответственно. Возможны разложения в других ортогональных системах координат, но они менее интересны для приложений.

В 2-мерном случае геометрия задачи и распределения полей в одном измерении не изменяется, и пусть это будет ось y. Тогда представляют интерес движение $\overrightarrow{E}$ – и $\overrightarrow{H}$ – компонент вдоль осей x и z. Для этого в уравнениях (8) положим производную: $\partial y = 0$. И для нашей задачи в 2-мерном случае уравнения примут вид:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_x}\left[-\frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x^e E_x - J_{ix}\right], \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_y}\left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y^e E_y - J_{iy}\right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_z}\left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \sigma_z^e E_z - J_{iz}\right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x}\left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \sigma_x^m H_x - M_{ix}\right], \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_y^m H_y - M_{iy}\right], \quad (13)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_z}\left[-\frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_z^m H_z - M_{iz}\right]. \quad (14)$$

Заметим, что шесть уравнений (9)-(14) можно рассматривать как две отдельные системы уравнений. Большинство двумерных задач можно разложить на две отдельные задачи, каждая из которых включает отдельные компоненты поля.

Замечание 1. Уравнения (9),(11) и (13) зависят только от слагаемых E_z, E_x и H_y, все 2 компоненты $\overrightarrow{E}$ поперечны отсчётному y; следовательно, эта система уравнений (9),(11) и 13 образует собой случай поперечно-электрической к y – TE_y (Transverse Electric y) моды.

Замечание 2. В тоже время уравнения (10), (12) и (14) зависят только от членов H_z, H_x и E_y, где в свою очередь все две компоненты $\overrightarrow{H}$ поперечны отсчетному y;

следовательно, система оставшихся уравнений (10),12 и (14) представляет уже: поперечно-магнитную к y – TM_y (Transverse Magnetic y) моду.

Эти две задачи могут быть решены раздельно, а решение основной задачи может быть получено как сумма двух решений.

Заметим, что аналогично «отсекать» в 2-мерном случае можно производные по x и z, причем случай TE_z и TM_z считается классическим, и выводы уравнений для этих мод представлены например в [4, p.23],[7, 54] и [8, p.637].

Аналогично задача упрощается и до 1-мерного случая, взяв уже по две производные равными 0. Подобно двумерному случаю и классическим расположениям на TE и TM моды, одномерный случай также может быть разложен на отдельные случаи, см. [4, p.27] и [7, p.56].

Метод FDTD

Leapgrog принцип алгоритма Йи

Алгоритм FDTD делит геометрию задачи на пространственную сетку, в которой компоненты $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ полей размещаются в определенных дискретных положениях в пространстве, и решает уравнения Максвелла во времени в дискретные моменты времени. Использование информации как о $\overrightarrow{E}$, так и $\overrightarrow{H}$ полях делает решение более надежным, чем при использовании только одного из них. Это можно реализовать, сначала аппроксимировав производные по времени и пространству, входящие в уравнения Максвелла, конечными разностями, а затем построив набор уравнений, которые вычисляют значения полей в момент времени в будущем на основе значений полей в момент времени в прошлом. Именно так построен алгоритм Йи (схема FDTD), который имитирует изменение полей во времени [6].

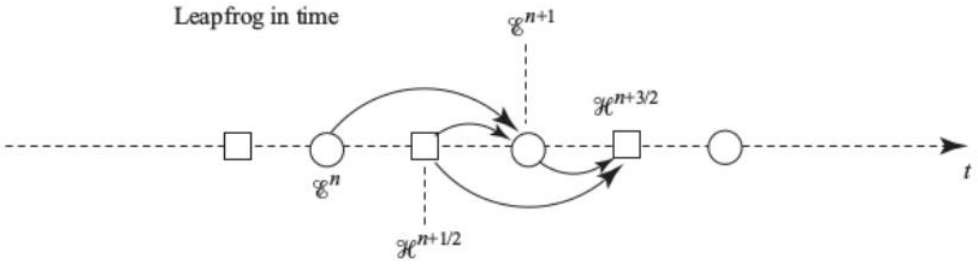

Рис. 1. Концепция процедуры Leapfrog для шага по времени
[Figure 1. Concept of the Leapfrog procedure for the time step]

Как показано на рис. 1, алгоритм Йи также центрирует свои компоненты $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ во времени, что называется leapfrog (иначе "шахматной") схемой.

Количество повторений ячейки Йи вдоль Oz, задаётся как n_z соответственно, что задаёт область моделирования. То есть, $n_z = \frac{l_z}{\Delta z}$, где l_z – длина области моделирования вдоль Oz, что в общем случае верно и для Ox и Oy.

Также, алгоритм Йи центрирует свои компоненты $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ в пространстве так, что каждый компонент $\overrightarrow{H}$ окружен четырьмя циркулирующими компонентами $\overrightarrow{E}$, как будет показано на рисунке (3) далее. Такое расположение компонентов на решетке Йи и различные по центру операции над ними, неявно обеспечивают выполнение двух соотношений закона Гаусса (3) и (4) согласно [7, p.60], как уже упоминалось ранее. Таким образом, сетка Йи является бездивергентной по своим полям $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ в отсутствие свободных электрических и магнитных зарядов.

Численная устойчивость 2D FDTD

Что касается численной устойчивости, то конечно-разностные выражения для производных по пространству, используемые в операторах ротора, различны по своей природе и обладают точностью второго порядка. Концепция устойчивости FDTD проиллюстрирована в [4, p.27] с помощью простого дифференциального уравнения в частных производных (PDE) в пространственно-временной области, также обсуждается условие Куранта-Фридрихса-Леви (CFL) [9].

Выбор периода дискретизации (Δt по времени, Δx, Δy и Δz по пространству) должен соответствовать определенным ограничениям, гарантирующим устойчивость решения. А выбор этих параметров определяет точность решения.

Численная устойчивость метода FDTD определяется условием CFL, которое требует, чтобы приращение времени Δt имело определенную границу относительно приращений $\Delta(x, y, z)$ пространства решетки, так что:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}, \tag{15}$$

где $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ [meter/second] – скорость света в свободном пространстве, и связана с физическими параметрами среды (6). Для нашей 2-мерной задачи (15), если $\Delta x \neq \Delta z$ условие CFL можно переписать как:

$$\Delta t \leq \frac{\min(\Delta x, \Delta z)}{c\sqrt{2}} = CF\frac{\min(\Delta x, \Delta z)}{c}, \tag{16}$$

где $CF = 1/\sqrt{2}$ – критерий устойчивости Куранта.

