

УДК 519.642.2, 51-76

Научная статья

Дробно-дифференциальная модель физических процессов с насыщением и ее применение к описанию динамики COVID-19

Д. А. Твёрдый^{1,2}, Р. И. Паровик^{1,2}


¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4, Россия

² Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

E-mail: dimsolid95@gmail.com


В этой статье была использована дробно-дифференциальная модель физических процессов с насыщением для описания динамики летальных исходов инфекции COVID-19. Математическое описание модели дается интегро-дифференциальным уравнением Риккати с производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто. Такое описание позволяет учитывать эффекты насыщения и памяти в динамике распространения COVID-19 среди населения. Здесь эффект насыщения заключается в выходе на плато числа заболевших и умерших, что указывает на стабилизацию динамики распространения COVID-19. Эффект памяти заключается в том, что симптомы инфекции у зараженных проявляются не сразу, а с некоторой задержкой. В статье исследуются данные наблюдений по новым случаям заражения и общему числу смертей в период за 2.5 года (с марта по сентябрь 2022 г) в Российской Федерации и Республике Узбекистан. Далее в работе уточняются параметры модели на основе исследуемых данных по динамике COVID-19. С помощью уточнённой модели делается предварительный прогноз на следующие полгода с последующей проверкой. Показано хорошее согласие между модельными кривыми и кривыми данных по общему числу смертей от COVID-19.

Ключевые слова: математическая модель, процессы насыщения, эффект памяти, COVID-19, уравнение Риккати, производная типа Герасимова-Капуто.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-119-136

Поступила в редакцию: 01.12.2022

В окончательном варианте: 06.12.2022

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Паровик Р. И. Дробно-дифференциальная модель физических процессов с насыщением и ее применение к описанию динамики COVID-19 // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40. № 3. С. 119-136.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-119-136

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Твёрдый Д. А., Паровик Р. И., 2022

Финансирование. Исследование выполнено в рамках гранта "Развитие математических моделей дробной динамики с целью исследования колебательных процессов и процессов с насыщением" МД-758.2022.1.1 в КамГУ им. Витуса Беринга

Введение

Нелинейное дифференциальное уравнение Риккати представляет большой интерес среди исследователей в различных областях знаний. Например, в физике уравнение Риккати возникает как решение некоторых уравнений математической физики после преобразований [1], в экономике для моделирования волатильности на финансовом рынке [2], в достаточно актуальной на сегодняшний день науке эпидемиологии – в частности, используется авторами [3] для построения логистических моделей эпидемии с целью определения времени выхода на насыщения (плато).

Известно, что уравнение Риккати хорошо описывает процессы, которые подчиняются логистическому закону [4, 5] и эти процессы мы будем называть процессами насыщения. Процессы с насыщением могут обладать свойствами наследственности (памяти), которые указывают на причинно-следственную связь в их динамике. В частности, в динамике распространения эпидемии эффект наследственности может заключаться в том, что симптомы заболевания проявляются с задержкой. С точки зрения математики эффекты памяти можно описать с помощью интегродифференциальных уравнений с разностными ядрами, которые называются функциями памяти [6]. Определение функции памяти является важной задачей. Однако в силу того, что в окружающей нас среде распространены степенные законы, то имеет определенный смысл считать функцию памяти степенной. Такой подход приводит нас к хорошо разработанному математическому аппарату дробного исчисления [7]-[11].

В работах авторов [12]-[15] была предложена математическая модель, построенная на уравнении Риккати с непостоянными коэффициентами и с производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто. В этих работах проводится численный анализ модели, а также ее применение к задачам исследования динамики солнечной активности и накопления радона в накопительной камере. В настоящем исследовании математическая модель применяется для изучения динамики распространения COVID-19 (COronaVIrus Disease 2019): уточняются параметры модели с учетом данных о смертельных исходах заболевания в Российской Федерации и Республике Узбекистан, а также предлагается некоторый прогноз распространения пандемии.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дробного уравнения Риккати с переменными коэффициентами вида:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} d\sigma = -a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c(t), \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где $u(t) \in C^2[0, T]$ – неизвестная функция решения, u_0 – известная заданная константа, $t \in [0, T]$ – текущее время эксперимента, T – общее время моделирования,

$a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – некоторые функции непрерывного вида, $\alpha(t) \in C^1(0, 1)$ – показатель производной дробного переменного порядка.

Гамма-функция Эйлера $\Gamma(\cdot)$ в (1) имеет вид:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{C} : \Re(x) > 0.$$

Задача Коши (1) и используемый далее численный способ решения, были подробно изучены в работах [12]-[15].

Методика численного решения по IFDS

В силу того, что задача Коши (1) нелинейна, то мы будем использовать методы конечно-разностных схем [14, 17, 18]. Для этого проведём дискретизацию задачи (1) в дифференциальной постановке. Разделим на N равноудалённых узлов сетки отрезок $[0, T]$ с шагом дискретизации $h = T/N$. Тогда $u(t) \in C^2[0, T]$ – неизвестная функция решения, на конечной сетке, перейдёт в свой сеточный аналог $u(t_i)$ или u_i , где $i = 1, \dots, N$. Таким же образом и непрерывная гладкая функция $0 < \alpha(t) < 1$ перейдёт в $\alpha(t_i)$ или α_i , что верно и для $a(t), b(t), c(t)$.

Дробную производную переменного порядка Герасимова-Капуто в (1) слева, будем аппроксимировать согласно работе [19]. Подробный вывод можно найти в статье [12], где исследован вопрос порядка аппроксимации дробного оператора. Переходим от (1) к дискретному аналогу, где C – известная константа:

$$A_i \sum_{j=0}^{i-1} w_j^i (u_{i-j} - u_{i-j-1}) + \alpha_i u_i^2 - b_i u_i - c_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

$$A_i = \frac{\tau^{-\alpha_i}}{\Gamma(2 - \alpha_i)}, \quad w_j^i = (j+1)^{1-\alpha_i} - j^{1-\alpha_i}. \quad (2)$$

В работе [12, Р. 9], исследованы вопросы сходимости и устойчивости IFDS для дискретной задачи Коши (2). Показано что IFDS безусловно устойчива, и сходится с порядком точности равным $(2 - \hat{\alpha})$. В качестве метода решения (2) используется итерационный метод Ньютона.

