УДК 517.95 Научная статья

Решение краевой задачи для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной

О. Х. Масаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,
Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а, Россия
E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

В работе исследована краевая задача Дирихле в верхней полуплоскости для уравнения в частных производных второго порядка, содержащего композицию операторов дробного дифференцирования Римана-Лиувилля по одной из двух независимых переменных. Рассматриваемое уравнение при целом значении порядка дробного дифференцирования переходит в уравнение Лапласа от двух независимых переменных. Получено представление решения исследуемой задачи в явном виде (в терминах функции типа Миттаг-Леффлера) методом интегрального преобразования Фурье. Найдены асимптотические оценки частного решения и его производных. Доказаны теоремы о существовании и единственности регулярного решения. Существование решения доказано в классе непрерывных функций с весом в замкнутой полуплоскости. Единственность решения доказана в классе непрерывно дифференцируемых функций по пространственной переменной и имеющих соответствующую непрерывную дробную производную с весом по временной переменной в замкнутой полуплоскости.

Ключевые слова: дробная производная, функция типа Миттаг-Леффлера, обобщенное уравнение Лапласа с дробной производной, задача Дирихле.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-53-63

Поступила в редакцию: 10.10.2022 В окончательном варианте: 03.11.2022

Для цитирования. Масаева О. Х. Решение краевой задачи для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. С. 53-63. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-53-63

Финансирование. Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ "Нелинейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения и краевые задачи" (проект FEGS-2020-0001)

Введение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}u(x,y)=0, \qquad (1)$$

где $\alpha,\beta\in(0,1]$, D_{0y}^{ν} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля порядка ν [1, с. 9],

$$D_{0y}^{\nu}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^y\frac{u(x,t)dt}{(y-t)^{\nu+1}}, \quad \nu<0;$$

$$D_{0y}^{\nu}u(x,y)=u(x,y), \quad \nu=0;$$

$$D_{0y}^{\nu}u(x,y)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}D_{0y}^{\nu-n}u(x,y), \quad n-1<\nu\le n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Дифференциальные уравнения дробного порядка в последние годы исследуются очень активно. Это связано с широкими приложениями в физике и моделировании (см., например, [1], [3], [5], [14], [17], [18]). Укажем в этой связи монографии [2], [4], [6], [13], [16], а также работу [7], содержащую более полную библиографию по данному вопросу.

В работе [8] получено представление решения краевой задачи для уравнения (1) в верхней полуплоскости в случае, когда $\alpha=\beta$. В работе [9] исследована задача Неймана для такого же уравнения. В работе [10] рассмотрено уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}u_x+D_{0y}^{\beta}u_y+c(x,y)u=0, \quad 0<\alpha,\beta<1,$$

в области, целиком лежащей в первом квадранте, которая вместе с любой точкой (x,y), принадлежащей ей, содержит интервалы с концами в точках $(x,y),(x,0)$ и $(x,y),(0,y)$.

В данной работе исследуется краевая задача с условием типа Дирихле для уравнения (1) в верхней полуплоскости. Получено представление решения исследуемой задачи методом интегрального преобразования Фурье.

Регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega=\{(x,y):x\in\mathbb{R},\,y>0\}$ назовем функцию $u(x,y)$ из класса: $y^{1-\beta}u(x,y)\in C(\bar{\Omega}),\,u(x,y)\in C^{2,0}(\Omega)$, функция $u(x,y)$ имеет непрерывные производные по y порядка $\alpha+\beta$ (т.е.$D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}u(x,y)$) в области Ω и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω.

Задача. *Найти в области Ω регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)=\tau(x), \quad x\in\mathbb{R}, \qquad (2)$$

где $\tau(x)$ – заданная непрерывная на всей действительной оси функция.

