

УДК 519.254, 517.958:537.84

Научная статья

## Динамика изменения режимов генерации магнитного поля в зависимости от частоты осцилляций процесса подавления $\alpha$ -эффекта энергией поля в модели $\alpha\Omega$ -динамо


*О. В. Шереметьева*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

E-mail: sheremeteva@ikir.ru


В статье рассматривается крупномасштабная модель  $\alpha\Omega$ -динамо в маломодовом приближении. Интенсивность  $\alpha$ -эффекта регулируется процессом с эрдитарными свойствами («памятью»), зависящим от энергии магнитного поля. Характер воздействия процесса определяется знакопеременным ядром с варьируемой частотой затухания и постоянным коэффициентом затухания равным 0.1. По результатам численного моделирования режимов генерации магнитного поля определены ограничения для значений параметров модели, при которых нет осцилляций в поле скорости вязкой жидкости или они незначительны. Результаты численного моделирования режимов генерации магнитного поля при различных значениях частоты затухания отражены на фазовой плоскости управляющих параметров, в которых заложена информация о крупномасштабном и турбулентном генераторах. В работе исследуется вопрос о динамике изменения картины на фазовой плоскости в зависимости от значения частоты затухания и времени ожидания. Проводится сравнение с результатами, полученными ранее при постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта и при её изменении, которое определяется показательным ядром.

*Ключевые слова:* маломодовая модель динамо,  $\alpha\Omega$ -динамо,  $\alpha$ -эффект, магнитное поле, инверсии.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119

Поступила в редакцию: 29.11.2022

В окончательном варианте: 06.12.2022

Для цитирования. Шереметьева О. В. Динамика изменения режимов генерации магнитного поля в зависимости от частоты осцилляций процесса подавления  $\alpha$ -эффекта энергией поля в модели  $\alpha\Omega$ -динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 41. № 4. С. 107-119.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Шереметьева О. В., 2022

**Финансирование.** Работа выполнялась в рамках государственного задания по теме «Физические процессы в системе ближнего космоса и геосфер при солнечных и литосферных воздействиях» (Но АААА-А21-121011290003-0).

## Введение

Данная статья продолжает цикл работ ИКИР ДВО РАН по исследованию маломодовой модели динамо земного типа [1]-[8]. Задача исследования различных приближений на предмет генерации геомагнитного поля, близкого к наблюдаемому, несмотря на успехи, достигнутые в данной области, остаётся актуальной. Земное динамо хорошо согласуется с моделью  $\alpha\Omega$ -динамо, характерными свойствами которого является сильное дифференциальное вращение объекта и турбулентный характер движения проводящей среды [4],[9]-[13]. Характерным свойством динамо-системы земного типа является наличие хаотических инверсий без существенной перестройки движения проводящей среды [14]. В модели  $\alpha\Omega$ -динамо, которая описывается магнитогидродинамическими (далее МГД) уравнениями [2, 4], включающими уравнение Навье-Стокса, уравнение индукции магнитного поля  $B$  с учётом турбулентного  $\alpha$ -эффекта, условия неразрывности поля скорости  $v$  и соленоидальности магнитного поля, а также граничные условия прилипания для поля скорости  $v$ , генерация магнитного поля и поля скорости определяется работой  $\Omega$ -генератора и  $\alpha$ -генератора и интенсивность воздействия последнего изменяется во времени под влиянием внешних сил. В рамках данной работы эта детерминированная динамическая модель рассматривается с аддитивным регулятором интенсивности  $\alpha$ -эффекта в виде процесса с конечной памятью, которая определяется знакопеременной функцией  $J(t) = e^{bt} \cos at$  с постоянным коэффициентом затухания  $b = 0.1$  и различными значениями частоты  $a$  затухающих колебаний [5]-[8].

Для исследования используется перемасштабированная и обезразмеренная МГД-система [6]. В качестве единицы времени принято время затухания магнитного поля. Использование такого временного масштаба позволяет смоделировать основные динамические характеристики поля с помощью маломодовых пространственных приближений. В работе приняты одномодовое приближение для поля скорости вязкой жидкости и трёхмодовое – для магнитного поля, что обеспечивает работу динамо с инверсиями в магнитном поле.

Целью данного исследования маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо является определение параметров модели, при которых могут быть получены режимы генерации магнитного поля как регулярного, так и нерегулярного характера, в том числе с инверсиями, на фоне слабо изменяющегося поля скорости. Сравнительный анализ результатов численного эксперимента для допустимых параметров модели с ранее полученными результатами при постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта и интенсивности, изменяющейся по показательному закону с заданным постоянным значением коэффициента затухания.