Предпосылки к моделированию процесса с насыщением COVID-19, с помощью дробного уравнения Риккати

Математическая модель (1) применялась авторами в работе [20] для изучения динамики распространения COVID-19 на основе данных наблюдений о новых случаях заражения и общем числе заражённых в Российской Федерации и Республике Узбекистан. Показано что при оптимальных параметрах модели, полученных при сравнении с полными наблюдаемыми данными этих процессов, были соответственно получены хорошие модельные результаты. Это дало предпосылки к прогнозированию процесса новых случаев заражения COVID-19, что частично

подтверждается в статье [15]. Однако следует отметить, что авторы не учитывали всех факторов, способных повлиять на изменение числа случаев заражения. Модель описывает тренды: по новым случаям заражения, и по общему количеству зараженных, как в Российской Федерации, так и в Республике Узбекистан [20].

В этом исследовании, проводится математическое моделирование последствий инфицирования COVID-19, строится математическая модель (1) последствий COVID-19 выраженных в смертельных исходах этого заболевания. Как и в [20] мы предлагаем относительно простую математическую модель (1) связанную с динамикой распространения пандемии COVID-19, которая основана на дробном уравнении Риккати по следующим причинам:

- уравнение Риккати, как показано в [5], может дать хорошие результаты для описания процессов, подчиняющихся логистическому закону, что справедливо для распространения эпидемии COVID-19;
- переменный порядок дробной производной позволят учесть эффект переменной памяти и его влияние на динамический процесс.

Также необходимо отметить, что из обзорных работ [21]-[24] по данной тематике можно сделать выводы:

- рассматриваемые математические модели сложны и с точки зрения численного алгоритма, и сложны в компьютерной реализации;
- мало сравнений результатов модели с наблюдаемыми данными по распространению эпидемии COVID-19.

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод о том, что математическая модель (1) может быть применена к моделированию процесса динамики распространения эпидемии COVID-19. Уточнение параметров модели (1) с помощью данных по смертности от эпидемии COVID-19 позволит строить прогнозы.

Данные по случаям заражения от COVID-19

Так же как и данные по новым случаям заражения в исследовании [20], в настоящей статье исходные наблюдения о смертности от COVID-19 в Российской Федерации (рис. 1,2) и Республике Узбекистан (рис. 3,4) были взяты из открытого источника [25], предоставляемого проектом «Our World in Data» при поддержке CSSE (Center for Systems Science and Engineering) в Johns Hopkins University. Эта общедоступная информация поступает из таких источников, как национальные агентства и правительства по всему миру. Данные этого проекта при содействии JHU обновляются раз в сутки и находятся в открытом доступе.

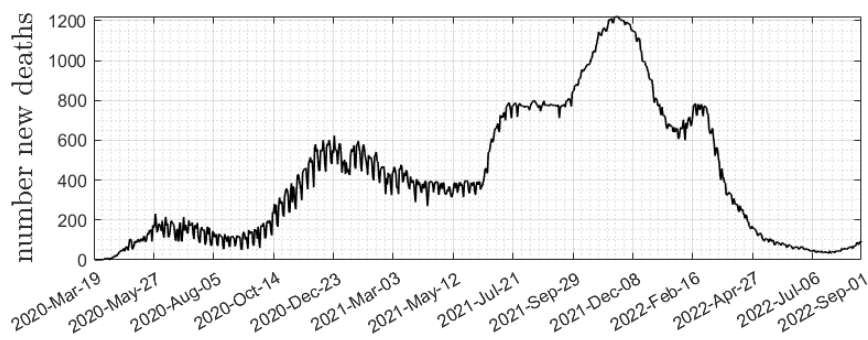


Рис. 1. Данные наблюдений за 897 дней по новым случаям смерти от COVID-19 в России за период с 19 марта 2020 гг по 1 сентября 2022 гг. с шагом 1 день
[Figure 1. Observation data for 897 days of new deaths from COVID-19 in Russia for the period from March 19, 2020 to September 1, 2022. in increments of 1 day]

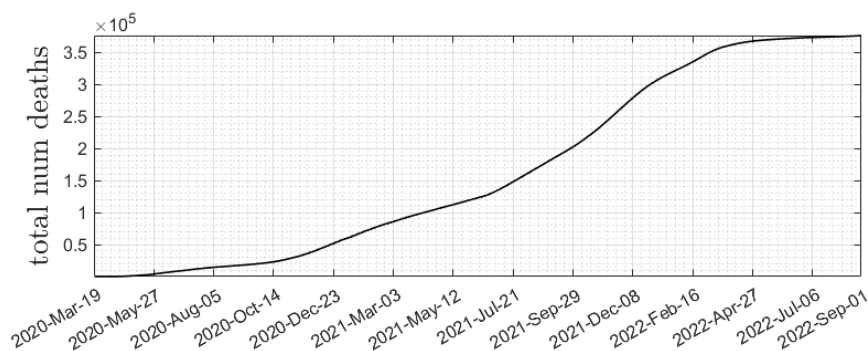


Рис. 2. Данные наблюдений за 897 дней по общему числу смертей от COVID-19 в России за период с 19 марта 2020 гг по 1 сентября 2022 гг. с шагом 1 день
[Figure 2. Observational data for 897 days of total COVID-19 deaths in Russia from March 19, 2020 to September 1, 2022 in increments of 1 day]

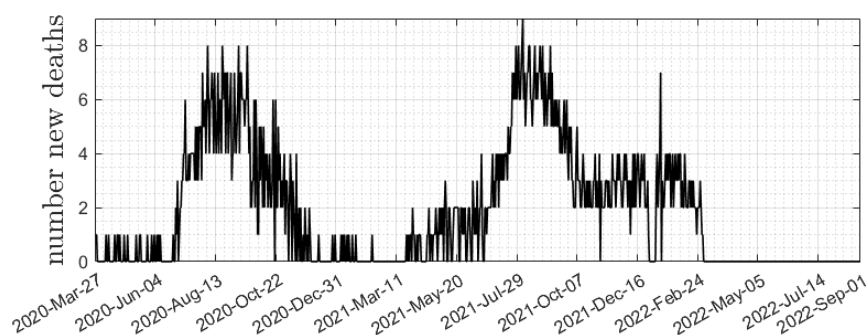


Рис. 3. Данные наблюдений за 889 дней по новым случаям смерти от COVID-19 в Узбекистане за период с 27 марта 2020 гг по 1 сентября 2022 гг. с шагом 1 день
[Figure 3. Observation data for 889 days of new deaths from COVID-19 in Uzbekistan for the period from March 27, 2020 to September 1, 2022. in increments of 1 day]

