УДК 517.926 Научная статья

Нелокальная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с производными Римана–Лиувилля

М. О. Мамчуев[1], *Т. И. Жабелова*[2]

[1] Институт прикладной математики КБНЦ РАН,
360017, г. Нальчик, ул. Шортанова 89-А, Россия
[2] Научно-образовательный центр КБНЦ РАН,
360010, г. Нальчик, ул. Балкарова 2, Россия

E-mail: mamchuev@rambler.ru

В работе исследуется нелокальная краевая задача для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами на отрезке $[0, l]$. Дробная производная порядка $\alpha \in (0, 1]$ понимается в смысле Римана–Лиувилля. Краевые условия связывают след дробного интеграла от искомой вектор-функции на левом конце отрезка – в точке $x = 0$, со следом самой вектор функции на правом конце отрезка – в точке $x = l$. Цель настоящей работы – построение явного представления решения данной задачи в терминах функции Грина. Исследована структура решения краевой задачи, определена и построена соответствующая функция Грина, получено представление решения. Доказана теорема об однозначной разрешимости исследуемой краевой задачи.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, производные дробного порядка, нелокальная краевая задача, функция Грина.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-42-52

Поступила в редакцию: 02.10.2022 В окончательном варианте: 17.10.2022

Для цитирования. Мамчуев М. О., Жабелова Т. И. Нелокальная краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с производными Римана–Лиувилля // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. C. 42-52. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-42-52

Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Введение

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)-Au(x)=f(x), \quad 0<\alpha\leq 1, \tag{1}$$

где D_{0t}^{γ} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля [1, с. 9], $u(x)=(u_1(x),\dots,u_n(x))$ и $f(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ – соответственно искомая и заданная вектор-функции, $A=(a_{ij})$ – действительная постоянная квадратная матрица порядка n.

Уравнения с дробными производными в последнее время находят применение в различных областях физики, химии, техники, биологии и других наук при описании математических моделей процессов с памятью и процессов, протекающих в средах с фрактальной геометрией. В этой связи мы отсылаем читателя к монографиям [1] – [4].

В частности, как отмечено в работе [5], к системам уравнений с дробными производными приводят некоторые вопросы теории вязкоупругости [6], задача определения напряжений и деформаций вращающегося пустотелого цилиндра [7], кроме того, модель эпидемии лихорадки Эбола [8], модель влияния загрязнения окружающей среды на распространение заболевания [9].

Работы [10] – [18] посвящены аналитическому и численному исследованию решений задачи Коши для систем уравнений вида (1) с постоянными и переменными коэффициентами, с производными Римана–Лиувилля, Герасимова–Капуто и Миллера–Росса. С помощью функции Миттаг-Леффлера матричного аргумента были построены фундаментальные решения и представления решений задачи Коши для таких систем с постоянными матричными коэффициентами.

В работе [19] исследована начальная задача для системы вида (1) с дробными производными Джрбашяна–Нерсесяна, доказана теорема об однозначной её разрешимости и получено общее представление решений системы.

Отметим также работы [20] и [21], посвященные задачам оптимального управления для линейных систем уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами.

В настоящей работе исследуется нелокальная краевая задача для системы уравнений (1) с краевыми условиями связывающими след дробного интеграла от искомой вектор-функции на левом конце отрезка – в точке $x=0$, со следом самой вектор-функции на правом конце отрезка – в точке $x=l$. Исследована структура решения краевой задачи, определена и построена соответствующая функция Грина, получено представление решения. Доказана теорема об однозначной разрешимости исследуемой краевой задачи.

Вспомогательные сведения

Оператор D_{ax}^{ν} дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля порядка ν определяется следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{ax}^{\nu}g(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\nu)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{|x-t|^{\nu+1}}, \quad \nu < 0,$$

при $\nu \geq 0$ оператор D_{ax}^{ν} можно определить с помощью рекурсивного соотношения

$$D_{ax}^{\nu}g(x) = \operatorname{sign}(x-a)\frac{d}{dx}D_{ax}^{\nu-1}g(x), \quad \nu \geq 0,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Известно [10] (см. также [16], [19]), что решение задачи Коши

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x) = u^0, \quad u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0) \tag{2}$$

для системы (1) имеет вид

$$u(x) = G_0(x)u^0 + \int_0^x G_0(x-t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$G_0(x) = x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(Ax^{\alpha}),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

– функция типа Миттаг-Леффлера [22].