## Математическая модель

Подробное описание перемасштабирования и обезразмеривания МГД-системы проведено в статье [6], поэтому в рамках данной работы приведём уже преобразованную систему МГД-уравнений с включённой аддитивной поправкой  $Z(t)$  интен-

сивности турбулентного эффекта

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= P_m \Delta \mathbf{v} - \nabla P - E^{-1} P_m (\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + f_{\text{out}} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= Re_m [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] + (R_\alpha - Z(t)) [\nabla \times \alpha(r, \theta) \mathbf{B}] + \Delta \mathbf{B}, \\
 \nabla \mathbf{v} &= 0, \\
 \nabla \mathbf{B} &= 0, \\
 \mathbf{v} \left( \frac{r_1}{L} \right) &= \mathbf{v} \left( \frac{r_2}{L} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

где безразмерные величины:  $\mathbf{v}$  – амплитуда поля скорости,  $\mathbf{B}$  – амплитуда индукции магнитного поля,  $f_{\text{out}}$  – массовая плотность внешних сил,  $P$  – давление,  $P_m = \nu/\nu_m$  – магнитное число Прандтля,  $E = \nu/(\Omega L^2)$  – число Экмана,  $\alpha(r, \theta) = \alpha_0 a(r) \cos \theta$  – скалярная параметризация  $\alpha$ -эффекта,  $\alpha_0$  – интенсивность  $\alpha$ -эффекта, управляющие параметры:  $Re_m = \mu_0 L/\nu_m$  – магнитное число Рейнольдса, которое отвечает за воздействие крупномасштабного генератора,  $R_\alpha = \alpha_0 L/\nu_m$  – амплитуда  $\alpha$ -эффекта, в которой заложена информация о турбулентном генераторе, выражены через величины:  $L$  [м] – радиус внешнего ядра,  $\nu$  [м<sup>2</sup>/с] – кинематическая вязкость,  $\rho_0 = 7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность,  $\nu_m$  [м<sup>2</sup>/с] – магнитная вязкость,  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы-векторы внутренней и внешней границ сферической оболочки жидкого ядра,  $\mu_0$  [м/с] – характерная величина скорости,  $\Omega$  [1/с] – угловая скорость вращения, единица времени  $L^2/\nu_m$  [с] – время диссипации магнитного поля с периодом  $10^4$  лет.

Процесс  $Z(t)$  регулирует степень влияния турбулентного эффекта, силу воздействия процесса определяет квадратичная форма  $Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau))$  – энергия магнитного поля, а характер воздействия – безразмерное ядро  $J(t-\tau)$  – знакопеременная функция, задающая затухающие колебания с коэффициентом затухания  $b = 0.1$  и частотой  $a$ :

$$Z(t) = \int_0^t J(t-\tau) Q(\mathbf{B}(\tau), \mathbf{B}(\tau)) d\tau = \int_0^t \left[ e^{-b(t-\tau)} \cos(a(t-\tau)) \right] B^2(\tau) d\tau. \tag{2}$$

Воздействие энергии поля максимально в момент времени  $t$ , а влияние в предыдущие моменты времени постепенно уменьшается с удалением от  $t$  к начальному моменту времени (нулю).

Для решения МГД-системы (1) используем маломодовое приближение галёркинско-го типа [3, 4, 15]. Известно, что источником для тороидальной (полоидальной) компоненты магнитного поля является нелинейное взаимодействие полоидальной (тороидальной) компоненты этого поля с жидким потоком, поэтому для численного решения используются четыре моды – одна гидродинамическая и три магнитных: одна тороидальная и две полоидальных [4]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \mathbf{u}(t) \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}(t) (\alpha_1 \mathbf{v}_{0,1,0}^T + \alpha_2 \mathbf{v}_{0,2,0}^P + \alpha_3 \mathbf{v}_{0,3,0}^T + \alpha_{11} \mathbf{v}_{1,1,0}^T + \alpha_{13} \mathbf{v}_{1,3,0}^T), \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_2^T(t) \mathbf{B}_{0,2,0}^T(r) + \mathbf{B}_1^P(t) \mathbf{B}_{0,1,0}^P(r) + \mathbf{B}_3^P(t) \mathbf{B}_{0,3,0}^P(r),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где  $v_0$  – мода Пуанкаре [3],  $|v_0| = 1$ ,  $u(t)$  – амплитуда скорости,  $B_{0,1,0}^P(r)$  дипольная составляющая магнитного поля, которая под воздействием дифференциального вращения порождает тороидальную  $B_{0,2,0}^T(r)$  и полоидальную  $B_{0,3,0}^P(r)$  составляющие. Компоненты поля скорости и магнитного поля в данной модели независимы.

Подставим в систему (1) разложения (3) и функционал (2) и применим метод Галёркина. Результатом этих преобразований является система, которая используется для численной реализации с помощью неявного метода Эйлера,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -P_m u(t) \sum_k \alpha_k^2 \lambda_k + f_{out} + \sum_{i,j,k} \alpha_i L_{ijk} B_j B_k, \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} &= Re_m u(t) \sum_{j,k} \alpha_j W_{ijk} B_k - \mu_i B_i + (R_\alpha - Z) \sum_k W_{ik}^\alpha B_k, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= \sum_k B_k^2 - bZ - aZ_s, \quad \frac{\partial Z_s}{\partial t} = aZ - bZ_s, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\lambda_i$  – собственное значение моды Пуанкаре [16],  $\mu_i$  – коэффициент вязкой диссипации [16], коэффициенты  $L_{ijk}$ ,  $W_{ijk}$ ,  $W_{ij}^\alpha$  – объемные интегралы от рассматриваемых полей [17], значения коэффициентов  $\alpha_i$  вычислялись из задачи Пуанкаре о свободных малых колебаниях вязкой вращающейся жидкости [3].