Формулировка результатов

Теорема. *Пусть* $\alpha < \beta$, $\tau(x)$ *– ограниченная функция. Тогда функция* $u(x,y)$, *определенная по формуле*

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(s)\nu(s-x,y)ds, \tag{3}$$

где

$$\nu(x,y) = \frac{y^{\alpha+\beta-1}\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\omega|x|}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\omega^2 y^{\alpha+\beta}\right)d\omega, \tag{4}$$

является регулярным решением задачи (1), (2).

Здесь $E_{\rho,\mu}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)}$ – функция типа Миттаг–Леффлера [11].

Лемма 1. *Справедлива оценка*

$$|\nu(x,y)| \le C\frac{y^{\alpha+\beta-1}}{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha}+|x|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}} \tag{5}$$

где C*—некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Сделаем в формуле (4) замену переменной интегрирования $\omega = \frac{\sqrt{t}}{y^{(\alpha+\beta)/2}}$, имеем равенство

$$\nu(x,y) = \frac{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1-\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{t}}{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}|x|}t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1/2}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-t)dt. \tag{6}$$

Заметим, что если $x = 0$ имеем

$$\nu(x,y)|_{x=0} = \frac{y^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{2\pi}\int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-1/2}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-t)dt < \infty. \tag{7}$$

Теперь в интеграле (6) сделаем замену переменной $t = \frac{ly^{\alpha+\beta}}{|x|^2}$, тогда будем иметь

$$\nu(x,y) = \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha+\beta-1}}{2\pi|x|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{l}}l^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}-\frac{1}{2}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\frac{y^{\alpha+\beta}l}{|x|^2}\right)dl.$$

Следовательно,

$$\nu(x,y) = O\left(\frac{y^{\alpha+\beta-1}}{|x|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\right), \quad |x| \to \infty. \tag{8}$$

Учитывая формулы (7) и (8) получаем оценку (5). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Функция* $\nu(x,y)$ *удовлетворяет уравнению (1) как функция переменных* x *и* y.

Доказательство. Из формулы (4) получим

$$\nu_{xx}(x,y)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha+\beta-1}}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega|x|}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}+2}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-\omega^2y^{\alpha+\beta})d\omega. \qquad (9)$$

Теперь найдем функцию $D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}\nu$ и сравним с интегралом (9). Подействуем оператором D_{0y}^{β}, а затем оператором D_{0y}^{α} на подынтегральную функцию в формуле (4) (см. формулу дробного дифференцирования функции типа Миттаг-Леффлера [2, с. 15])

$$D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}y^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right)=D_{0y}^{\alpha}y^{\alpha-1}E_{\alpha+\beta,\alpha}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right),$$

$$D_{0y}^{\alpha}y^{\alpha-1}E_{\alpha+\beta,\alpha}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right)=y^{-1}E_{\alpha+\beta,0}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right).$$

Вспомним формулу $E_{\rho,\mu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}+zE_{\rho,\mu+\rho}(z)$. Тогда получим $y^{-1}E_{\alpha+\beta,0}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right)=-\omega^2y^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right)$.

Итак,

$$D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}\nu(x,y)=-\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha+\beta-1}}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\omega|x|}\omega^{2+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\omega^2y^{\alpha+\beta}\right)d\omega. \qquad (10)$$

Из формул (9) и (10) видим, что $\nu(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. $\nu_{xx}(x,y)=-D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}\nu(x,y)$. □

Лемма 3. *Пусть* $\alpha<\beta$. *Справедлива оценка*

$$|\nu_{xx}(x,y)|\leq\frac{My^{\alpha+\beta-1}}{y^{\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+\alpha}+|x|^{3+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}. \qquad (11)$$

Доказательство. Делая замену $\omega=\frac{\sqrt{t}}{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}$ в интеграле (9) имеем

$$\nu_{xx}(x,y)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+\beta-1}}{4\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{t}}{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}|x|}t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-t)dt. \qquad (12)$$

При $x=0$ отсюда имеем

$$\nu_{xx}(x,y)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{-\frac{\beta}{2}-\frac{3\alpha}{2}-1}}{4\pi}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-t)dt. \qquad (13)$$