Справедливы следующие свойства функции Миттаг-Леффлера матричного аргумента [19]:

$$E_{\alpha,\beta}(Az) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}I + AzE_{\alpha,\beta+\alpha}(Az); \tag{4}$$

$$D_{0x}^{\mu}x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = x^{\beta-\mu-1}E_{\alpha,\beta-\mu}(Ax^{\alpha}), \quad (\beta-\mu > 0); \tag{5}$$

$$(D_{0x}^{\alpha} - A)\,x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}I, \quad (\beta-\alpha \geq 0); \tag{6}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(Ax^{\alpha}) = \begin{cases} 0, & \beta > 1, \\ I, & \beta = 1, \end{cases} \tag{7}$$

где I – единичная матрица.

Постановка задачи, определения и обозначения

Определение 1. Регулярным решением системы (1) будем называть функцию $u(x) \in C(0,l]$, $D_{0x}^{\alpha-1}u(x) \in C[0,l] \cap C^1(0,l)$ удовлетворяющую уравнению (1) в интервале $(0,l)$.

Задача 1. *Найти решение системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$M \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}u(x) + Nu(l) = u^*, \quad u^* = (u_1^*, ..., u_n^*), \tag{8}$$

где M *и* N *– заданные постоянные квадратные матрицы порядка* n, u^* *– заданный вектор с постоянными компонентами.*

Пусть

$$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < l\}.$$

Определение 2. Функцию $Z(x,t)$ будем называть функцией Грина краевой задачи (1), (8) если:

1) $D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t) \in C\left(\overline{\Omega} \setminus \{x=t\}\right)$, $D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t) \in L(0,l)$ $\forall x \in (0,l)$;

2) функция $Z(x,t)$ является решением уравнения

$$D_{lt}^{\alpha}Z(x,t) - Z(x,t)A = 0, \quad t \neq x;$$

3) при $x = t$ функция $D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t)$ имеет разрыв

$$\lim_{t\to x-0} D_{lt}^{\alpha-1}Z(x,t) - \lim_{t\to x+0} D_{lt}^{\alpha-1}Z(x,t) = I;$$

4) функция $Z(x,t)$ удовлетворяет условию

$$M \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}Z(x,t) + NZ(l,t) = 0, \quad \forall t \in (0,l).$$

Пусть

$$\det(M + NG_0(l)) \neq 0. \tag{9}$$

Обозначим

$$G(x,t) = G_0(x-t)\eta(x-t) - G_0(x)K^{-1}NG_0(l-t),$$

где $\eta(x)$ – функция Хевисайда,

$$K = M + NG_0(l).$$

Функция Грина

Теорема 1. *Пусть выполняется условие (9), тогда функция* $G(x,t)$ *есть функция Грина краевой задачи* (1), (8).

Доказательство. 1) Из формулы

$$D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = D_{0x}^{\alpha-1}G_0(x-t)\eta(x-t) - D_{0x}^{\alpha-1}G_0(x) \cdot K^{-1}NG_0(l-t), \tag{10}$$

следует, что $G(x,t)$ удовлетворяет свойству 1) функции Грина.

2) Принимая во внимание следующие равенства

$$D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t) = D_{xt}^{\alpha-1}G_0(x-t)\eta(x-t) - G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t), \tag{11}$$

$$D_{xt}^{\mu}G_0(x-t) = D_{0z}^{\mu}G_0(z)|_{z=x-t}, \tag{12}$$

получим

$$D_{lt}^{\alpha}G(x,t) = D_{xt}^{\alpha}G_0(x-t)\eta(x-t) - G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha}G_0(l-t). \tag{13}$$

Из (13) с учетом (6) и (12), получим

$$D_{lt}^{\alpha}G(x,t) - G(x,t)A = 0, \quad t \neq x. \tag{14}$$

3) Из (11) следуют соотношения

$$\lim_{t\to x-0} D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t) = I - G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t),$$

$$\lim_{t\to x+0} D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t) = -G_0(x)K^{-1}ND_{lt}^{\alpha-1}G_0(l-t).$$

Последние соотношения дают

$$\lim_{x\to t+0} D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t) - \lim_{x\to t-0} D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t) = I. \tag{15}$$

4) Из равенства (10), с учетом (5) и (7), получим

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) = -K^{-1}NG_0(l-t).$$

Из последнего равенства, вместе с равенством

$$G(l,t) = G_0(l-t) - K^{-1}NG_0(l-t),$$

вытекает

$$\begin{gathered} M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}G(x,t) + NG(l,t) = \\ = NG_0(l-t) - (M+NG_0(l))(M+NG_0(l))^{-1}NG_0(l-t) = \\ = NG_0(l-t) - NG_0(l-t) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Из равенств (14), (15), (16) следует справедливость теоремы 1. □

Теорема существования и единственности

Теорема 2. *Пусть* $\det(M+NG_0(l)) \neq 0$, $f(x) \in C(0,l)\cap L(0,l)$. *Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1), (8). Решение имеет вид*

$$u(x) = \left[G(x,0) - G_1(x,l)G_0(l)\right]K^{-1}u^* + \int_0^l G(x,t)f(t)dt, \tag{17}$$

где $G_1(x,t) = D_{lt}^{\alpha-1}G(x,t)$.