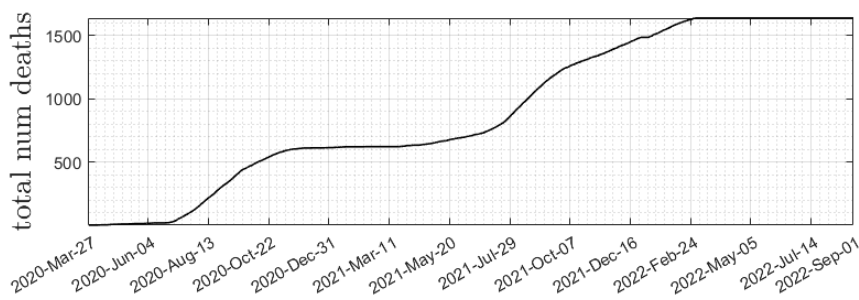


Рис. 4. Данные наблюдений за 889 дней по общему числу смертей от COVID-19 в Узбекистане за период с 27 марта 2020 гг по 1 сентября 2022 гг. с шагом 1 день

[Figure 4. Observation data for 889 days on the total num of deaths from COVID-19 in Uzbekistan, from March 27, 2020 to September 1, 2022 in increments of 1 day]

Экспериментальные данные, а также результаты, полученные в ходе численного моделирования, отражают количество смертельных исходов. Эти данные должны быть согласованы, а значит обезразмерены, для чего проводится нормализация всех данных на максимум.

Используемое программное обеспечение

Для решения всех задач возникающих при моделировании в работах [20, 15] использовался разработанный автором программный комплекс, представленный пользовательской библиотекой «FDREext» для среды символьной математики MAPLE 2021.

В настоящем исследовании, для проведения моделирования динамического процесса: обработки данных, численного решения модельной задачи и визуализации результатов, был разработан программный комплекс «FDRE 3.0» на языке MATLAB, а все результаты получены с его помощью.

Данный программный комплекс FDRE 3.0 является обобщением идей «FDREext» реализованных ранее для [20], что выражено в следующих качествах программного комплекса:

- большей универсальности – как при работе только с экспериментальными данными, так и только с моделью или совместно;
- заметного удобства – добавления новых вариаций модели и экспериментальных данных, для последующей программной обработки;
- на порядки возросшей скорости работы – так как стало возможно полностью уйти в (2) от символьных вычислений.

Параметры и результаты моделирования динамики смертности от COVID-19

Новые случаи смертей от инфекции в Российской Федерации

Используемые параметры моделирования рассчитывались при различных вариациях значений параметров моделирования, из которых выбиралась наиболее подходящая комбинация по максимальным коэффициентам: корреляции Пирсона (Cor) [26] или детерминации (R^2) [27, 28], с нормированными данными наблюдений. Таким образом, определим для (1) неизвестные функции или константы $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $\alpha(t)$ на основе известных нормированных данных наблюдений так:

$$N = 713, \quad T = 713, \quad u(0) = 0.00081833,$$

$$a(t) = 0.8 \sin\left(7.225 \frac{t}{T}\right)^2 + 0.2, \quad b(t) = 0.05, \quad c(t) = \frac{t}{T} \left(\sin\left(5.969 \frac{t}{T}\right)\right)^2,$$

$$\alpha(t) = 0.25 \sin\left(1.963 \frac{t}{T}\right) + 0.5 \left(\sin\left(10.053 \frac{t}{T}\right)\right)^2 + 0.25. \quad (3)$$

Из рис. 5 видно что подобранные перебором параметры (3), до лучших коэффициентов корреляции и детерминации, а так же хорошего визуального соответствия модельных кривых для (1), могут давать некоторое приближённое представление о последствиях инфекции, выраженной в цикличности процесса, в следствии появления новых штаммов вируса.

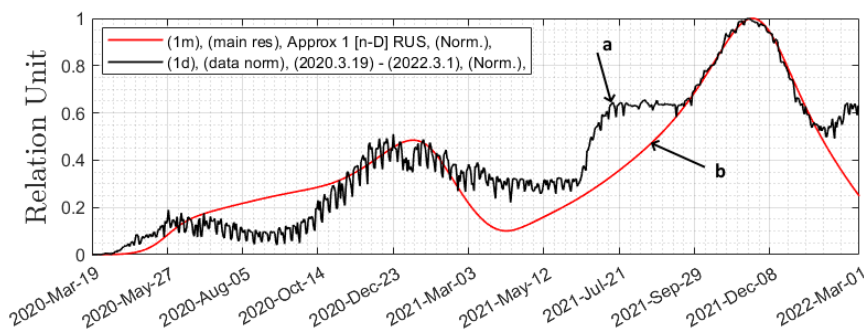


Рис. 5. Новые случаи смерти от COVID-19 в России за несколько периодов с 19 марта 2020 гг: а) нормированные данные наблюдений по 1 марта 2022 гг. за 713 дней; б) результаты моделирования процесса с помощью (1) при (3) по данным (а), где: $R^2 = 0.78$, $Cor = 0.89$

[Figure 5. New deaths from COVID-19 in Russia for several periods since March 19, 2020: a) normalized observational data up to March 1, 2022 for 713 days; b) results of process simulation using (1) at (3) according to data (a), where: $R^2 = 0.78$, $Cor = 0.89$]

Теперь же проведем прогнозирование процесса на полгода (184 дня) вперед, основываясь на модели (1).