При $t\to\infty$ $E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}(-t)=-\frac{t^{-2}}{\Gamma(-2(\alpha+\beta))}+O(\frac{1}{t^3})$. Тогда, чтобы интеграл (13) сходился, должно быть $t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\to 0$ при $t\to\infty$ или $\alpha<\beta$. Сделаем замену $t=\frac{ly^{\alpha+\beta}}{|x|^2}$ в интеграле (9). Будем иметь

$$\nu_{xx}=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha+\beta-1}}{4\pi|x|^{3+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{l}}l^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{1}{2}}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(-\frac{ly^{\alpha+\beta}}{|x|^2}\right)dl.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{xx}=O\left(\frac{y^{\alpha+\beta-1}}{|x|^{3+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\right),\quad x\to\infty. \tag{14}$$

Из формул (13) и (14) получаем оценку (11). Лемма 3 доказана.□

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 1

$$|u(x,y)|\le\frac{Cy^{\alpha+\beta-1}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau(s)|ds}{y^{\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha}+|s-x|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}.$$

Так как $\sup\limits_{-\infty<x<\infty}|\tau(x)|<K$, где K – положительное число, то имеем оценку

$$|u(x,y)|\le Ky^{\beta-1}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dl}{1+l^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}<My^{\beta-1}, \tag{15}$$

где M – некоторая постоянная.

Аналогично, по лемме 3 получаем

$$|u_{xx}|\le y^{\alpha+\beta-1}M_2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau(s)|ds}{y^{\frac{3}{2}(\alpha+\beta)+\alpha}+|s-x|^{3+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\le C_2y^{-\alpha-1}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{d\eta}{1+\eta^{3+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\le K_2y^{-\alpha-1}, \tag{16}$$

где M_1,K_2,C_2 – положительные постоянные. Из леммы 2 следует, что аналогичная оценка справедлива и для функции $D^{\alpha}_{0y}D^{\beta}_{0y}u$.

Итак, из оценок (15), (16) и леммы 2 следует законность внесения соответствующих операторов дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $D^{\alpha}_{0y}D^{\beta}_{0y}$ под знак интегралов (3) и (4).

Проверим, что полученное нами решение удовлетворяет условию (2). Применяя оператор $D^{\beta-1}_{0y}$ к интегралу, в правой части формулы (3), имеем

$$\lim_{y\to0}D^{\beta-1}_{0y}u(x,y)=\lim_{y\to0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau(s)D^{\beta-1}_{0y}\nu(s-x,y)ds, \tag{17}$$

где

$$D^{\beta-1}_{0y}\nu(s-x,y)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha}}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\omega|s-x|}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\left(-y^{\alpha+\beta}\omega^2\right)d\omega.$$

или

$$D^{\beta-1}_{0y}\nu(s-x,y)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}y^{\alpha}}{\pi|s-x|^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}+1}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\left(-\frac{y^{\alpha+\beta}\omega^2}{(s-x)^2}\right)d\omega.$$

Пусть ε – некоторое фиксированное положительное число, тогда интеграл (17) можно переписать в виде

$$\lim_{y\to0}D^{\beta-1}_{0y}u=\lim_{y\to0}\left(\int\limits_{-\infty}^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\right)\tau(s)D^{\beta-1}_{0y}\nu(s-x,y)ds.$$

Сделав замену $s-x=y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\eta$, имеем

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u=$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{\pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}+\int\limits_{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}^{\infty}\Big)\frac{\tau(x+\eta y^{\frac{\alpha+\beta}{2}})}{|\eta|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\Big(-\frac{\omega^2}{\eta^2}\Big)d\omega d\eta+$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{\pi}\int\limits_{-\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\frac{\tau(x+y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\eta)-\tau(x)}{|\eta|^{1+\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\Big(-\frac{\omega^2}{\eta^2}\Big)d\omega d\eta+$$

$$+\lim_{y\to 0}2\tau(x)\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{\pi}\int\limits_0^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}|\eta|^{-1-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\Big(-\frac{\omega^2}{\eta^2}\Big)d\omega d\eta. \quad (18)$$