Доказательство. Удовлетворяя (3) условию (8), получим

$$Mu^0 + NG_0(l)u^0 + N\int_0^l G_0(l-t)f(t)dt = u^*. \tag{18}$$

При условии (9) система (18) имеет единственное решение

$$u^0 = (M + NG_0(l))^{-1}\left(u^* - N\int_0^l G_0(l-t)f(t)dt\right), \tag{19}$$

и нелокальная краевая задача (1), (8) эквивалентно редуцируется к задаче Коши (2), (3), в которой начальные условия определяются равенством (19). Следовательно, решение задачи (1), (8) единственно.

Покажем, что (17) является решением задачи 1. Замечая, что

$$G(x,0) - G_1(x,l)G_0(l) = G_0(x),$$

равенство (17) можно переписать в виде

$$u(x) = G_0(x)K^{-1}u^* + \int_0^l G(x,t)f(t)dt. \tag{20}$$

Обозначим первое и второе слагаемые в правой части (20) $u_*(x)$ и $u_f(x)$ соответственно. Из (6) следует

$$D_{0x}^{\alpha}u_*(x) = Au_*(x). \tag{21}$$

Функцию $u_f(x)$ запишем в виде

$$u_f(x) = \int_0^x G_0(x-t)f(t)dt - G_0(x)K^{-1}N\int_0^l G_0(x-t)f(t)dt = u_f^1(x) + u_f^2(x).$$

Пользуясь равенствами (4) и (5), получим

$$D_{0x}^{\alpha}u_f^1(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x D_{xt}^{\alpha-1}G_0(x-t)f(t)dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x \left[I + A(x-t)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(A(x-t)^{\alpha-1}\right)\right]f(t)dt = Au_f^1(x) + f(x). \tag{22}$$

В силу равенства (6) имеем

$$D_{0x}^{\alpha}u_f^2(x) = Au_f^2(x). \tag{23}$$

Из (21)–(23) следует, что функция $u(x)$ является решением уравнения (1).

Покажем, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию (8). Нетрудно заметить, что

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_*(x) = K^{-1}u^*, \quad u_*(l) = G_0(l)K^{-1}u^*,$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) = \int\limits_0^l \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t)f(t)dt, \quad u_f(l) = \int\limits_0^l G(l,t)f(t)dt.$$

Из последних равенств с учетом (16), получим

$$M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_*(x) + Nu_*(l) = (M + NG_0(l))\,K^{-1}u^* = u^*. \tag{24}$$

$$M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_f(x) + Nu_f(l) = \int\limits_0^l \left[M\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} G(x,t) + NG(l,t)\right] f(t)dt = 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что функция $u(x)$ удовлетворяет условию (8). Таким образом, доказаны существование и единственность решения задачи 1. □

Заключение

В работе доказана теорема об однозначной разрешимости нелокальной краевой краевой задачи для линейной системы уравнений в случае когда порядок дробной производной Римана–Лиувилля не превышает единицы. Исследована структура решения, построено представление решения в виде формулы Грина. Определена и построена функция Грина исследуемой задачи. В дальнейшем это позволит исследовать более общие постановки краевых задач для случаев систем с операторами произвольного дробного порядка, в том числе и операторами обобщенного дробного дифференцирования.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов в отношении авторства и публикации.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы внесли свой вклад в эту статью. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательный вариант рукописи был одобрен всеми авторами.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus (Theory and applications of of differentiation and integration to arbitrary order).* N.Y., London: Academic press, 1974. 233 pp.
3. Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics.* Singapore: World scientific, 2000
4. Учайкин В. В. *Метод дробных производных.* Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. Вебер В. К. Линейные уравнения с дробными производными и постоянными коэффициентами в пространствах обобщенных функций / *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии*, Т. 18. Фрунзе, Илим, 1985, С. 306–312.
6. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твердых тел.* М.: Наука, 1977. 384 с.