Принятое значение шага  $h$  на два порядка меньше наименьшего из значений  $(1/\lambda_i)$  и  $(1/\mu_i)$ , т. е. времён затухания полей скорости и магнитного соответственно. Выбор начальных условий обеспечивает выход системы (4) из точки покоя в начальный момент времени  $t = 0$  и дальнейшую взаимную генерацию компонент магнитного поля и поля скорости

$$u(0) = 1, \quad B_2^T(0) = 0, \quad B_1^P(0) = 1, \quad B_3^P(0) = 0, \quad Z(0) = 0, \quad Z_s(0) = 0.$$

Затухающий эффект в поле скорости компенсируется воздействием внешних сил, поэтому в численной реализации значение массовой плотности внешних сил  $f_{out}$  принято равным коэффициенту при  $u(t)$  [6]. Численная модель рассматривается для управляющих параметров, изменяющихся в диапазонах  $Re_m \in (0, 1000]$  и  $R_\alpha \in (0, 100]$ , с шагом равным пяти.

## Характеристики функции ядра $J(t)$

Регулирование воздействия турбулентного генератора в рассматриваемой модели задаётся процессом  $Z(t)$  с конечным временем ожидания  $t_0$  («памяти»), которое определяется выбором знакопеременной затухающей функции в качестве ядра  $J(t)$  (рис.1). При постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта в результате действия турбулентного генератора были получены три режима генерации магнитного поля в зависимости от параметров, определяющих влияние крупномасштабного и турбулентного генераторов. Наибольшая из трёх областей – область неограниченного возрастания магнитного поля (рис.2а), поэтому регулирование воздействия турбулентного генератора сводится к подавлению интенсивности  $\alpha$ -эффекта.

Выбор процесса  $Z(t)$  в виде (2) определяет его суммарное воздействие на промежутке времени  $[0, t]$ , основной вклад в которое вносится в течение времени

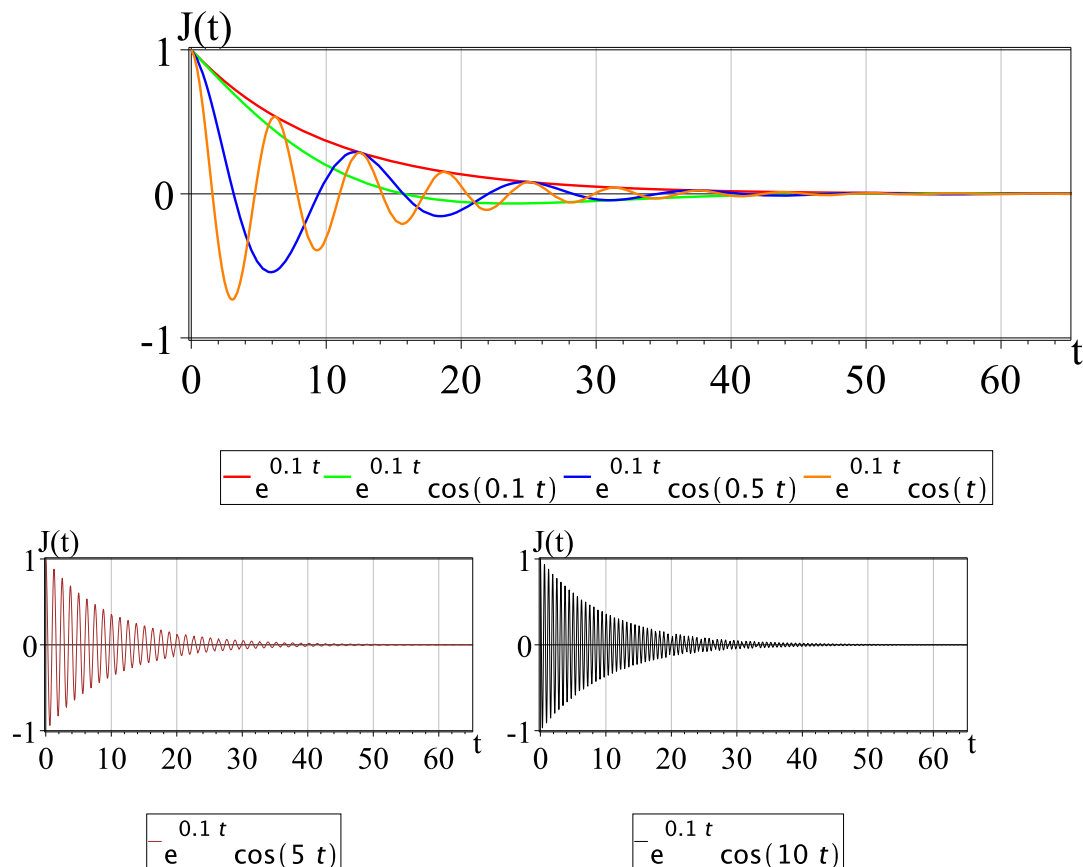


Рис. 1. Графики функции ядра  $J(t) = e^{0.1t} \cos at$  функционала  $Z(t)$ .  
 [Figure 1. The graphs of the kernel function  $J(t) = e^{0.1t} \cos at$  of the functional  $Z(t)$ .]

ожидания  $t_0$ . Воздействие процесса максимально в момент времени  $t$  и постепенно ослабевает при удалении по временной оси от этой точки к нулю. Так как функция ядра  $J(t)$  – знакопеременная, то эффект от воздействия – подавление или подкачка – определяется знаком полученной интегральной характеристики процесса  $Z(t)$ .