Для чего, с помощью программного комплекса, переопределим параметры (3) таким образом:

$$\begin{aligned}
 N = 897, \quad T = 897, \quad u(0) = 0.00081833, \\
 a(t) = 0.8 \sin \left(9.0903 \frac{t}{T} \right)^2 + 0.2, \quad b(t) = 0.05, \\
 c(t) = \frac{t}{T} \left(\sin \left(7.509 \frac{t}{T} \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.25 \sin \left(2.4702 \frac{t}{T} \right) + 0.5 \left(\sin \left(12.647 \frac{t}{T} \right) \right)^2 + 0.25. \quad (4)
 \end{aligned}$$

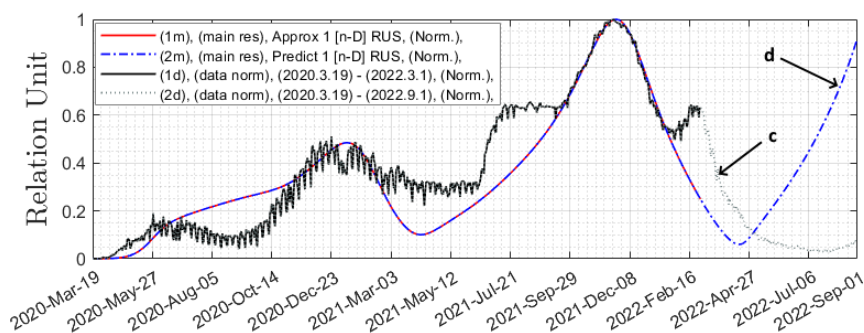


Рис. 6. Новые случаи смерти от COVID-19 в России за несколько периодов с 19 марта 2020 гг: с) нормированные данные наблюдений по 1 сентября 2022 гг. за 897 дней; d) моделирование развития процесса с помощью (1) при (4) по данным (с), где: $R^2 = 0.39$, $Cor = 0.67$

[Figure 6. New deaths from COVID-19 in Russia for several periods since March 19, 2020: c) normalized observational data up to September 1, 2022. for 897 days; d) simulation of the development of the process using (1) at (4) according to data (c), where: $R^2 = 0.39$, $Cor = 0.67$]

На рис. 6 проведено прогнозирование и его проверка. Полученный на (рис. 6) результат моделирования, принципиально совпадает с результатами из [20, 15] для моделирования динамики новых случаев заражения вирусом COVID-19. Что ожидаемо, ведь летальные исходы при пандемии, как ни прискорбно, являются закономерным следствием. Однако также, вероятно не были учтены многие факторы, способные повлиять на изменение числа таких случаев.

Общее число смертей от инфекции в Российской Федерации

Из данных наблюдений рис. 2 по общему числу смертей от COVID-19 в России, можно предположить что изменение этого параметра, его подъем и падение, происходят по кривой, очень близкой к обобщенной логистической кривой [4], и этот процесс нелинеен. Также из рис. 1 и 2, построенных для данных на одном временном промежутке видно, что в период примерно с 16 февраля по 27 апреля

2022 гг. количество новых случаев смертей имеет явную тенденцию к снижению. На рис. 2 для общего числа смертей к концу этого периода и далее, отразится как выход на "плато" исследуемого динамического процесса COVID-19. Тогда мы можем определить параметры модели (1) на основе известных данных рис. 2 почти за весь период (в 2 года) до 1 марта 2022 гг., по общему числу смертей, но уже нормированных, для описания процесса так:

$$\begin{aligned}
 N = 713, \quad T = 713, \quad u(0) = 2.655e - 06, \\
 a(t) = 0.1, \quad b(t) = 0.05 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.5 \frac{t}{T} - 0.99 \right) \right)^2, \\
 c(t) = 0.164 \frac{t}{T} + 0.262 \left(\sin \left(2.67 \frac{t}{T} - 0.3 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.25 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.5 \frac{t}{T} - 0.1 \right) \right)^2. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Результаты моделирования приведены на рис. 7.

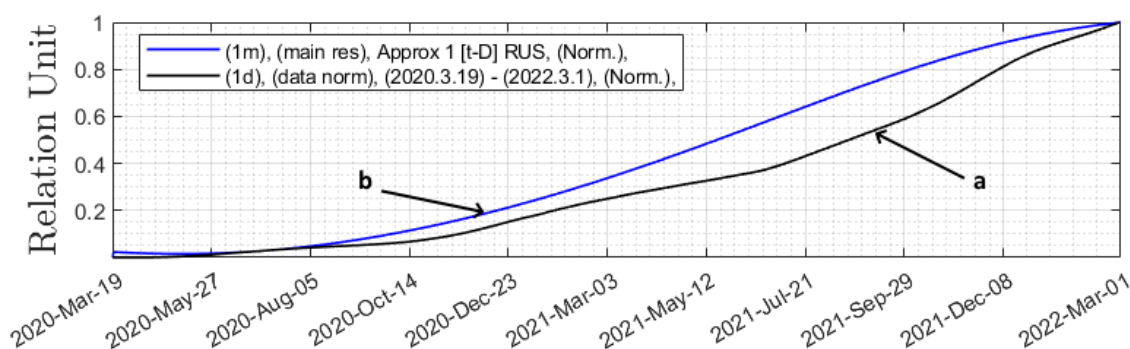


Рис. 7. Общее число смертей от COVID-19, в России за несколько периодов с 19 марта 2020 гг: а) норм. данные по 1 марта 2022 гг. за 713 дней; б) результаты моделирования с помощью (1) при (5) по данным (а), где: $R^2 = 0.85$, $Cor = 0.98$

[Figure 7. Total num deaths from COVID-19, in Russia for several periods since March 19, 2020: a) normalized observational data up to March 1, 2022 for 713 days; b) results of simulation using (1) at (5) according to data (a), where: $R^2 = 0.85$, $Cor = 0.98$]

После чего переопределим параметры (5) для прогноза:

$$\begin{aligned}
 N = 897, \quad T = 897, \quad u(0) = 2.655e - 06, \\
 a(t) = 0.1, \quad b(t) = 0.062 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.887 \frac{t}{T} - 0.99 \right) \right)^2, \\
 c(t) = 0.207 \frac{t}{T} + 0.262 \left(\sin \left(3.359 \frac{t}{T} - 0.3 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.314 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.887 \frac{t}{T} - 0.1 \right) \right)^2. \quad (6)
 \end{aligned}$$