7. Розовский М. И. Интегральные операторы и задача о ползучести вращающегося вокруг своей оси пустотелого цилиндра, *Науч. докл. высш. школы, физ.-мат. науки*, 1958. №6, С. 147–150.
8. Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A. On a fractional order Ebola epidemic model, *Advances in Difference Equations*, 2015. vol. 2015, no. 278, pp. 1–12 DOI: 10.1186/s13662-015-0613-5.
9. Yildiz T. A. Optimal control problem of a non-integer order waterborne pathogen model in case of environmental stressors, *Frontiers in Physics*, 2015. vol. 7, no. 95, pp. 1–10 DOI: 10.3389/fphy.2019.00095.
10. Вебер В. К. Структура общего решения системы $y^{(\alpha)} = Ay$, $0 < \alpha \le 1$, *Тр. Кирг. ун-та. Сер. мат. наук.*, 1976. №11, С. 26–32.
11. Иманалиев М. И., Вебер В. К. Об одном обобщении функции типа Миттаг-Леффлера и его применении / *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии*, Т. 13. Фрунзе, Илим, 1980, С. 49–59.
12. Вебер В. К. Асимптотическое поведение решений линейной системы дифференциальных уравнений дробного порядка / *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии*, Т. 16. Фрунзе, Илим, 1983, С. 119–125.
13. Вебер В. К. К общей теории линейных систем с дробными производными / *Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии*, Т. 18. Фрунзе, Илим, 1985, С. 301–305.
14. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка, *Доклады Национальной академии наук Украины*, 2007. №1, С. 53–55.
15. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J. J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 2007. vol. 187, no. 1, pp. 68–78 DOI: 10.1016/j.amc.2006.08.104.
16. Chikriy A. A., Matichin I. I. Presentation of Solutions of Linear Systems with Fractional Derivatives in the Sense of Riemann-Liouville, Caputo, and Miller-Ross, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2008. vol. 40, no. 6, pp. 1–11 DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v40.i6.10.
17. Matichin I., Onyshchenko V. Optimal control of linear systems with fractional derivatives, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2018. vol. 21, no. 1, pp. 134–150 DOI: 10.1515/fca-2018-0009.
18. Matichin I., Onyshchenko V. Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation, *Bulletin of the Polish academy of sciences Technical sciences*, 2018. vol. 66, no. 4, pp. 495–500 DOI: 10.24425/124266.
19. Mamchuev M. O. Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order, *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 9:1475, pp. 1–11 DOI:10.3390/math8091475.
20. Kamocki R., Majewski M. Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization, *Optimal Control Applications and Methods*, 2015. vol. 36, no. 6, pp. 953–967 DOI: 10.1002/oca.2150.
21. Buedo-Fernández S., Nieto J. J. Basic control theory for linear fractional differential equations with constant coefficients, *Frontiers in Physics*, 2020. vol. 8, no. 377, pp. 1–6 doi: 10.3389/fphy.2020.00377.
22. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* Москва: Наука, 1966. 672 с.

Мамчуев Мурат Османович – доктор физико-математических наук, заведующий отделом Дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0002-7986-456X.

Жабелова Танзиля Исмаиловна – аспирант Научно-образовательного центра КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0001-8447-071X.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 42–52. ISSN 2079-6641

MSC 34A30 Research Article

Non-local boundary value problem for a system of ordinary differential equations with Riemann–Liouville derivatives

M. O. Mamchuev[1], *T. I. Zhabelova*[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC of RAS, 360017, Nalchik, Shortanov str. 89-A, Russia,

[2] Scientific and educational center of KBSC of RAS, 360010, Nalchik, Balkarov str., 4, Russia

E-mail: mamchuev@rambler.ru

We study a nonlocal boundary value problem for a linear system of ordinary differential equations of fractional order with constant coefficients on the interval $[0, l]$. The fractional derivative of order $\alpha \in (0, 1]$ is understood in the Riemann–Liouville sense. The boundary conditions connect the trace of the fractional integral of the desired vector function at the left end of the segment – at the point $x = 0$, with the trace of the vector function itself at the right end of the segment at the point $x = l$. The purpose of this work is to construct an explicit representation of the solution of this problem in terms of the Green's function. The structure of the solution to the boundary value problem is investigated, the corresponding Green's function is defined and constructed, and the representation of the solution is obtained. A theorem on the unique solvability of the boundary value problem under study is proved.