Для вычисления основной характеристики процесса, времени ожидания  $t_0$ , используется нормированная функция  $\tilde{J}(t)$  от модуля ядра  $J(t)$ :  $\tilde{J}(t) = k|J(t)|$ , где  $k$  – нормирующий множитель, определялся из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} k|J(t)| dt = k \int_0^{\infty} e^{-bt} |\cos(at)| dt = 1.$$

Тогда математическое ожидание случайной величины  $T$ , заданной знакоположительной функцией  $\tilde{J}(t)$ , это время ожидания  $\tilde{t}_0$ :

$$\tilde{t}_0 = M(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t \tilde{J}(t) dt = \int_0^{\infty} t k e^{-bt} |\cos(at)| dt = k \int_0^{\infty} t e^{-bt} |\cos(at)| dt. \quad (5)$$

Из (5) время ожидания  $t_0$  можно выразить следующим образом с помощью интеграла

$$t_0 = \frac{\tilde{t}_0}{k} = \int_0^{\infty} te^{-bt} |\cos(at)| dt. \quad (6)$$

Несобственный интеграл в правой части равенства (6) вычисляется аналитически. Раскрытие модуля преобразует исходный интеграл в сумму трёх интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} te^{-bt} |\cos(at)| dt &= \int_0^{\pi/2a} te^{-bt} \cos(at) dt + \int_{3\pi/2a+2\pi k/a}^{5\pi/2a+2\pi k/a} te^{-bt} \cos(at) dt - \\ &- \int_{\pi/2a+2\pi k/a}^{3\pi/2a+2\pi k/a} te^{-bt} \cos(at) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

К каждому из интегралов в правой части равенства (7) применяется интегрирование по частям

$$\int_0^{\pi/2a} te^{-bt} \cos(at) dt = \frac{(b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(\pi(a^2 + b^2) + 4ab)e^{-\pi b/2a}}{2(a^2 + b^2)^2}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{3\pi/2a+2\pi k}^{5\pi/2a+2\pi k} te^{-bt} \cos(at) dt &= \left( (3\pi(a^2 + b^2) + 4ab + 4\pi(a^2 + b^2)k)e^{-3\pi b/2a} + \right. \\ &\left. + (5\pi(a^2 + b^2) + 4ab + 4\pi(a^2 + b^2)k)e^{-5\pi b/2a} \right) \frac{e^{-2\pi b k/a}}{2(a^2 + b^2)^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2a+2\pi k}^{3\pi/2a+2\pi k} te^{-bt} \cos(at) dt &= - \left( (3\pi(a^2 + b^2) + 4ab + 4\pi(a^2 + b^2)k)e^{-3\pi b/2a} + \right. \\ &\left. + (\pi(a^2 + b^2) + 4ab + 4\pi(a^2 + b^2)k)e^{-\pi b/2a} \right) \frac{e^{-2\pi b k/a}}{2(a^2 + b^2)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляем решения (8)-(10), зависящие от параметров  $a$  и  $b$  функционала  $Z(t)$ , в выражение (7) для вычисления несобственного интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} te^{-bt} |\cos(at)| dt &= \frac{1}{2(a^2 + b^2)^2} \left( 2(b^2 - a^2) + \right. \\ &+ (\pi(a^2 + b^2) + 4ab)e^{-\pi b/2a} + (2\pi(a^2 + b^2)(e^{-3\pi b/2a} + 2e^{-5\pi b/2a}) + \\ &+ (\pi(a^2 + b^2) + 4ab)(e^{-\pi b/2a} + 2e^{-3\pi b/2a} + e^{-5\pi b/2a})) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi b k/a} + \\ &\left. + 4\pi(a^2 + b^2)(e^{-\pi b/2a} + 2e^{-3\pi b/2a} + e^{-5\pi b/2a}) \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-2\pi b k/a} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Решение (11) содержит сходящиеся ряды. Первый ряд является бесконечно убывающей геометрической прогрессией с первым членом равным единице и частным

$q = e^{-2\pi b/a}$ , а его сумма имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\pi b k/a} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi b/a}}. \tag{12}$$

Второй ряд может быть записан в следующей форме

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-2\pi b k/a} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} e^{-2\pi b p/a}$$

и сведён к вычислению суммы бесконечно убывающих геометрических прогрессий с первым членом равным  $e^{-2\pi b p/a}$  и частным  $q = e^{-2\pi b/a}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-2\pi b k/a} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=k}^{\infty} e^{-2\pi b p/a} = \frac{e^{-2\pi b/a}}{(1 - e^{-2\pi b/a})^2}. \tag{13}$$

Замена рядов на их суммы (12) и (13) в интеграле (11) даёт аналитическое решение для вычисления времени ожидания  $t_0$ , зависящее от параметров  $a$  и  $b$  ядра  $J(t)$ ,

$$\begin{aligned} t_0 = \int_0^{\infty} t e^{-bt} |\cos(at)| dt = & \frac{1}{2(a^2 + b^2)^2} \left( 2(b^2 - a^2) + \right. \\ & + (\pi(a^2 + b^2) + 4ab)e^{-\pi b/2a} + \left( 2\pi(a^2 + b^2)(e^{-3\pi b/2a} + 2e^{-5\pi b/2a}) + \right. \\ & \left. \left. + (\pi(a^2 + b^2) + 4ab)(e^{-\pi b/2a} + 2e^{-3\pi b/2a} + e^{-5\pi b/2a}) \right) \frac{1}{1 - e^{-2\pi b/a}} + \right. \\ & \left. + 4\pi(a^2 + b^2)(e^{-\pi b/2a} + 2e^{-3\pi b/2a} + e^{-5\pi b/2a}) \frac{e^{-2\pi b/a}}{(1 - e^{-2\pi b/a})^2} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

В Таблице 1 представлены вычисленные значения времени ожидания  $t_0$  с использованием решения (14) при выбранных значениях частоты затухания  $a$  и постоянном значении коэффициента затухания  $b = 0.1$ , а также интегральные характеристики функции  $J(t)$  и её модуля.