Замечание 3. Алгоритм с шагом по времени является недиссипативным, т. е. числовые моды волн, распространяющиеся в сетке, не затухают ложно из-за нефизического артефакта шага по времени в алгоритме.

Даже при численной устойчивости решения, выполнение CFL не гарантирует численной точности, а лишь обеспечивает взаимосвязь между размером Δ ячеек и шагом времени Δt. Необходимо удовлетворять требованиям теории дискретизации в отношении самой высокой частоты, присутствующей в функции источника.

Замечание 4. Таким требованием является: на длину волны самой высокой частоты, должно приходиться хотя бы 20 ячеек по пространству.

Требования к источнику сигналов

Выделить длину волны самой высокой частоты, можно при построении исходного сигнала. После чего скорректировать можно будет скорректировать источник сигнала. Одним из методов, является разложение на спектр частотных компонентов сигнала. Временной сигнал – это сумма гармонических во времени сигналов со спектром частот, которые получаются преобразованием Фурье [10].

Преобразование Фурье непрерывной функции от времени имеет вид:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \tag{17}$$

Форма волны сигнала должна быть выбрана таким образом, чтобы частотный спектр сигнала включал все частоты, представляющие интерес для моделирования, а источник должен иметь плавное включение и выключение, чтобы свести к минимуму нежелательные эффекты высокочастотных компонентов. Функция синуса или косинуса представляет собой одно частотный сигнал. Это представлено на рисунке 2, и со временем переходная характеристика из-за включения источников затухает, и источник генерирует только синусоидальный сигнал, заданной частоты.

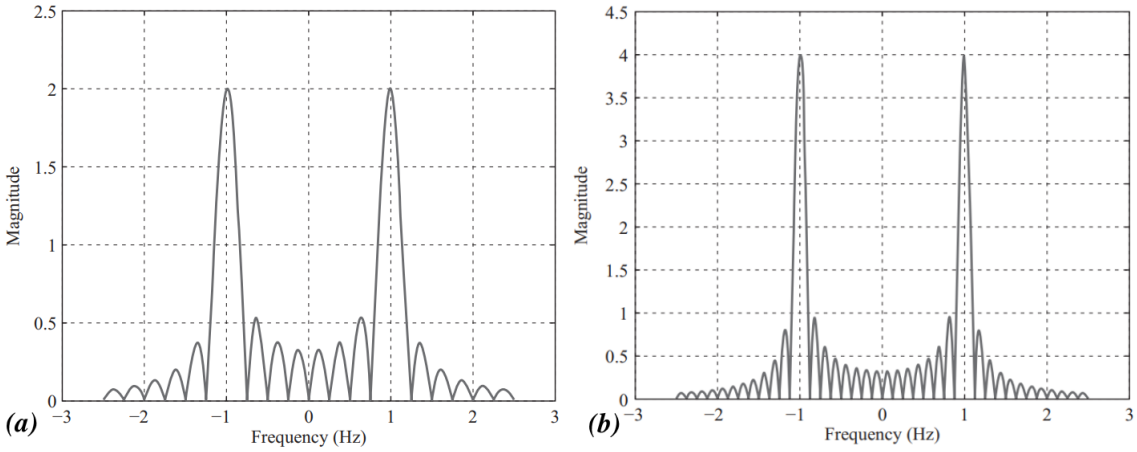

Рис. 2. Величина $X(\omega)$. Синусоидальный источник возбуждаемый в течении: (a) 4 секунд; (b) 8 секунд

[Figure 2. Sinusoidal source excited for: (a) 4 seconds; (b) 8 seconds]

Тогда функцию источника для нашей задачи определим как:

$$S(t) = \sin(2\pi F t), \tag{18}$$

где $t \in [0, T]$ – текущее время, T – время симуляции, F [Гц] – частота.

Величина преобразования Фурье (17) для сигнала (18) представлена функцией на рисунке 2(a) и охватывает весь диапазон частот, достигая максимума при частоте 1 Гц, что соответствует частотному спектру сигнала конечной синусоидальной функции. Если симуляция выполняется дольше, то преобразование Фурье сигнала становится более выраженным на частоте 1 Гц, как показано на рисунке 2(b).

Это можно наглядно увидеть на рисунках 6–8, стоп-кадрах анимации распространения ЭМ волны в ходе симуляции. Где по фронту движения волны видно переходную характеристику сигнала из-за включения источников, как ярко выраженную ударную волну.

Этим и обусловлен выбор источника как гармонического. А также тем, что синусоидальный сигнал даст более наглядную картину влияния неоднородности проводимости стенки волновода на магнитуду сигнала (параметры атмосферика) и в каком масштабе это происходит. И наблюдая за моделируемой ЭМ волной, можно по существованию или отклонению характерных искажений основной ЭМ волны, определить существование или отклонение интересующих нас характеристик объекта в пространстве моделирования.

Алгоритм дискретизации схемы FDTD

Приращениями решетки берутся Δx, Δz в направлениях координат x,z, соответственно, а i, k являются целыми числами, обозначающими номер ячейки в пространстве. Далее мы обозначаем любую функцию u пространства и времени, оцениваемую в дискретной точке сетки и в дискретный момент времени, как:

$$u(i\Delta x, k\Delta z, n\Delta t) = u^n_{i,k}, \tag{19}$$

где Δt – равномерное приращение времени, n — целое число.

Индексы (i,k) – это размерность матриц, определяющих значения свойств физической среды и компонентов полей E и H в пространстве 2-мерной задачи.

Вычисленные поля E и H сдвинуты на шаг по пространству и времени относительно друг друга, однако это необходимо для иллюстрации идеи leapfrog из рисунка 1, но на практике в программной реализации «полушаги», с сохранением логики будут отражены в целочисленном виде. Йи [6], использовал выражения центральной разности для пространственных и временных производных, которые одновременно просто запрограммированы и обладают точностью второго порядка.

Для удобства интерпретации результатов моделирования с точки зрения исходной постановки задачи, далее будем выводить схемы FDTD в TE_y постановке.

Схема FDTD – дискретизация уравнений (9),(11) и (13) на случай TE_y. Получаемые применением формул центральной разности к уравнениям, на основе положений полей, показанных на рисунке (3), получаемых путем проецирования ячеек Йи как на рис. 1.5 из [4, p.12] на Ozx в направлении y.