Из равенства (18) следует, что

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}{\pi}\tau(x)\int\limits_0^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}|\eta|^{-1-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\Big(-\frac{\omega^2}{\eta^2}\Big)d\omega d\eta.$$

Заменой $\omega=\eta s$, имеем

$$\int\limits_0^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\eta^{-1-\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\omega}\omega^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\Big(-\frac{\omega^2}{\eta^2}\Big)d\omega d\eta=$$

$$\int\limits_0^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}d\eta\int\limits_0^{\infty}e^{-\eta s}s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-s^2)ds=\int\limits_0^{\infty}s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-s^2)\int\limits_0^{\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}e^{-\eta s}d\eta ds=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-s^2)(1-e^{-s\varepsilon/y^{\frac{\alpha+\beta}{2}}})ds,$$

получаем

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1}u=\frac{2\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}\tau(x)}{\pi}\int\limits_0^{\infty}s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-s^2)ds. \quad (18)$$

Известно, что (формула 9.42 из [15])

$$\int\limits_0^{\infty}t^{\delta-1}E_{\xi,\eta}(-\lambda t^{\varepsilon})dt=\lambda^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}\frac{\Gamma(\frac{\delta}{\varepsilon})\Gamma(1-\frac{\delta}{\varepsilon})}{\varepsilon\Gamma(\eta-\frac{\xi\delta}{\varepsilon})},$$

где $|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}$, $\xi\in(0,2)$, $\varepsilon>0$, $\delta\in(0,\varepsilon)$ если $\eta\neq\xi$ и $\delta\in(0,2\varepsilon)$ если $\eta=\xi$.

Тогда имеем

$$\int_0^\infty s^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(-s^2)ds=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Подставляя полученное в формулу (18) имеем

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u=\tau(x).$$

Таким образом, функция $u(x,y)$, определенная формулой (3), является регулярным решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (2) в области Ω. Теорема 1 доказана.

Теорема. *Пусть* $u_x, y^{1-\alpha}D_{0y}^{\beta}u\in C(\bar{\Omega})$, *и пусть*

$$\lim_{|x|\to\infty}u_x\cdot D_{0y}^{\beta-1}u=0,\quad 0<y<\infty, \tag{20}$$

$$\lim_{y\to\infty}D_{0y}^{\beta-1}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u=0,\quad -\infty<x<\infty. \tag{21}$$

Тогда исследуемая задача имеет не более одного регулярного решения.

Доказательство. Докажем, что при выполнении условий теоремы 2 уравнение (1) в верхней полуплоскости имеет только нулевое решение, если

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\beta-1}u(x,y)=0, -\infty<x<\infty. \tag{22}$$

Пусть a и b – некоторые положительные числа. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-a}^{a}\int_0^b D_{0y}^{\beta-1}u\cdot Lu\,dxdy,\quad L\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+D_{0y}^{\alpha}D_{0y}^{\beta}.$$

Тогда

$$D_{0y}^{\beta-1}u\cdot Lu\equiv(u_xD_{0y}^{\beta-1}u)_x-u_xD_{0y}^{\beta-1}u_x+(D_{0y}^{\beta-1}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u)_y-D_{0y}^{\beta}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u,$$

и, следовательно,

$$\int_{-a}^{a}\int_0^b D_{0y}^{\beta-1}u\cdot Lu\,dxdy=$$

$$\int_0^b\{u_x(a,y)D_{0y}^{\beta-1}u(a,y)-u_x(-a,y)D_{0y}^{\beta-1}u(-a,y)\}dy+\int_{-a}^{a}\{[D_{0y}^{\beta-1}uD_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u]_{y=b}-$$

$$-[D_{0y}^{\beta-1}uD_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u]_{y=0}\}dx-\int_{-a}^{a}\int_0^b\{u_xD_{0y}^{\beta-1}u_x+D_{0y}^{\beta}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u\}\,dxdy=0. \tag{23}$$