Таблица 1

Характеристики функции ядра  $J(t) = e^{-0.1t} \cos(at)$  [Characteristics of the kernel function  $J(t) = e^{-0.1t} \cos(at)$ ]

$a$	$t_0$	$\int_0^{t_0}  J(t)  dt$	$\int_0^{\infty}  J(t)  dt$	$\int_0^{t_0} J(t) dt$	$\int_0^{\infty} J(t) dt$
1	2	3	4	5	6
0	100	9.999	10	9.999	10
0.1	57.5	7.147	7.173	4.978	5
0.5	56.6	6.385	6.406	0.3855	0.3846
1	59.4	6.359	6.376	0.1	0.099
5	62.7	6.3552	6.367	0.0038	0.0039
10	63.2	6.3548	6.366	0.00096	0.00099

Сравнение значений интегралов от функции  $J(t)$  и её модуля показывает, что суммарное воздействие  $J(t)$  (таб.1, пятый столбец) в течение времени ожидания  $t_0$  меньше суммарного воздействия  $|J(t)|$  (таб.1, третий столбец) и при увеличении значений частоты затухания  $\alpha$  это различие увеличивается на несколько порядков. Следовательно, несмотря на увеличение времени ожидания  $t_0$ , при увеличении значений частоты  $\alpha$ , эффект от воздействия процесса  $Z(t)$  на турбулентный генератор будет уменьшаться.

## Результаты моделирования и обсуждение

Исследуем влияние частоты затухающих колебаний  $\alpha$  функционала подавления  $Z(t)$  на характер генерации магнитного поля при постоянном коэффициенте затухания  $b = 0.1$ . Результаты численного моделирования при заданных параметрах модели представлены на фазовой плоскости управляющих параметров  $Re_m$ ,  $R_\alpha$  (рис.2). На рисунке 2а изображены области трёх режимов генерации магнитного поля (затухающий, регулярный, бесконечное возрастание магнитного поля), полученные при постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта [6]. В сравнении рассмотрим остальные результаты моделирования, когда введено подавление турбулентного генератора процессом  $Z(t)$ . Отметим, что использование в качестве ядра функций  $J(t) = e^{0.1t}$  [6] и  $J(t) = e^{0.1t} \cos 0.1t$  привело к уменьшению области неограниченного роста (белая область) магнитного поля и увеличению количества режимов генерации магнитного поля (рис.2б, в). Схожие результаты (есть небольшое отличие конфигураций областей с режимами васцилляции (жёлтая) и динамо-всплеска (фиолетовая)) определяются близкими значениями числовых характеристик (таб.1) выбранных функций ядра (рис.1), а влияние «хвостов» – незначительно.

Таблица 2

### Наличие осцилляций в поле скорости [Presence of oscillations in the velocity field]

Режимы генерации магнитного поля	$\alpha$				
	0.1	0.5	1	5	10
затухающий	н	н	н	н	н
стационарный	-	н	н	н	б
динамо-всплеск	н	м	м	б	б
васцилляция	н	м	м	б	б
регулярные	н	м	м (б: [300,470])	б (м: [180,300])	б (м: [165,210] [350,370])
хаотические	-	б	б	б	б

Обозначения: н – нет; м – есть малой амплитуды (менее 0.05), б – есть большой амплитуды.

В скобках указаны интервалы по оси  $Re_m$ .

[Notation: n – no; m – there is a small amplitude (less than 0.05), b – there is a large amplitude.

The intervals along the axis  $Re_m$  are indicated in brackets]