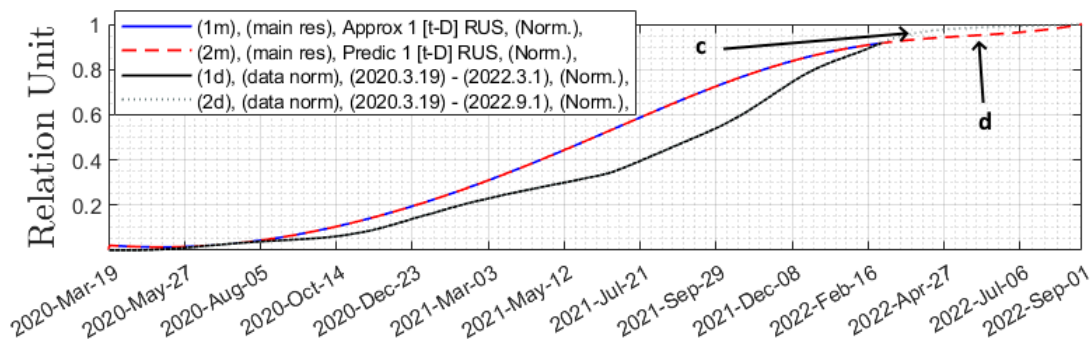


Рис. 8. Общее число смертей от COVID-19, в России за несколько периодов с 19 марта 2020 гг: с) норм. данные по 1 сентября 2022 гг. за 897 дней; d) моделирование развития процесса с помощью (1) при (6) по данным (с), где: $R^2 = 0.93$, $Cor = 0.97$

[Figure 8. Total num deaths from COVID-19, in Russia for several periods since March 19, 2020: c) normalized observational data up to September 1, 2022. for 897 days; d) simulation of the development of the process using (1) at (6) according to data (c), where: $R^2 = 0.93$, $Cor = 0.97$]

В итоге на рис. 8 видим что, заложенные в модель (1) с параметрами (5) предположения о "выходе на плато" подтвердились, тем фактом, что расчетная кривая предложенной модели с учётом насыщения рис. 8d хорошо согласуется с данными по общему числу смертей от COVID-19 за прогнозируемый период до 1 сентября 2022 гг.

Новые случаи смертей от инфекции в Республике Узбекистан

Аналогичным образом, согласно (3) параметрам для моделей по данным в Российской Федерации, определим оптимальные параметры моделирования для Республики Узбекистан. Тогда определим для (1) неизвестные функции или константы $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и $\alpha(t)$ на основе известных нормированных данных наблюдений так:

$$\begin{aligned}
 N = 705, \quad T = 705, \quad u(0) = 0.11111, \\
 a(t) = 0.8 \left(\sin \left(9.111 \frac{t}{T} \right) \right)^2 + 0.2, \quad b(t) = 0.05, \\
 c(t) = 0.4 \frac{T + 2.206 t}{T} \left(\sin \left(5.942 \frac{t}{T} + 0.2 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.25 \sin \left(2.475 \frac{t}{T} \right) + 0.5 \left(\sin \left(11.092 \frac{t}{T} \right) \right)^2 + 0.25. \quad (7)
 \end{aligned}$$

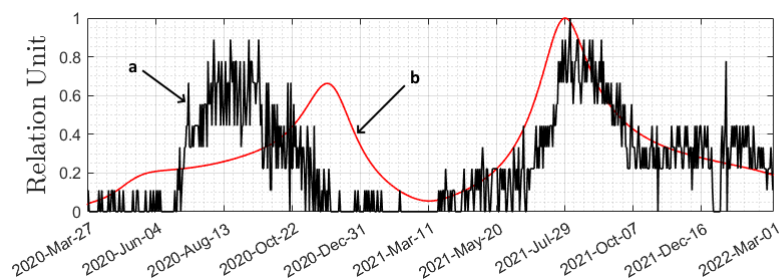


Рис. 9. Новые случаи смерти от COVID-19 в Узбекистане за несколько периодов с 27 марта 2020 гг: а) норм. данные по 1 марта 2022 гг. за 705 дней; б) результаты моделирования помощью (1) при (7) по данным (а), где: $R^2 = 0.07$, $Cor = 0.53$

[Figure 9. New deaths from COVID-19 in Uzbekistan for several periods since March 27, 2020: a) normalized observational data up to March 1, 2022 for 705 days; b) results simulation using (1) at (7) according to data (a), where: $R^2 = 0.07$, $Cor = 0.53$]

Аналогично переопределим параметры (7), для прогнозирования процесса на полгода (184 дня) вперед:

$$\begin{aligned}
 N &= 889, & T &= 889, & u(0) &= 0.11111, \\
 a(t) &= 0.8 \left(\sin \left(11.489 \frac{t}{T} \right) \right)^2 + 0.2, & b(t) &= 0.05, \\
 c(t) &= 0.4 \frac{T + 2.782 t}{T} \left(\sin \left(7.493 \frac{t}{T} + 0.2 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) &= 0.25 \sin \left(3.122 \frac{t}{T} \right) + 0.5 \left(\sin \left(13.987 \frac{t}{T} \right) \right)^2 + 0.25. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Общее число смертей от инфекции в Республике Узбекистан

Для данных по Республике Узбекистан на (рис. 1 и 2) с 24 февраля 2022 гг. количество новых случаев близко к нулю, по крайней мере согласно [25] данным этого проекта. Тогда можно сказать что, имеются аналогичные тенденции к снижению числа новых случаев смертей по инфекции.