Key words: system of ordinary differential equations, fractional derivatives, non-local boundary value problem, Green's function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-42-52

Original article submitted: 02.10.2022 Revision submitted: 17.10.2022

For citation. Mamchuev M. O., Zhabelova T. I. Non-local boundary value problem for a system of ordinary differential equations with Riemann–Liouville derivatives. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 42-52. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-42-52

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The study was carried out without support from foundations.

References

[1] Nakhushev A. M. Drobnoye ischislenie i ego primenenie [Fractional Calculus and Its Application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 (In Russian)

[2] Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus (Theory and applications of of differentiation and integration to arbitrary order. N.Y., London, Acad. press, 1974, 233.

[3] Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. Singapore, World scientific, 2000.

[4] Uchaykin V. V. Metod drobnyh proizvodnyh [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk, Artishok, 2008, 512.

[5] Veber V. K. Linear equations with fractional derivatives and constant coefficients in spaces of generalized functions, Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii, Ilim: Frunze, USSR, 1985, 18, 306–312 (In Russian)

[6] Rabotnov Yu. N. Elementy nasledstvennoj mekhaniki tverdyh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Nauka, 1977, 384 (In Russian)

[7] Rozovskij M. I. Integral operators and the problem of creep of a hollow cylinder rotating around its axis, Nauchnye doklady vysshej shkoly. Fiz.-mat. nauki, 1958, 6, 147—150. (In Russian)

[8] Area I., Batarfi H., Losada J., Nieto J. J., Shammakh W., Torres A. On a fractional order Ebola epidemic model, Advances in Difference Equations, 2015, 2015:278, pp. 1–12, DOI: 10.1186/s13662-015-0613-5

[9] Yıldız T. A. Optimal control problem of a non-integer order waterborne pathogen model in case of environmental stressors, Frontiers in Physics, 2019, 7:95, 1–10, DOI: 10.3389/fphy.2019.00095

[10] Veber V. K. The structure of general solution of the system $y^{(\alpha)} = Ay$, $0 < \alpha \leq 1$, Trudy Kirgiz. Gos. Univ. Ser. Mat. Nauk, 1976, 11, 26–32 (In Russian)

[11] Imanaliev M. I., Veber V. K. On a generalization of a function of Mittag-Leffler type and its application, Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii, Ilim: Frunze, USSR, 1980, 13, 49–59 (In Russian)

[12] Veber V. K. Asymptotic behavior of solutions of a linear system of differential equations of fractional order, Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii, Ilim: Frunze, USSR, 1983, 16, pp. 119–125 (In Russian)

[13] Veber V. K. On the general theory of linear systems with fractional derivatives, Issledovaniya po integro-differentsial'nym uravneniyam v Kirgizii, Ilim: Frunze, USSR, 1985, 18, 301–305 (In Russian)

[14] Chikriy A. A., Matichin I. I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2007, 1, 53–55.

[15] Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Applied Mathematics and Computation, 2007, 187:1, 68–78. DOI: 10.1016/j.amc.2006.08.104

[16] Chikriy A. A., Matichin I. I. Presentation of Solutions of Linear Systems with Fractional Derivatives in the Sense of Riemann-Liouville, Caputo, and Miller-Ross, Journal of Automation and Information Sciences, 2008, 40, 6, pp. 1–11. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v40.i6.10

[17] Matichin I., Onyshchenko V. Optimal control of linear systems with fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2018, 21:1, 134–150, DOI: 10.1515/fca-2018-0009

[18] Matichin I., Onyshchenko V. Matrix Mittag-Leffler function in fractional systems and its computation, Bulletin of the Polish academy of sciences. Technical sciences, 2018, 66:4, pp. 495–500, DOI: 10.24425/124266

[19] Mamchuev M. O. Cauchy problem for a linear system of ordinary differential equations of the fractional order, Mathematics, 2020, 8, pp. 1–11, DOI:10.3390/math8091475
[20] Kamocki R., Majewski M. Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization, Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36:6, 953–967, DOI: 10.1002/oca.2150
[21] Buedo-Fernández S., Nieto J. J. Basic control theory for linear fractional differential equations with constant coefficients, Frontiers in Physics, 2020, 8:377, 1–6, DOI: 10.3389/fphy.2020.00377
[22] Dzhrbashyan M. M. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkcij v kompleksnoj oblasti [Integral transformations and representations of functions in the complex domain]. Moscow, Nauka, 1966, 672 (In Russian)

Mamchuev Murat Osmanovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Head of the Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0002-7986-456X.

Zhabelova Tanzilya Ibragimovna – Post-graduate student of the Scientific and Educational Center of the KBSC RAS, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0001-8447-071X.