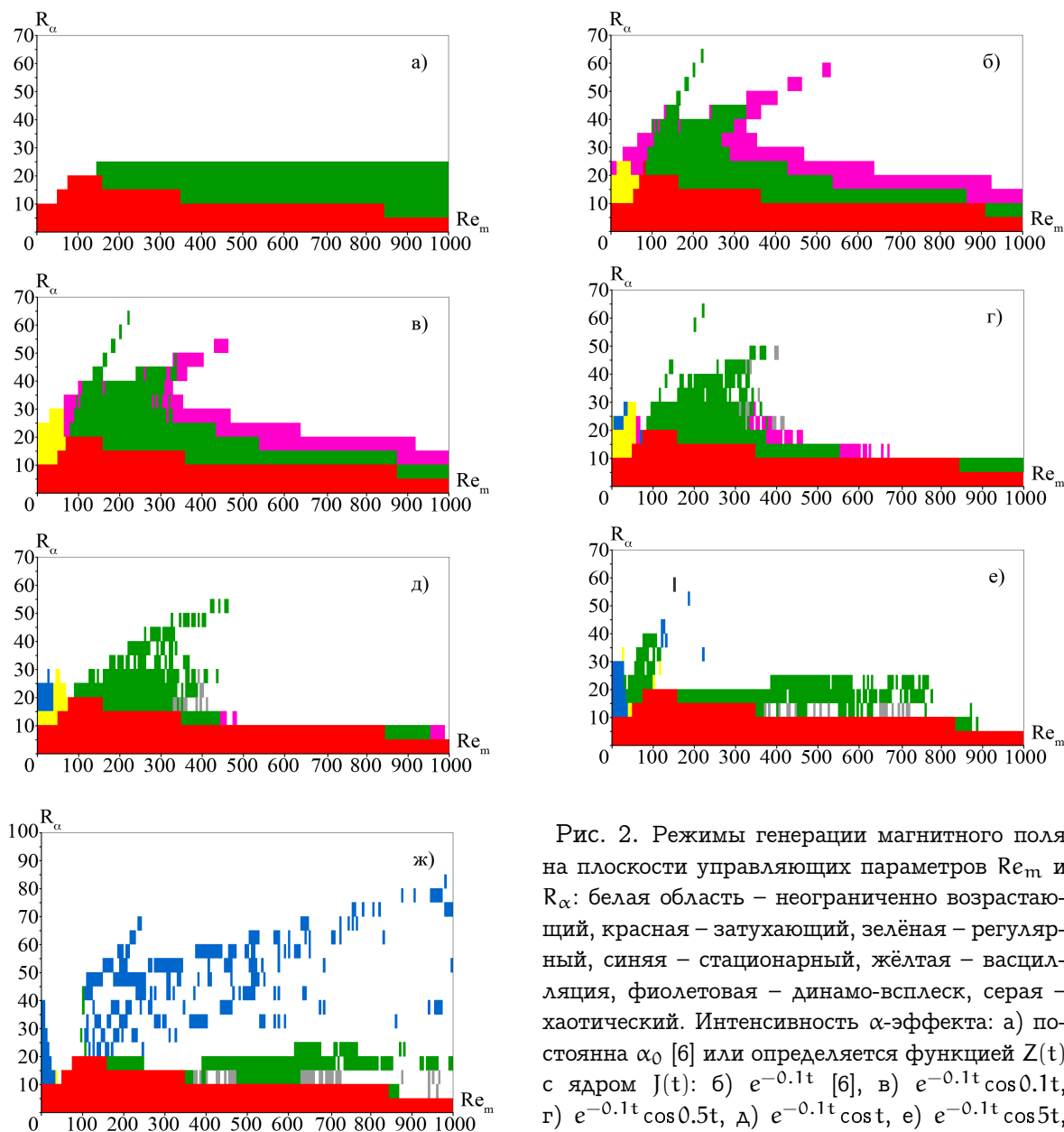


Рис. 2. Режимы генерации магнитного поля на плоскости управляющих параметров  $Re_m$  и  $R_\alpha$ : белая область – неограниченно возрастающий, красная – затухающий, зелёная – регулярный, синяя – стационарный, жёлтая – васцилляция, фиолетовая – динамо-всплеск, серая – хаотический. Интенсивность  $\alpha$ -эффекта: а) постоянна  $\alpha_0$  [6] или определяется функцией  $Z(t)$  с ядром  $J(t)$ : б)  $e^{-0.1t}$  [6], в)  $e^{-0.1t} \cos 0.1t$ , г)  $e^{-0.1t} \cos 0.5t$ , д)  $e^{-0.1t} \cos t$ , е)  $e^{-0.1t} \cos 5t$ , ж)  $e^{-0.1t} \cos 10t$ .

[Figure 2. The modes of magnetic field generation on plane of the parameters  $Re_m$  and  $R_\alpha$ : the white region is the increases infinitely magnetic field, the red one is the damped, the green one is the steady, the blue one is the steady-state, the yellow one is the vacillation, the lilac one is the dynamo-burst, the grey one is the chaotic. The  $\alpha$ -effect intensity is: а) the  $\alpha_0$  [6] or defined by the function  $Z(t)$  with the kernel  $J(t)$ : б)  $e^{-0.1t}$  [6], в)  $e^{-0.1t} \cos 0.1t$ , г)  $e^{-0.1t} \cos 0.5t$ , д)  $e^{-0.1t} \cos t$ , е)  $e^{-0.1t} \cos 5t$ , ж)  $e^{-0.1t} \cos 10t$ .]

При увеличении частоты затухающих колебаний ( $\alpha \geq 0.5$ ) области всех режимов генерации магнитного поля на плоскости управляющих параметров модели сокращаются и уменьшается разнообразие генерируемых режимов. На границе с областью неограниченного роста магнитного поля появляются области хаотического режима, всегда сопровождающиеся осцилляциями в поле скорости. Начиная со значения  $\alpha = 1$  при генерации регулярного режима магнитного поля, появляются области с сильными осцилляциями в поле скорости (таб.2).

Таким образом, можно сделать вывод, что включение в МГД-систему процесса  $Z(t)$ , регулирующего интенсивность  $\alpha$ -эффекта, приводит к сокращению области неограниченного роста магнитного поля при  $0 < \alpha < 1$  (рис.2 в, г). В этих границах изменения значений частоты  $\alpha$  затухающих колебаний получено большее разнообразие режимов генерации магнитного поля на фоне слабо изменяющегося поля скорости по сравнению со случаем постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта (рис.2 а) [6]. Если сравнивать с результатами для функции ядра  $J(t) = e^{0.1t}$  (рис.2 б) [6], то при  $\alpha = 0.1$  наблюдается увеличение областей регулярного режима и васцилляции, размеры которых сокращаются при увеличении  $\alpha$ .