Следуя тем же идеям о возможном будущем "выходе на плато" что и в (5) определим параметры модели (1) на основе известных данных (рис. 4) почти за весь период (в 2 года) до 1 марта 2022 гг. по общему числу смертей, но уже нормиро-

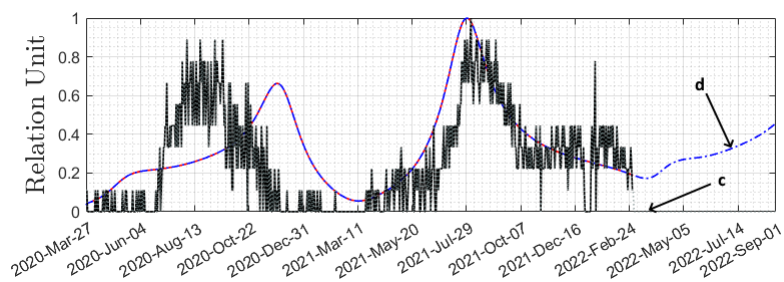


Рис. 10. Новые случаи по смертности от COVID-19 в Узбекистане за несколько периодов с 27 марта 2020 гг: с) норм. данные по 1 сентября 2022 гг. за 889 дней (с 3 марта 2022 гг., по имеющимся данным, нет новых случаев); d) моделирование развития процесса с помощью (1) при (8) по данным (с), где: $R^2 = 0.03$, $Cor = 0.51$

[Figure 10. New deaths from COVID-19 in Uzbekistan for several periods since March 27, 2020: c) normalized observational data up to September 1, 2022. for 889 days (since March 3, 2022, no new cases reported); d) simulation of the development of the process using (1) at (8) according to data (c), where: $R^2 = 0.03$, $Cor = 0.51$]

ванных, для описания процесса так:

$$\begin{aligned}
 N = 705, \quad T = 705, \quad u(0) = 0.00061125, \\
 a(t) = 0.1, \quad b(t) = 0.2 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.25 \frac{t}{T} - 0.99 \right) \right)^2, \\
 c(t) = 0.2625 \frac{t}{T} + 0.1425 \left(\sin \left(5.1703 \frac{t}{T} - 0.3 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.25 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.5 \frac{t}{T} - 0.1 \right) \right)^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Так же проведем прогнозирование и его проверку:

$$\begin{aligned}
 N = 889, \quad T = 889, \quad u(0) = 0.00061125, \\
 a(t) = 0.1, \quad b(t) = 0.252 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.576 \frac{t}{T} - 0.99 \right) \right)^2, \\
 c(t) = 0.331 \frac{t}{T} + 0.1425 \left(\sin \left(6.519 \frac{t}{T} - 0.3 \right) \right)^2, \\
 \alpha(t) = 0.315 \frac{t}{T} \left(\sin \left(1.891 \frac{t}{T} - 0.1 \right) \right)^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

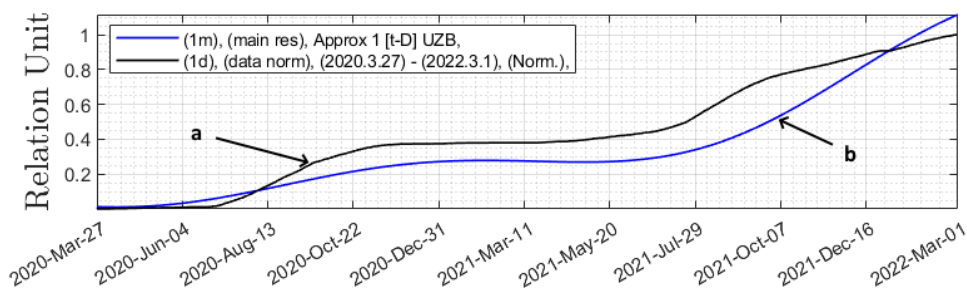


Рис. 11. Общее число смертей от COVID-19, в Узбекистане за несколько периодов с 27 марта 2020 гг: а) норм. данные по 1 марта 2022 гг. за 705 дней; б) результаты моделирования с помощью (1) при (9) по данным (а), где: $R^2 = 0.82$, $Cor = 0.95$

[Figure 11. Total num deaths from COVID-19, in Uzbekistan for several periods since March 27, 2020: a) normalized data up to March 1, 2022 for 705 days; b) results of simulation using (1) at (9) according to data (a), where: $R^2 = 0.82$, $Cor = 0.95$]

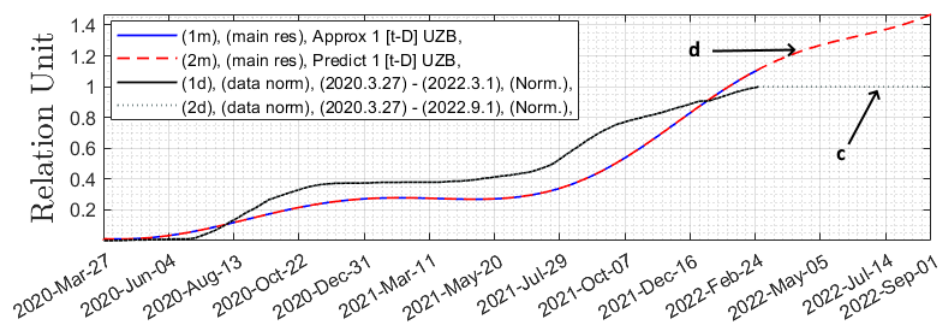


Рис. 12. Общее число смертей от COVID-19, в Узбекистане за несколько периодов с 27 марта 2020 гг: с) норм. данные по 1 сентября 2022 гг. за 889 дней; д) моделирование развития процесса с помощью (1) при (10) по данным (с), где: $R^2 = 0.72$, $Cor = 0.93$

[Figure 12. Total num deaths from COVID-19, in Uzbekistan for several periods since March 27, 2020: c) normalized observational data up to September 1, 2022. for 889 days; d) simulation of the development of the process using (1) at (10) according to data (c), where: $R^2 = 0.72$, $Cor = 0.93$]

Заключение

Предложен математическая модель на основе дробного уравнения Риккати с производной типа Герасимова — Капуто и непостоянными коэффициентами для моделирования динамических процессов с эффектом насыщения и памяти. Исследована динамика смертности от заражения COVID-19 в нескольких странах мира.

Параметры предлагаемой математической модели оптимально подобраны на основе сравнения с нормированными экспериментальными данными этого процес-

са. Показано, что при оптимальном выборе соответствующих параметров моделирования: $\alpha(t)$ и $a(t), b(t), c(t)$ расчетные кривые хорошо согласуются с данными наблюдений для общего числа летальных исходов.