Более подробно с выводом формул и составлением схем FDTD на 3- и 1- мерные случаи, необходимостью замены компонент полу-неявными приближениями, а также для случая ориентации 2-мерной задачи на классический вариант TE_z и TM_z – моды, можно ознакомится в [4, p.13–29], а так же в книге [7, p.62-74], одного из самых влиятельных авторов в вопросах вычислительной электромагнетики.

И пред тем как представим конечный вариант формул, определяющих схему FDTD. Необходимо рассмотреть следующий важный вопрос.

Проблема граничных условий

Необходимость граничных условий возникает, как минимум из-за особенности численной схемы: т. к. пространство для хранения вычислений конечно, то и размер пространства задачи для моделирования тоже должен быть конечен и быть усечён специальными граничными условиями. Кроме того, что структура ячейки алгоритма Йи неизбежно приводит к проблеме с вычислением точек на краю сетки.

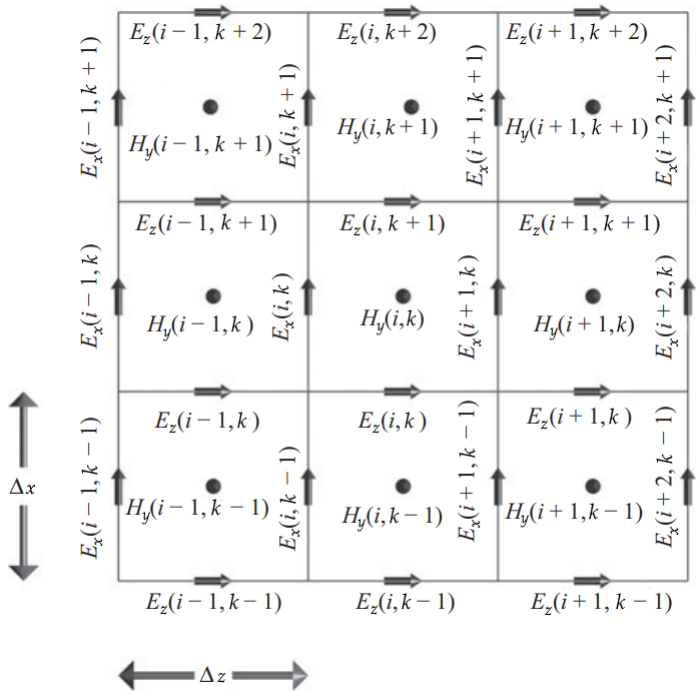

Рис. 3. Двумерная FDTD схема – положения компонент E_z, E_x и H_y
[Figure 3. 2D FDTD scheme – Positions of E_z, E_x, and H_y Components]

Например, для TE_y из рис. 3 видно, что вычисление компонент E_z и E_x зависит от значений H_y по обе стороны от E_z и E_x, соответственно. Однако, нет таких E_z и E_x – компонент в самых внешних ячейках, где были бы оба H_y. Это проблема, которая, очевидно, не решается добавлением дополнительного ряда ячеек в проблемную позицию.

Есть несколько решений этой проблемы, а метод FDTD даёт возможность решать открытые задачи в вычислительно–ограниченных областях, используя подходящие условия усечения.

Наиболее простой подход, в том чтобы использовать граничные условия Дирихле (в частности, с граничным значением равным 0) и никогда не обновлять самые внешние ячейки электрического (для TE_y) поля. Это создаёт новую проблему. Граничные точки теперь всегда имеют значение поля $E = 0$ и действуют как идеальный электрический проводник PEC (Perfect Electric Conductor) [11], и полностью отражают падающие волны, как непроницаемая стена. Это нежелательно,

т.к. по условию задачи предполагается, что большая часть границы расчётной области имитирует расширение в бесконечность.

Однако существуют условия усечения расчетной сетки, называемые поглощающими граничными условиями ABC (Absorbed Boundary Condition) из-за их требования поглощать распространяющиеся наружу числовые моды с незначительным отражением. ABC имитируют границу, которая в идеале является прозрачной (нулевой коэффициент отражения) независимо от частоты, поляризации и угла падения. Исследования в этой области с 1970 года [8, p.655] привели к двум основным категориям ABC для моделирования FDTD:

- внедрение PML поглощающих сред, примыкающих к внешним плоскостям пространственной решетки (по аналогии с обработкой стенок безэховой камеры), например [12]. ABC этого типа имеют отличные возможности для усечения решеток FDTD в свободном пространстве, в материалах с потерями или дисперсией, а также в металлических или диэлектрических волноводах. Чрезвычайно малые численные коэффициенты отражения волн порядка 10^{-4} и 10^{-6} могут быть достигнуты с приемлемой вычислительной нагрузкой;

- специальные аналитические граничные условия, накладываемые на электромагнитное поле на крайних плоскостях пространственной решетки. Эта категория была рассмотрена [7].

PML – идеально согласованный слой

Для моделирования условий нашей задачи подойдёт граничное условие PML [12, 13], а его высокая надежность как ABC была доказана в [13, 14, 15, 16], по сравнению с другими методами. PML – специальная среда конечной толщины, окружающую вычислительное пространство, основанную на ложных определяющих параметрах для создания условия согласования волновых импедансов (σ), не зависящего от углов и частот падения волны на эту границу, подробнее в [7, p.273]. Т.е. заданы определенные проводимости, так что исходящие волны проникают без отражения в PML и затухают при движении в среде PML.

В [4, p.185] приводится анализ отражения на границе раздела «вакуум–PML» в 2-мерном случае, в статье мы приведём лишь необходимую теорию PML.

Замечание 6. Заметим, что внешние границы PML заканчиваются стенками PEC. А значит, что если плоская волна проходящая через PML конечной толщины не полностью затухнет, то могут возникать небольшие отражения от задней стенки PEC. Эти малые отражения двигаясь от PEC через PML и далее, никак уже не будут затухать, и могут на результаты моделирования. Это нам и нужно.

Но значительные отражения наблюдались при задании постоянного однородного сопротивления по всей толщине PML [12], из-за дискретной аппроксимации полей и параметров материала на границах «расчетная область – PML» и резким изменением профилей проводимости, подобных стене создаваемой PEC.

Замечание 7. Эта проблема несоответствия может быть смягчена с помощью пространственно постепенно увеличивающегося распределения проводимости. Которое равно нулю на границе раздела «расчетная область – PML» и имеет тенденцию к максимальной проводимости σ_{max} в конце области PML.