На основании полученных результатов численного моделирования и анализа характеристик процесса  $Z(t)$  применимость модели при коэффициенте затухания  $b = 0.1$  ограничена значениями частоты  $\alpha \leq 1$ , а также значениями управляющих параметров модели  $Re_m$ ,  $R_\alpha$ , из которых должны быть исключены промежутки с большими амплитудами осцилляций в поле скорости.

## Заключение

Использование в крупномасштабной модели  $\alpha\Omega$ -динамо в качестве регулятора интенсивности  $\alpha$ -эффекта процесса  $Z(t)$ , который задаётся функционалом со знакопеременным ядром  $J(t) = e^{0.1t} \cos \alpha t$ , позволило получить такие виды генерации магнитного поля, как стационарный, регулярный, васцилляция, динамо-всплеск, на фоне слабо изменяющегося поля скорости для значений частоты затухающих осцилляций  $\alpha \leq 1$  при условии исключения определённых значений управляющих параметров  $Re_m$ ,  $R_\alpha$ .

Область генерации бесконечно возрастающего магнитного поля уменьшилась в сравнении с картиной на фазовой плоскости, полученной при постоянной интенсивности  $\alpha$ -эффекта [6]. При увеличении значений частоты  $\alpha$  до значения единица области ограниченных незатухающих режимов генерации магнитного поля постепенно уменьшаются по сравнению с картиной на фазовой плоскости для функции ядра  $J(t) = e^{0.1t}$  [6].

Увеличение значений частоты  $\alpha$  приводит к увеличению времени ожидания, но уменьшению суммарного накопленного эффекта и, как следствие, ослаблению подавляющего воздействия процесса  $Z(t)$  на турбулентный генератор.

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Автор несёт полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печатном виде. Окончательный вариант рукописи был одобрен автором.

## Список литературы

1. Водинчар Г. М., Паровик Р. И., Пережогин А. С., Шереметьева О. В. Работы по моделированию физических процессов и систем в институте космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, *История науки и техники*, 2017. №8, С. 100–112.
2. Водинчар Г.М. Использование собственных мод колебаний вязкой вращающейся жидкости в задаче крупномасштабного динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2013. №2(7), С. 33–42 DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42.
3. Feshchenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 2015. vol. 22, no. 4, pp. 361-369 DOI: 10.5194/npg-22-361-2015.
4. Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core, *Magnetohydrodynamics*, 2016. vol. 52, no. 1, pp. 287-300.
5. Godomskaia A. N., Sheremetyeva O. V. Reversals in the low-mode model dynamo with  $\alpha\Omega$ -generators, *E3S Web of Conferences*, 2018. vol. 62, pp. 02016 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202016.
6. Шереметьева О. В., Годомская А. Н. Моделирование режимов генерации магнитного поля в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо с изменяющейся интенсивностью  $\alpha$ -эффекта, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2021. Т. 14, №2, С. 27–38 DOI: 10.14529/mmp210203.
7. Шереметьева О. В. Режимы генерации магнитного поля в маломодовой модели  $\alpha\Omega$ -динамо с динамическим подавлением  $\alpha$ -эффекта энергией поля, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. №4(37), С. 92–103 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-92-103.
8. Godomskaia A. N., Sheremetyeva O. V. The modes of magnetic field generation in a low-mode model of  $\alpha\Omega$ -dynamo with  $\alpha$ -generator varying intensity regulated by a function with an alternating kernel, *EPJ Web of Conferences*, 2021. vol. 254, pp. 02015 DOI: 10.1051/epjconf/202125402015.
9. Parker, E.N. Hydromagnetic dynamo models, *Astrophys. J.*, 1955. no. 122, pp. 293–314.
10. Steenbek M., Krause F. Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder. I. Berechnung sonnenähnlicher Wechselfeldgeneratoren, *Astron. Nachr.*, 1969. no. 291, pp. 49–84.
11. Zeldovich Ya. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D. *Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics*. New York: Gordon and Breach, 1983. 382 pp.
12. Krause F., Rädler K.H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Oxford: Pergamon Press, 1980. 271 pp.
13. Соколов Д. Д., Нефедов С. Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо, *Выч. мет. программирование*, 2007. Т. 8, №2, С. 195–204.
14. Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996. 531 pp.
15. Гледзер Е. В., Должанский Ф. В., Обухов А. М. *Системы гидродинамического типа и их применение*. М.: Наука, 1981. 368 с.
16. Водинчар Г. М. База данных «Параметры собственных мод свободных колебаний МГД полей в ядре Земли». гос. рег. 2019620054, 2019.
17. Водинчар Г. М., Фещенко Л.К. Библиотека программ для исследования «Маломодовой модели геодинамо» «LowModedGeodynamoModel». гос. рег. 50201100092, 2011.



Шереметьева Ольга Владимировна ✉ – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Россия, ORCID 0000-0001-9417-9731.



Sheremetyeva Olga Vladimirovna ✉ – PhD (Tech.), Research Scientist, Laboratory of Physical Process Modeling, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0001-9417-9731.