Из формулы (23) с учетом условий (20), (21) получаем

$$\lim_{a\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_{-a}^{a}\int_0^b\{u_xD_{0y}^{\beta-1}u_x+D_{0y}^{\beta}u\cdot D_{0y}^{\alpha-1}D_{0y}^{\beta}u\}dxdy=0.$$

Отсюда, в силу положительности оператора дробного интегрирования [12], получаем

$$u_x = 0, \quad D_{0y}^{\beta} u = 0.$$

Первое равенство дает, что $u(x,y) = u(y)$. Из второго равенства получаем, что

$$u(y) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

Однако

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1} u(y) = \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\beta-1} \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = 1,$$

что противоречит условию (25). Следовательно, $u(x,y) = 0$ в области Ω. Отсюда следует утверждение теоремы 2. □

Заключение

Решена краевая задача, аналогичная задаче Дирихле, для обобщённого уравнения Лапласа с дробной производной в верхней полуплоскости. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения. Результаты работы обобщают полученные ранее автором результаты (см. [8]).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

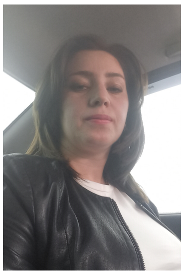
Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Благодарность. Также авторы могут выразить благодарности своим коллегам за обсуждение и подготовку статьи к печати, а также рецензентам за ценные замечания.

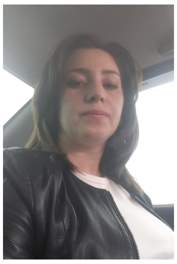
Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
3. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск, 1987. 688 с.
5. Тарасов В. Е. *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.* М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2011. 568 с.
6. Мамчуев М. О. *Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка.* Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.
7. Масаева О. Х. Единственность решения задачи Дирихле для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка, *Матем. заметки*, 2021. Т. 109, №1, С. 101–106.
8. Масаева О. Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной, *Челябинский физ.-мат. журнал*, 2017. Т. 2, №3, С. 312–322.
9. Масаева О. Х. Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат.науки*, 2018. Т. 23, №1, С. 83–90.
10. Масаева О. Х. Единственность решения задачи Дирихле для уравнения с фрактальным оператором Лапласа в главной части, *Известия КБНЦ РАН*, 2015. Т. (68)-2, №6, С. 127–130.

11. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* М.: Наука, 1966. 672 с.
12. Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа, *Дифференц. уравнения*, 1998. Т. 34, № 1, С. 101–109.
13. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. Amsterdam: North-Holland Math. Stud., 2006. 523 pp.
14. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models.* London: Imperial College Press, 2010.
15. Pskhu A. V. *The Stankovich Integral Transform and Its Applications*, Special functions and analysis of differential equations, vol. 9. New York: Chapman and Hall/CRC, 2020. 370 pp.
16. Shishkina E. L., Sitnik S. M. *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics* . Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2020. 564 pp.
17. Tarasov V. E. *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Applications in Physics, Part A,, vol. 4. Berlin, Germany: De Gruyter, 2019. 314 pp.
18. Tarasov, V. E. *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, Applications in Physics, Part B, vol. 5. Berlin, German: De Gruyter, 2019. 327 pp.



Масаева Олеся Хажисмеловна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела Дробное исчисление Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0002-0392-6189.