В [13] вычисления распределений проводимости, называемые $\sigma(\rho)$ – или профилями проводимости, основаны на двух основных типах математических возрастающих функций. Воспользуемся функцией степенного увеличения:

$$\sigma(\rho) = \sigma_{max}\left(\frac{\overrightarrow{\rho}}{N}\right)^{n_{pml}}, \tag{20}$$

где $\overrightarrow{\rho}$ – профиль потерь; N – количество ячеек PML; n_{pml} – полиномиальный порядок оценки $\sigma(\rho)$, а её функция линейная при $n_{pml} = 1$, и параболическая при $n_{pml} = 2$.

$$\sigma_{max} = -\frac{(n_{pml}+1)\varepsilon_0 c \ln(R(0))}{2\Delta s N}, \tag{21}$$

где Δs – размер ячейки, используемый для ячейки PML; $R(0)$ – коэффициент отражения среды PML конечной ширины при нормальном падении.

Для вычисления $\sigma(\rho)$ профиля с помощью (20) параметры $R(0)$ и n_{pml} должны быть предварительно определены. Обычно n_{pml} принимает такие значения, как 2, 3 или 4, а $R(0)$ принимает очень малые значения, например $R(0) = 1e^{-8}$, для удовлетворительной производительности PML.

О моделировании распространения ЕМ волны внутри PML

Для области PML классически рассматривают параметры $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, т.е. PML является анизотропной средой.

Для упрощения отбросим поля независимых источников энергии, т.е.: $\overrightarrow{J}_{source} = 0$ и $\overrightarrow{M}_{source} = 0$, т.к. в нашей задаче источники будут определятся в соответствующих компонентах поля, например: $H_y(is) = SF(n)$, где is – индексы области возбуждения (источника), SF – функция источника, принимающая значение в момент времени n.

Тогда скалярные уравнения Максвела (9),(11) и (13) для TE_z – моды (поляризованной волны), примут вид:

$$\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma^e E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma^e E_x = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \tag{23}$$

$$\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^m H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}. \tag{24}$$

параметры физической среды ε – диэлектрической проницаемости, μ – магнитной проницаемости, σ^e – электропроводности и σ^m – магнитной проводимости материала, задаются для каждого из направлений (x, y, z) в пространстве, отдельно.

В TE_y PML пространстве компоненту H_y можно разбить на две искусственные $H_y = H_{yz} + H_{yx}$, связанные с направлениями z и x. Тогда, модифицированные уравнения для TE_y – поляризованной среды PML могут быть выражены как:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_{pex} E_z = \frac{\partial (H_{yz} + H_{yx})}{\partial x}, \tag{25}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_{pez} E_x = -\frac{\partial (H_{yz} + H_{yx})}{\partial z}, \tag{26}$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_{pmz} H_{yz} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{27}$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_{pmx} H_{yx} = \frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{28}$$

где σ_{pex}, σ_{pez}, σ_{pmz}, σ_{pmx} – введённые фиктивные проводимости, при которых среда PML описываемая (25)–(28), является анизотропной средой. Когда $\sigma_{pmz} = \sigma_{pmx} = \sigma^m$, объединение (27) и (28) даёт (24).

Компоненты поля E_x и H_{yz} вместе могут представлять волну, распространяющуюся в направлении z, а компоненты поля E_z и H_{yx} представляют волну, распространяющуюся в направлении x.

Из анализа коэффициента отражения на границе «вакуум–PML» важно отметить, что в [4, p.186] величина полного магнитного поля H_z определяется как:

$$H_0 = H_{yz0} + H_{yx0} = E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} G. \tag{29}$$

Тогда волновое сопротивление в среде PML для TE_y – моды можно выразить как:

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{G}. \tag{30}$$

Если параметры проводимости выбраны так, что:

$$\frac{\sigma_{pez}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{pmz}}{\mu_0}, \qquad \frac{\sigma_{pex}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{pmx}}{\mu_0}, \tag{31}$$

тогда член G становится равным единице. Поэтому волновое сопротивление этой среды PML становится таким же, как и внутреннего свободного пространства. Другими словами, при выполнении определяющих условий (31) волна поляризованная как TE_y может распространяться из свободного пространства в среду PML без отражения для всех частот и всех углов падения.

Замечание 8. Заметим, что, когда электрические: $\sigma_{pex} = \sigma_{pez} = \sigma^e = 0$ и магнитные потери: $\sigma_{pmz} = \sigma_{pmx} = \sigma^m = 0$, уравнения обновления компонент полей (25)–(28) для области PML становится уравнениями для вакуумной (свободное пространство) области, и тогда PML перестаёт работать.

В методе FDTD применимо к нашей задаче, к заданному моделируемому двумерному пространству распространения волны, должны «прилегать» среды PML некой конечной но необходимой и достаточной толщины, как показано на рисунке

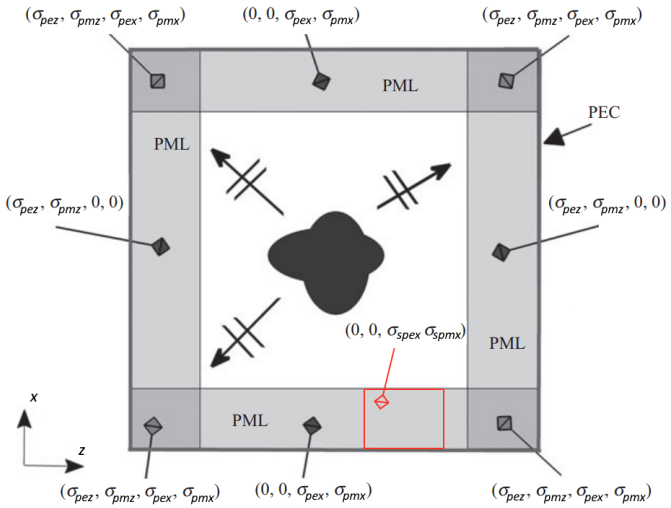

Рис. 4. Карта распределений проводимости $\sigma(\rho)$ в двумерных областях PML
[Figure 4. Map of conductivity distributions $\sigma(\rho)$ in 2D PML domains]

4. Тогда исходящие из «расчетной области» волны будут поглощаться без каких-либо нежелательных отражений.