В итоге показано хорошее соответствие модельных кривых и данных по общему числу смертей от COVID-19, что подтверждает предположение о наличии эффектов насыщения в динамическом процессе распространения заболевания.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации.


Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли свой вклад в эту статью. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательный вариант рукописи был одобрен всеми авторами.

Список литературы


1. Taogetusang, Sirendaorji, Li S. New application to Riccati equation, *Chinese Physics B*, 2010. vol. 19, pp. 080303 DOI: 10.1088/1674-1056/19/8/080303.
2. Jeng S., Kilicman A. Fractional Riccati Equation and Its Applications to Rough Heston Model Using Numerical Methods, *Symmetry*, 2010. vol. 12, pp. 959 DOI: 10.3390/sym12060959.
3. Куркин А. А., Куркина О. Е., Пеленовский Е. Н. Логистические модели распространения эпидемий, *Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева.*, 2020. Т. 129, С. 9–18.
4. Постан М. Я. Обобщенная логистическая кривая: ее свойства и оценка параметров, *Экономика и математические методы*, 1993. Т. 29, №2, С. 305–310.
5. Drozdyuk A. V. *Logistic curve*. Toronto: Choven, 2019. 270 с.
6. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. Moscow: Nauka, 1982.
7. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006. 523 pp.
9. Учайкин В. В. *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок, 2008. 510 с.
10. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers*, Background and Theory, vol. I. Berlin: Springer, 2013. 373 DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0 pp.
11. Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019. vol. 71, pp. 231–243 DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.12.003.
12. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6(1), no. 23, pp. 1–27 DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
13. Tvyordyj D. A. The Riccati equation with variable heredity, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2017. vol. 17, no. 1, pp. 44–53 DOI: 10.18454/2313-0156-2017-16-1-61-68.
14. Parovik R. I. Tverdyi D. A. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation, *Mathematical and Computational Applications*, 2021. vol. 26, no. 3, pp. 55 DOI: 10.3390/mca26030055.
15. Parovik R. I. Tverdyi D. A. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6(3), no. 163, pp. 1–35 DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
16. Твёрдый Д. А. Паровик Р. И. Математическое моделирование некоторых логистических законов с помощью эредитарной динамической системы Риккати / *Материалы 11 Всероссийской научной конференции с международным участием (27–30 мая 2019 г.)*, Математическое моделирование и краевые задачи. Самара, СамГТУ, 2019, С. 348–352.
17. Parovik R. I. On a finite-difference scheme for an hereditary oscillatory equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547–557 DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.

18. Parovik R. I. Mathematical modeling of linear fractional oscillators, *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 11, pp. 18–79 DOI: 10.3390/math8111879.
19. Sun H., et al. Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012. vol. 22, no. 04, pp. 1250085 DOI: 10.1142/S021812741250085X.
20. Parovik R. I. Tverdyi D. A. Fractional Riccati equation to model the dynamics of COVID-19 coronavirus infection, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. vol. 2094, no. 163, pp. 032042 DOI: 10.1088/1742-6596/2094/3/032042.
21. Ndairou F., Torres D. F. M. Mathematical Analysis of a Fractional COVID-19 Model Applied to Wuhan, Spain and Portugal, *Axioms*, 2021. vol. 10, no. 3, pp. 135 DOI: 10.3390/axioms10030135.
22. Mohammad M., Trounev A., Cattani C. The dynamics of COVID-19 in the UAE based on fractional derivative modeling using Riesz wavelets simulation, *Advances in Difference Equations*, 2021. no. 115, pp. 1–14 DOI: 10.1186/s13662-021-03262-7.
23. Higazy M., Allehiany F. M., Mahmoud E. E. Numerical study of fractional order COVID-19 pandemic transmission model in context of ABO blood group, *Results in Physics*, 2021. vol. 22, pp. 103852 DOI: 0.1016/j.rinp.2021.103852.
24. Baleanu D., Mohammadi H., Rezapour S. A fractional differential equation model for the COVID-19 transmission by using the Caputo–Fabrizio derivative, *Advances in Difference Equations*, 2020. no. 299, pp. 1–27 DOI: 10.1186/s13662-020-02762-2.
25. Ritchie H., et. al. Coronavirus Pandemic COVID-19, *dataset by Our World in Data*, 04.09.2021 <https://github.com/owid/covid-19-data/tree/master/public/data>.
26. Cox D. R. Hinkley D. V. *Theoretical Statistics, 1st edition*. London: Chapman & Hall/CRC, 1979. 528 pp. ISBN 9780412161605.
27. Hughes A. J., Grawoig D. E. *Statistics: A Foundation for Analysis*. Boston: Addison Wesley, 1971. 525 pp. ISBN 978-0201030211.
28. Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Scienc*, 2021. vol. 299, pp. e623 DOI: 10.7717/peerj-cs.623.



Твёрдый Дмитрий Александрович ✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник интегративной лаборатории "Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержение вулканов" Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ведущий программист лаборатории электромагнитных излучений института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-6983-5258.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий интегративной лаборатории "Природные катастрофы Камчатки – землетрясения и извержение вулканов" Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-1576-1860.

MSC 26A33, 92B99

Research Article

Fractional differential model of physical processes with saturation and its application to the description of the dynamics of COVID-19

D. A. Tverdyi^{1,2}, R. I. Parovik^{1,2}


¹ Vitus Bering Kamchatka State University,
683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Pogranichnaya, 4, Russia

² Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave
Propagation FEB RAS, 684034, p. Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

E-mail: dimsolid95@gmail.com


In this article, a fractional differential model of physical processes with saturation was used to describe the dynamics of lethal outcomes of COVID-19 infection. The mathematical description of the model is given by the integro-differential Riccati equation with a derivative of a fractional variable order of the Gerasimov-Caputo type. This description makes it possible to take into account the effects of saturation and memory in the dynamics of the spread of COVID-19 among the population. Here, the saturation effect consists in reaching a plateau in the number of cases and deaths, which indicates the stabilization of the dynamics of the spread of COVID-19. The memory effect is that the symptoms of infection in infected people do not appear immediately, but with some delay. The article examines observational data on new cases of infection and the total number of deaths over a period of 2.5 years (from March to September 2022) in the Russian Federation and the Republic of Uzbekistan. Further, the parameters of the model are refined based on the studied data on the dynamics of COVID-19. With the help of the refined model, a preliminary forecast for the next six months is made with subsequent verification. Good agreement is shown between the model curves and the data curves for the total number of deaths from COVID-19.