Masaeva Olesya Khazhismelovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Division of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0002-0392-6189.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 53–63. ISSN 2079-6641

MSC 35L05 Research Article

Solution of the boundary problem for the generalized Laplace equation with a fractional derivative

O. Kh. Masaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000,
Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, st. Shortanova, 89a, Russia
E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

In this paper, we study the Dirichlet boundary value problem in the upper half-plane for a second-order partial differential equation containing a composition of Riemann-Liouville fractional differentiation operators with respect to one of two independent variables. The equation under consideration, for an integer value of the order of fractional differentiation, passes into the Laplace equation in two independent variables. An explicit representation of the solution of the problem under study (in terms of a function of the Mittag-Leffler type) is obtained by the method of the integral Fourier transform. Asymptotic estimates for a particular solution and its derivatives are found. Theorems on the existence and uniqueness of a regular solution are proved. The existence of a solution is proved in the class of continuous functions with weight in a closed half-plane. The uniqueness of the solution is proved in the class of continuously differentiable functions with respect to the spatial variable and having a corresponding continuous fractional derivative with weight with respect to the time variable in a closed half-plane.

Key words: fractional derivative, Mittag-Leffler type function, generalized Laplace equation with fractional derivative, Dirichlet problem.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-53-63
Original article submitted: 10.10.2022 Revision submitted: 03.11.2022

For citation. Masaeva O. Kh. Solution of the boundary problem for the generalized Laplace equation with a fractional derivative. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 53-63.
DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-53-63

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was carried out within the framework of the state tasks of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation "Nonlinear singular integro-differential equations and boundary value problems" (project FEGS-2020-0001)

References

[1] Nakhushev, A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 272 (In Russian)

[2] Pskhu, A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005. 199(In Russian)

[3] Uchaikin, V. V. Metod drobnykh proizvodnykh [Method of fractional derivatives], Ulyanovsk, Artichoke, 2008, 512 (In Russian)

[4] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, Switzerland, Gordon and Breach, 1993.

[5] Tarasov V. E. Modeli teoreticheskoy fiziki s drobnym integro-differentsirovaniyem [Models of Theoretical Physics with Fractional Integro-Differentiation], Institute of Computer Research, M.–Izhevsk, 2011, 568,(In Russian)

[6] Mamchuev M. O. Krayevyye zadachi dlya uravneniy i sistem differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Boundary Value Problems for Equations and Systems of Partial Differential Equations of Fractional Order]. Nalchik: KBNTs RAS, 2013. 200,(In Russian)

[7] Masaeva O. Kh. Uniqueness of the Solution of the Dirichlet Problem for a Multidimensional Differential Equation of Fractional Order, Math. Notes, 2021, 109:1, 89–93.

[8] Masaeva O. Kh. The Dirichlet problem for the generalized Laplace equation with a fractional derivative, Chelyabinsk Phys.-Math. journal, 2017, 2:3, 312–322,(In Russian)

[9] Masaeva O. Kh. The Neumann problem for the generalized Laplace equation, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat.Nauki, 2018, 23:3, 83–90,(In Russian)

[10] Masaeva O. Kh. The uniqueness of solution of the Dirichlet problem for the equation with fractional Laplace operator in the main part, Izvestiya KBNTs RAS, 2015, 2:6(68), 127–130,(In Russian)

[11] Dzhrbashyan M. M. Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transforms and representations of functions in complex domain]. Moscow, Nauka, 1966. 672,(In Russian)

[12] Nakhushev A. M. On the Positivity of Operators of Continuous and Discrete Differentiation and integration of very important in fractional calculus and in the theory of equations of mixed type, Differ. equations, 1998, 34:1, 101–109.

[13] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Math. Stud, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006, 523.

[14] Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models, London, Imperial College Press, 2010, 155–347.

[15] Pskhu A. V. The Stankovich Integral Transform and Its Applications. In book Special functions and analysis of differential equations, N. Y., Chapman and Hall/CRC, 2020, 370.

[16] Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics, Amsterdam, Elsevier, Acad. Press, 2020, 564.

[17] Tarasov V. E. Handbook of Fractional Calculus with Applications, Vol. 4, Applications in Physics, Part A De Gruyter: Berlin, Germany, 2019.

[18] Tarasov, V. E. Handbook of Fractional Calculus with Applications, Vol. 5, Applications in Physics, Part B De Gruyter, Berlin, Germany, 2019.