Значения электрических проводимостей σ_{pex} и σ_{pez} в области PML, вычисляются согласно (21) и (20), а для значения магнитных проводимостей можно получить из отношения (31):

$$\sigma_{pmz} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\sigma_{pez}, \qquad \sigma_{pmx} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\sigma_{pex}. \tag{32}$$

Модификация уравнений для учета PML

Имея в виду, что для среды PML важны лишь значения σ_e и σ_m проводимостей, т.е. PML в отношении проницаемостей ε и μ – свободное пространство, получим, что в случае нашей постановки задачи, уравнения (25) – (28) *можно использовать для всей области моделирования*, как PML, так и внутренней «расчетной области» пространства, тогда уравнения для TE_y – моды примут вид:

$$\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_{pex}E_z = \frac{\partial\,(H_{yz}+H_{yx})}{\partial x}, \tag{33}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_{pez}E_x = -\frac{\partial\,(H_{yz}+H_{yx})}{\partial z}, \tag{34}$$

$$\mu\frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_{pmz}H_{yz} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \tag{35}$$

$$\mu\frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_{pmx}H_{yx} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{36}$$

где $\varepsilon = \varepsilon\cdot\varepsilon_0$, $\mu = \mu\cdot\mu_0$, $\sigma_{pex} = \sigma_{pez} = \sigma_{pmz} = \sigma_{pmx} = 0$ для абсолютно всей области, а условие PML вводится переопределением значений σ_e и σ_m в соответствующих областях, указанных красным на рисунке 4.

Замечание 9. Заметим, что для внутренней области мы можем определять характеристики как угодно, размещая например там объекты т. е. определять ε, μ и σ по определённому шаблону, а уравнения (33)–(36) корректно просчитают их вклад в распространение сигнала в этой области.

Численная схема FDTD для TE_y – моды, с учетом PML

Компонента $E_z^{n+1}(i,k)$:

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i,k) = \quad & C_{eze}(i,k) \times E_z^n(i,k) + \\ & C_{ezhy}(i,k) \times \Big(H_{yz}^{n+1/2}(i,k) - H_{yz}^{n+1/2}(i,k-1) \\ & \qquad + H_{yx}^{n+1/2}(i,k) - H_{yx}^{n+1/2}(i,k-1) \Big), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$C_{eze}(i,k) = \frac{2\varepsilon_z - \Delta t \sigma_{pex}(i,k)}{2\varepsilon_z + \Delta t \sigma_{pex}(i,k)}, \quad C_{ezhy}(i,k) = \frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_z + \Delta t \sigma_{pex}(i,k))\,\Delta x}. \tag{38}$$

Компонента $E_x^{n+1}(i,k)$:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i,k) = \quad & C_{exe}(i,k) \times E_x^n(i,k) + \\ & C_{exhy}(i,k) \times \Big(H_{yz}^{n+1/2}(i,k) - H_{yz}^{n+1/2}(i-1,k) \\ & \qquad + H_{yx}^{n+1/2}(i,k) - H_{yx}^{n+1/2}(i-1,k) \Big), \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$C_{exe}(i,k) = \frac{2\varepsilon_x - \Delta t \sigma_{pez}(i,k)}{2\varepsilon_x + \Delta t \sigma_{pez}(i,k)}, \quad C_{exhy}(i,k) = -\frac{2\Delta t}{(2\varepsilon_x + \Delta t \sigma_{pez}(i,k))\,\Delta z}. \tag{40}$$

Компонента $H_{yz}^{n+1/2}(i,k)$:

$$\begin{aligned} H_{yz}^{n+1/2}(i,k) = \quad & C_{hyzh}(i,k) \times H_{yz}^{n-1/2}(i,k) + \\ & C_{hyzex}(i,k) \times (E_x^n(i+1,k) - E_x^n(i,k)), \end{aligned} \tag{41}$$

где

$$C_{hyzh}(i,k) = \frac{2\mu_y - \Delta t \sigma_{pmz}(i,k)}{2\mu_y + \Delta t \sigma_{pmz}(i,k)}, \quad C_{hyzex}(i,k) = -\frac{2\Delta t}{(2\mu_y + \Delta t \sigma_{pmz}(i,k))\,\Delta z}. \tag{42}$$

Компонента $H_{yx}^{n+1/2}(i,k)$:

$$\begin{aligned} H_{yx}^{n+1/2}(i,k) = \quad & C_{hyxh}(i,k) \times H_{yx}^{n-1/2}(i,k) + \\ & C_{hyxez}(i,k) \times (E_z^n(i,k+1) - E_z^n(i,k)), \end{aligned} \tag{43}$$

где

$$C_{hyxh}(i,k) = \frac{2\mu_y - \Delta t \sigma_{pmx}(i,k)}{2\mu_y + \Delta t \sigma_{pmx}(i,k)}, \quad C_{hyxez}(i,k) = \frac{2\Delta t}{(2\mu_y + \Delta t \sigma_{pmx}(i,k))\,\Delta x}. \tag{44}$$

Компьютерная симуляция распространения атмосферика

Для решения поставленной задачи разработана программа в среде MATLAB, реализующая описанный выше численный метод и визуализирующая результат.

Параметры модели представлены на рис. 5, где $nz = 1200$ [pt] – количество ячеек вдоль Oz длины Δz; количество $nx = 300$ [pt] – ячеек вдоль Ox длины Δx; Шаг $\Delta z = \Delta x = 1e^3$ [meters] – дискретизация по пространству; $\Delta t = 2.357e^{-6}$ [second] – шаг дискретизации по времени; $n_pml = 50$ [pt] – длина PML вдоль по направлениям; $n_pml_xn_s = 60$ – ширина неоднородности PML, в области с индексами $\{nz*(0.55) : nz*(0.6)\}$ [pt] вдоль Oz.