Key words: mathematical modeling of dynamic processes, saturation and memory effect, COVID-19, Riccati equation, Gerasimov-Caputo derivative.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-119-136

Original article submitted: 01.12.2022

Revision submitted: 06.12.2022

For citation. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Fractional differential model of physical processes with saturation and its application to the description of the dynamics of COVID-19. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, 40: 3, 119-136.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-119-136

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Funding. The study was carried out within the framework of the grant "Development of mathematical models of fractional dynamics for the purpose of studying oscillatory processes and processes with saturation" MD-758.2022.1.1.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Tverdyi D. A., Parovik R. I., 2022

References

- [1] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S. New application to Riccati equation, Chinese Physics B, 2010, 19, 080303. DOI: 10.1088/1674-1056/19/8/080303.
- [2] Jeng S., Kilicman A. Fractional Riccati Equation and Its Applications to Rough Heston Model Using Numerical Methods, Symmetry, 2010, 12, DOI: 10.3390/sym12060959.
- [3] Kurkin A. A., Kurkina O. E., Pelenovskij E. N. Logistic models of the spread of epidemics, Proceedings of NSTU im. R.E. Alekseev., 2020, 129, 9–18 (In Russian).
- [4] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. Moscow, Nauka, 1982.
- [5] Uchajkin V. V. Metod drobnyh proizvodnyh [Fractional derivative method]. Ulyanovsk, Artichoke, 2008, 510 (In Russian).
- [6] Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 (In Russian).
- [7] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Elsevier Science Limited, 2006, 523.
- [8] Uchaikin V. V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory. Berlin, Springer, 2013, 373, DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
- [9] Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 71, 231–243. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.12.003.
- [10] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, Fractal and Fractional, 2022, 6(1):23, 1–27. DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
- [11] Tvyordyj D. A. The Riccati equation with variable heredity, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2017, 17:1, 44–53. DOI: 10.18454/2313-0156-2017-16-1-61-68 (In Russian).
- [12] Parovik R. I. Tverdyi D. A. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation, Mathematical and Computational Applications, 2021, 26:3, 55. DOI: 10.3390/mca26030055.
- [13] Drozdyuk A. V. Logistic curve. Toronto, Choven, 2019, 270.
- [14] Postan M. Y. Obobshchennaya logisticheskaya krivaya: ee svoystva i ocenka parametrov [Generalized logistic curve: its properties and estimation of parameters]. Ekonomika i matematicheskie metody [Economics and mathematical methods]. 1993, 29:2, 305–310 (In Russian).
- [15] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Mathematical modeling of some logistic laws using the hereditary dynamical Riccati system, In: Proceedings of the 11th All-Russian Scientific Conference with International Participation (May 27–30, 2019). Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara, Samara State Technical Univ., 2019, 348–352 (In Russian).
- [16] Parovik R. I. Tverdyi D. A. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, Fractal and Fractional, 2022, 6(3):163, 1–35. DOI: 10.3390/fractalfract6030163.

- [17] Parovik R. I. On a finite-difference scheme for an hereditary oscillatory equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021, 253:4, 547–557. DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.
- [18] Parovik R. I. Mathematical modeling of linear fractional oscillators, *Mathematics*, 2020, 8:11, 18–79. DOI: 10.3390/math8111879.
- [19] Sun H., et al. Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2012, 22:4, 1250085. DOI: 10.1142/S021812741250085X.
- [20] Parovik R. I. Tverdyi D. A. Fractional Riccati equation to model the dynamics of COVID-19 coronavirus infection, *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 2094:163, 032042. DOI: 10.1088/1742-6596/2094/3/032042.
- [21] Ndairou F., Torres D. F. M. Mathematical Analysis of a Fractional COVID-19 Model Applied to Wuhan, Spain and Portugal, *Axioms*, 2021, vol. 10, no. 3, pp. 135. DOI: 10.3390/axioms10030135.
- [22] Mohammad M., Trounev A., Cattani C. The dynamics of COVID-19 in the UAE based on fractional derivative modeling using Riesz wavelets simulation, *Advances in Difference Equations*, 2021, 115, 1–14. DOI: 10.1186/s13662-021-03262-7.
- [23] Higazy M., Allehiyany F. M., Mahmoud E. E. Numerical study of fractional order COVID-19 pandemic transmission model in context of ABO blood group, *Results in Physics*, 2021, vol. 22, pp. 103852. DOI: 10.1016/j.rinp.2021.103852.
- [24] Baleanu D., Mohammadi H., Rezapour S. A fractional differential equation model for the COVID-19 transmission by using the Caputo–Fabrizio derivative, *Advances in Difference Equations*, 2020, 299, 1–27. DOI: 10.1186/s13662-020-02762-2.
- [25] Ritchie H., et.al. Coronavirus Pandemic COVID-19, dataset by Our World in Data, 04.09.2021, <https://github.com/owid/covid-19-data/tree/master/public/data>.
- [26] Cox D. R. Hinkley D. V. *Theoretical Statistics*, 1st edition. London, Chapman & Hall/CRC, 1979, 528.
- [27] Hughes A. J., Grawoig D. E. *Statistics: A Foundation for Analysis*. Boston, Addison Wesley, 1971, 525.
- [28] Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Scienc*, 2021, no. 299, pp. e623. DOI: 10.7717/peerj-cs.623.



Tverdyi Dmitrii Aleksandrovich ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Researcher laboratory "Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions" of the Kamchatka State University named after Vitus Bering, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, Lead programmer laboratory of electromagnetic propagation Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0001-6983-5258.



Parovik Roman Ivanovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, chief of the integrative laboratory "Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions" of the Kamchatka State University named after Vitus Bering, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, Leading researcher laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.