## Dynamics of generation modes changes in magnetic field depending on the oscillation frequency of the $\alpha$ -effect suppression process by field energy in the $\alpha\Omega$ -dynamo model

*O. V. Sheremetyeva*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS,  
684034 Kamchatka region, Elizovskiy district, Paratunka, Mirnaya str., 7, Russia  
E-mail: sheremeteva@ikir.ru


This article considers a  $\alpha\Omega$ -dynamo large-scale model in a low-mode approximation. The intensity of the  $\alpha$ -effect is regulated by a process with hereditary properties, depending on the energy of the magnetic field. The nature of the process impact is determined by an alternating kernel function with a variable damping frequency and a constant damping coefficient equal to 0.1. Based on the results of numerical simulation of the magnetic field generation modes, the boundaries for the values of the model parameters are determined for which there are no oscillations in the velocity field of a viscous liquid or they are insignificant. The results of magnetic field generation modes simulation at various damping frequency values are displayed on the phase plane of the control parameters. These parameters contain information about large-scale and turbulent generators. The paper investigates the question about the dynamics of changes in the pattern on the phase plane depending on the value of the damping frequency and the waiting time. A comparison is made with the results obtained earlier for the constant intensity of the  $\alpha$ -effect and for the intensity, the change of which is determined by the process with exponential kernel.

*Key words:* low-mode dynamo model,  $\alpha\Omega$ -dynamo,  $\alpha$ -effect, magnetic field, reversals.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119

Original article submitted: 29.11.2022

Revision submitted: 06.12.2022

**For citation.** Sheremetyeva O. V. Dynamics of generation modes changes in magnetic field depending on the oscillation frequency of the  $\alpha$ -effect suppression process by field energy in the  $\alpha\Omega$ -dynamo model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, 41: 4, 107-119.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-41-4-107-119

**Competing interests.** The author declare that there is no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author. *The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License* (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Sheremetyeva O. V., 2022

**Funding.** The work was carried out within the framework of the state assignment on the topic «Physical processes in the system of near space and geospheres under solar and lithospheric influences» (No. AAAA-A21-121011290003-0).

## References

- [1] Vodinchar G. M., Parovik R. I., Perezhogin A. S., Sheremetyeva O. V. Simulation of physical processes and systems in institute of cosmophysical research and radio wave propagation FEB RAS [Raboty po modelirovaniyu fizicheskikh processov i sistem v institute kosmofizicheskikh issledovaniy i rasprostraneniya radiovoln DVO RAN], History of Science and Engineering [Istoriya nauki i tehniki], 2017, 8, 100-112. (In Russian)
- [2] Vodinchar G. M. Using Modes of Free Oscillation of a Rotating Viscous Fluid in the Large-Scale Dinamo, Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci., 2013, 2(7), 33-42. (In Russian) DOI: 10.18454/2079-6641-2013-7-2-33-42
- [3] Feshchenko L. K., Vodinchar G. M. Reversals in the large-scale  $\alpha\Omega$ -dynamo with memory, Nonlinear Processes in Geophysics, 2015, 22: 4, 361-369 DOI: 10.5194/npg-22-361-2015
- [4] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Model of geodynamo driven by six-jet convection in the Earth's core, Magnetohydrodynamics, 2016, 52:1, 287-300.
- [5] Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversals in the low-mode model dynamo with  $\alpha\Omega$ -generators, E3S Web of Conferences, 2018, 62, 02016. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202016
- [6] Sheremetyeva O. V., Godomskaya A. N. Modelling the magnetic field generation modes in the low-mode model of the  $\alpha\Omega$ -dynamo with varying intensity of the  $\alpha$ -effect, Bulletin of the South Ural State University, Series «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software», 2021, vol. 14, no. 2, pp. 27-38 (In Russian DOI: 10.14529/mmp210203).
- [7] Sheremetyeva O.V. Modes of magnetic field generation in the low-mode  $\alpha\Omega$ -dynamo model with dynamic regulation of the  $\alpha$ -effect by the field energy. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2021, 37:4, 92-103 (In Russian DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-92-103).
- [8] Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. The modes of magnetic field generation in a low-mode model of  $\alpha\Omega$ -dynamo with  $\alpha$ -generator varying intensity regulated by a function with an alternating kernel, EPJ Web of Conferences, 2021, 254, 02015. DOI: 10.1051/epjconf/202125402015
- [9] Parker, E.N. Hydromagnetic dynamo models, Astrophys. J., 1955, 122, 293-314.
- [10] Steenbek M., Krause F. Zur Dynamotheorie stellarer und planetarer Magnetfelder I. Berechnung sonnenähnlicher Wechselfeldgeneratoren, Astron.Nachr., 1969, 291, 49-84.
- [11] Zeldovich Ya. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. Gordon and Breach: New York, 1983, 382.
- [12] Krause F., Rädler K.H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Pergamon Press: Oxford, 1980, 271.
- [13] Sokoloff D. D., Nefedov S. N. A small-mode approximation in the stellar dynamo problem, Num. Meth. Prog., 2007, 8:2, 195-204 (In Russian <http://mi.mathnet.ru/vmp485>).
- [14] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. Academic Press: London, 1996, 531.
- [15] Gledzer E. B., Dolzhanskiy F. V., Obukhov A. M. Sistemy gidrodinamicheskogo tipa i ikh primeneniye [Hydrodynamic Type Systems and Their Application]. Nauka: Moscow, 1981, 368 (In Russian).
- [16] Vodinchar G. M. Baza dannyh «Parametry sobstvennyh mod svobodnyh kolebaniy MGD polej v yadre Zemli» [Database «Parameters of natural modes of normal oscillations of MHD fields in the Earth's core»], 2019620054, 2019 (In Russian).
- [17] Vodinchar G. M., Feshchenko L. K. Biblioteka programm dlya issledovaniya «Malomodovoj modeli geodinamo» [Library of programs for researching «Low-mode geodynamo model» «LowModedGeodinamoModel»], 50201100092, 2011 (In Russian).