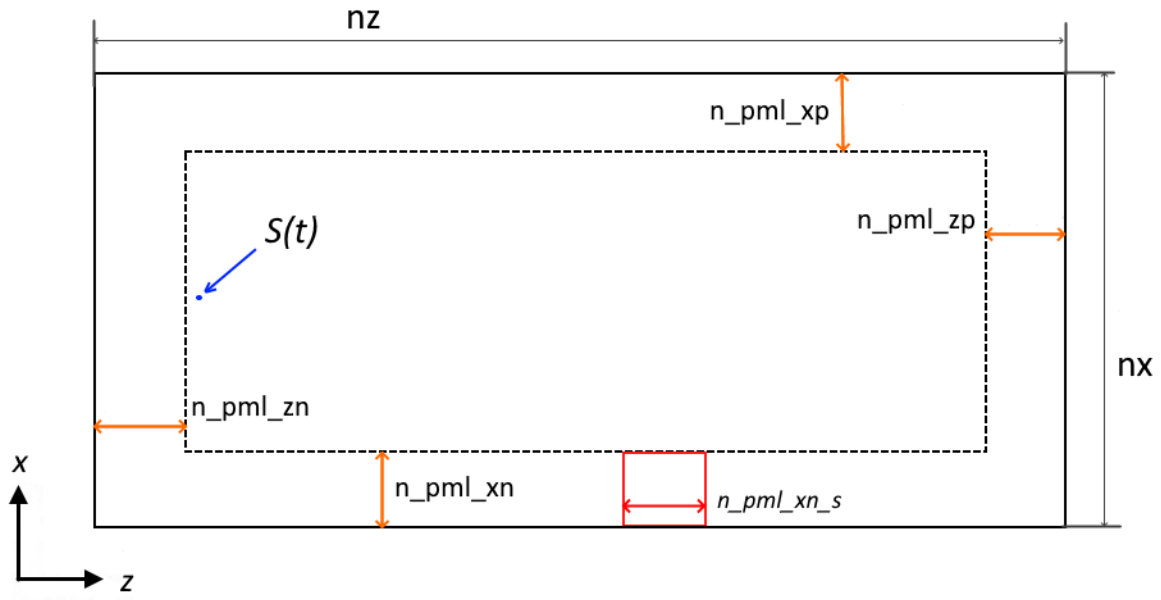

Рис. 5. Параметры как структура области моделирования
[Figure 5. Parameters as a Structure of the Modeling Domain]

Источник (18) задан конечной функцией: $S(t) = \sin(2\pi Ft)$, где $t \in [0, T]$ – текущее время симуляции; $T = 2000$ – время симуляции; $F = 8e^3$ [Hz] – частота.

При таких параметрах длина волны, наблюдаемой в симуляции, должна составлять $WL = \frac{c}{F} = \frac{3e^8}{8e^3} = 37000$ [meters], где $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ [meters/second] – скорость света в свободном пространстве. Значение длины волны в количестве ячеек $WL = 37.5$ [pt], при длине $\Delta z = 1e^3$, что соответствует требованию о минимальном количестве ячеек 20 для корректного отражения волны заданной частоты.

Результаты моделирования ЭМ в плоском волноводе приведены на рис. 6-8.

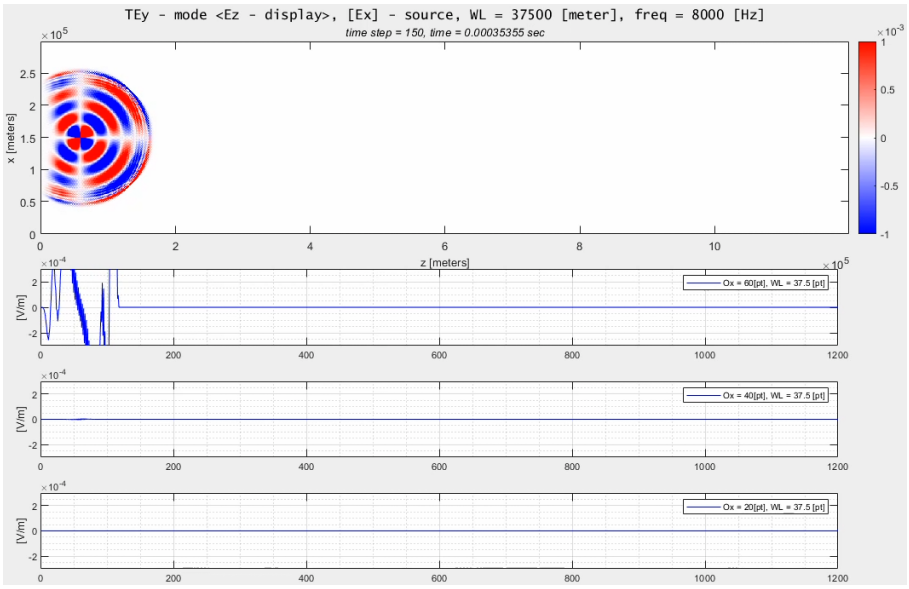

Рис. 6. Снимок компьютерной ЭМ симуляции. Срез № 1 вдоль Oz, на высоте 60 [pt] вдоль Ox от границы, значение поля E_z [Вольт/метр]. Переходная характеристика сигнала по фронту волны, на срезе № 1 и главном окне программы
[Figure 6. A snapshot of a computer EM simulation. Slice №1 along Oz, at a height of 60 [pt] along Ox from the boundary, field value E_z [Volt/meter]. Transient response of the signal along the wave front, on slice No. 1 and the main window of the program]

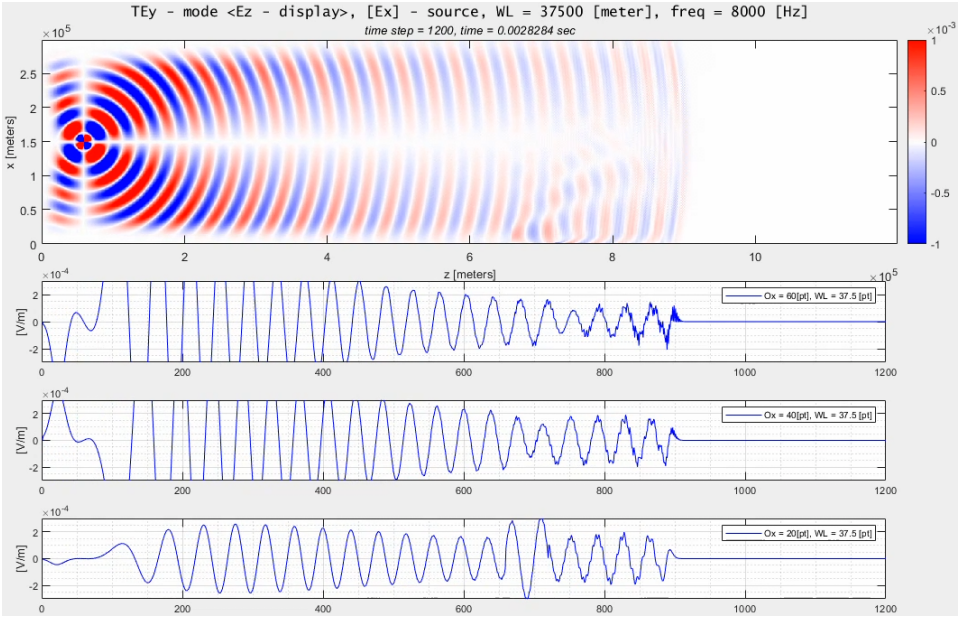

Рис. 7. На расстоянии 660 [pt] вдоль Oz начало области неоднородности. Далее на 660 > [pt] интерференция основной ЭМ волны и отражённой
[Figure 7. At a distance of 660 [pt] along Oz the beginning of the inhomogeneity region. Further 660 > [pt] interference of the main EM wave and the reflected]

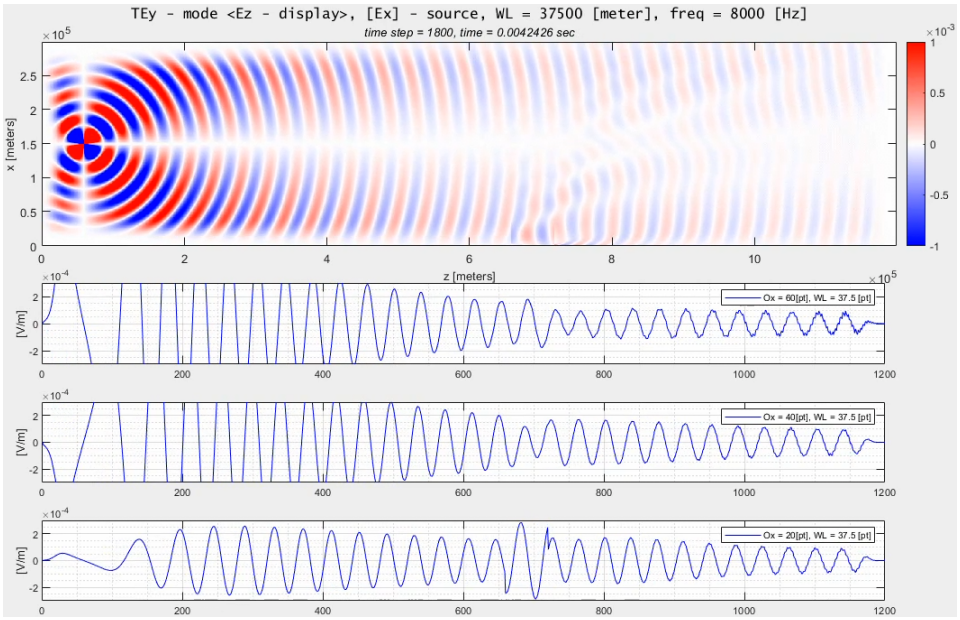

Рис. 8. Визуальная модель интерференции основной ЭМ волны и отраженной от неоднородности. Не желательная переходная характеристика сигнала полностью прошла исследуемую область неоднородности

[Figure 8. Visual model of the interference of the main EM wave and the wave reflected from the inhomogeneity. The undesirable transient response of the signal completely passed the region of inhomogeneity under study]

Заключение

С помощью математического моделирования и компьютерных симуляций распространения атмосферика в свободном пространстве, показано, что наличие характерных искажений основной ЭМ волны, может быть следствием взаимной интерференции основной ЭМ волны и отражённой. А отражение происходит от стенки волновода с неоднородностью. И тем подтверждая её существование.

Из результатов можно сделать вывод, что наблюдая за параметрами атмосферика действительно возможно установить наличие неоднородности на трассе распространения. А моделирование процесса взаимодействия ЭМИ с неоднородностью в волноводе, может помочь в установлении связи между параметрами излучения и параметрами неоднородностей.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Аббревиатуры

ЭМИ	Электромагнитное излучение
EM	Electromagnetic (Електромагнитный)
CEM	Computational electromagnetics
FDTD	Finite-Difference Time-domain
TM_y	Transverse Magnetic to y
TE_y	Transverse Electric to y
PDE	Partial differential equation
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy condition
PEC	Perfect electric conductor
ABC	Absorbing boundary conditions
PML	Perfectly matched layer

Список литературы

1. Koronczay, D., Lichtenberger, J.,Clilverd, M. A., Rodger, C. J., Lotz, S.I., Sannikov, D. V., et al. The source regions of whistlers., *Journal of Geophysical Research: SpacePhysics*, 2019. vol. 124, pp. 5082–5096 DOI: 10.1029/2019JA026559.
2. Lichtenberger J., Ferencz C., Bodnar L., Hamar D., Steinbach P. Automatic whistler detector and analyzer system: Automatic whistler detector, *J. Geophys. Res.*, 2008. vol. 113, no. A12 DOI: 10.1029/2008JA013467.
3. Storey L. R. O. An investigation of whistling atmospherics, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1953. vol. 246, no. 908, pp. 113–141 DOI: 10.1098/rsta.1953.0011.
4. Elsherbeni A. Z., Demir V. *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with MATLAB simulations*. Raleigh, USA: SciTech Publishing, 2015. 560 pp. ISBN 978-1-61353-175-4.
5. Nickelson L. *Electromagnetic Theory and Plasmonics for Engineers*. Singapore: Springer, 2018. 749 pp. ISBN 9789811323522.
6. Yee K. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1966. vol. 14, no. 3, pp. 302–307 DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.
7. Taflove A., Hagness S. C. *Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method*. Massachusetts, USA: Artech House, 2005. 1038 pp. ISBN 9781580538329.
8. Chen W. K. *The Electrical Engineering Handbook*. Amsterdam: Elsevier, 2005. 1018 pp. ISBN 978-0-12-170960-0.
9. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics, *IBM journal of Research and Development*, 1967. vol. 11, no. 2, pp. 215–234 DOI: 10.1147/rd.112.0215.
10. Bachman G., Narici L., Beckenstein E. *Fourier and Wavelet Analysis*. New York: Springer, 1999. 516 pp. ISBN 978-0387988993.
11. Lindell I. V., Sihvola A. H. Perfect Electromagnetic Conductor, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 2005. vol. 19, no. 7, pp. 861–869 DOI: 10.1163/156939305775468741.
12. Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of Computational Physics*, 1994. vol. 114, no. 2, pp. 185–200 DOI: 10.1006/jcph.1994.1159.
13. Berenger J. P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996. vol. 44, no. 1, pp. 110–117 DOI: 10.1109/8.477535.
14. Andrew W. V., Balanis C. A. Tirkas P. A. Comparison of the Berenger perfectly matched layer and the Lindman higher-order ABC's for the FDTD method, *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 1995. vol. 5, no. 6, pp. 192–194 DOI: 10.1109/75.386128.
15. Veihl J. C., Mittra R. Efficient implementation of Berenger's perfectly matched layer (PML) for finite-difference time-domain mesh truncation, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996. vol. 6, no. 2, pp. 94–96 DOI: 10.1109/75.482000.

16. Gedney S. D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996. vol. 44, no. 12, pp. 1630–1639 DOI: 10.1109/8.546249.

Твёрдый Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий программист лаборатории электромагнитных излучений института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-6983-5258.

Малкин Евгений Ильич – младший научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-8037-1335.

Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 41. no. 4. pp. 66–88. ISSN 2079-6641

MSC 78A40, 65M06 Research Article

Mathematical modeling of the propagation of a plane electromagnetic wave in a strip waveguide with inhomogeneous boundary conductivity

D. A. Tverdyi, E. I. Malkin, R. I. Parovik

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

E-mail: dimsolid95@gmail.com

In the article, mathematical modeling of the electromagnetic dynamics of an atmosferic is carried out. Atmospheric is a broadband signal with a maximum intensity in the frequency range of 8-10 kHz, which propagates in the form of a plane electromagnetic wave in the complex structure of the conducting space of the waveguide formed by the Earth's surface and the ionosphere. The mathematical model of the process is described by a boundary value problem for the system of Maxwell equations. The boundary conditions of the problem determine the structure of the waveguide (Perfectly matched layer), the parameters of the conducting volume, and the interaction with inhomogeneities in the waveguide, either temporarily arising (local change in conductivity) or existing permanently (coastal line of the oceans). The mathematical model is solved by the Finite-Difference Time-domain numerical method. To solve the problem, a software package was developed in the MATLAB environment. As a result of computer simulations, it is shown that the presence of distortions of the main electromagnetic wave is caused by the mutual interference of the main wave and the reflected wave from the inhomogeneity. As a result, by observing the parameters of the atmospheric, it is possible to establish the presence of inhomogeneity along the path of its propagation. Simulation of the process of interaction of electromagnetic radiation with an inhomogeneity in a waveguide can establish a relationship between the radiation parameters and its inhomogeneities.

Key words: atmospheric, whistler, EM plane wave, conduction inhomogeneity, PML, ABC, interference, Maxwell equations, FDTD, MATLAB

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-66-88

Original article submitted: 03.12.2022 Revision submitted: 06.12.2022

For citation. Tverdyi D. A., Malkin E. I., Parovik R. I. Mathematical modeling of the propagation of a plane electromagnetic wave in a strip waveguide with inhomogeneous boundary

Funding. The research was carried out within the framework of the state task of IKIR FEB RAS on the topic AAAA-A21-121011290003-0

conductivity. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **41**: 4, 66-88. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-66-88

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Tverdyi D. A., Malkin E. I., Parovik R. I., 2022

References

[1] Koronczay D., Lichtenberger J., Clilverd M. A., Rodger C. J., Lotz S. I., Sannikov D. V., et al. The source regions of whistlers, Journal of Geophysical Research: SpacePhysics, 2019, vol. 124, pp. 5082–5096. DOI: 10.1029/2019JA026559.

[2] Lichtenberger J., Ferencz C., Bodnar L., Hamar D., Steinbach P. Automatic whistler detector and analyzer system: Automatic whistler detector, J. Geophys. Res., 2008, vol. 113, no. A12. DOI: 10.1029/2008JA01346.

[3] Storey L. R. O. An investigation of whistling atmospherics, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1953, vol. 246, no. 908, pp. 113–141. DOI: 10.1098/rsta.1953.0011.

[4] Elsherbeni A. Z., Demir V. The finite-difference time-domain method for electromagnetics with MATLAB simulations. Raleigh, USA, SciTech Publishing, 2015, 560 pp., isbn: 978-1-61353-175-4.

[5] Nickelson L. Electromagnetic Theory and Plasmonics for Engineers. Singapore, Springer, 2018, 749 pp., isbn: 9789811323522.

[6] Yee K. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1966, vol. 14, no. 3, pp. 302–307. DOI: 10.1109/TAP.1966.1138693.

[7] Taflove A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method. Massachusetts, USA, Artech House, 2005, 1038 pp., isbn: 9781580538329.

[8] Chen W. K. The Electrical Engineering Handbook. Amsterdam, Elsevier, 2005, 1018 pp., isbn: 978-0-12-170960-0.

[9] Courant R., Friedrichs K., Lewy H. On the partial difference equations of mathematical physics, IBM journal of Research and Development, 1967, vol. 11, no. 2, pp. 215–234. DOI: 10.1147/rd.112.0215.

[10] Bachman G., Narici L., Beckenstein E. Fourier and Wavelet Analysis. New York, Springer, 1999, 516 pp., isbn: 978-0387988993.

[11] Lindell I. V., Sihvola A. H. Perfect Electromagnetic Conductor, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 2005, vol. 19, no. 7, pp. 861–869. DOI: 10.1163/156939305775468741.

[12] Berenger J. P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, Journal of Computational Physics, 1994, vol. 114, no. 2, pp. 185–200. DOI: 10.1006/jcph.1994.1159.

[13] Berenger J. P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, vol. 44, no. 1, pp. 110–117. DOI: 10.1109/8.477535.

[14] Andrew W. V., Balanis C. A. Tirkas P. A. Comparison of the Berenger perfectly matched layer and the Lindman higher-order ABC's for the FDTD method, IEEE Microwave and Guided Wave Letters, 1995, vol. 5, no. 6, pp. 192–194. DOI: 10.1109/75.386128.

[15] Veihl J. C., Mittra R. Efficient implementation of Berenger's perfectly matched layer (PML) for finite-difference time-domain mesh truncation, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, vol. 6, no. 2, pp. 94–96. DOI: 10.1109/75.482000.

[16] Gedney S. D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, vol. 44, no. 12, pp. 1630–1639. DOI: 10.1109/8.546249.

Tverdyi Dmitrii Alexsandrovich – Ph. D. (Phys. & Math.), Lead programmer laboratory of electromagnetic propogation Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0001-6983-5258.

Malkin Evgeniy Ilich – Junior Researcher, Laboratory of Electromagnetic Radiation Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0001-8037-1335.

Parovik Roman Ivanovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading researcher laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.