УДК 517.9 Научная статья

Обратная задача для уравнения Мак-Кендрика фон Ферстера с оператором Капуто

Ф. М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова 89А, Кабардино-Балкарская Республика, Россия
E-mail: losanovaf@gmail.com

Операторы дробного интегро-дифференцирования широко применяются при исследовании прикладных задач, изучающих математические модели физических и геофизических процессов во фрактальных средах. Производная дробного порядка не является локальной, что демонстрирует поведение с долговременной памятью. Благодаря этому, модели динамических систем дробного порядка более точные, чем целочисленные. В данной работе рассматривается обратная задача для обобщенной математической модели биологического процесса, характеризующей динамику численности популяции с возрастной структурой. Обобщение определяется введением в уравнение производной дробного порядка в смысле Капуто.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения Мак-Кендрика фон Ферстера, дробная производная, уравнение рождаемости.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118

Поступила в редакцию: 03.11.2022 В окончательном варианте: 02.12.2022

Для цитирования. Лосанова Ф. М. Обратная задача для уравнения Мак-Кендрика фон Ферстера с оператором Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. C. 111-118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118

Введение

Определение основных причин и факторов, которые влияют на изменение численности биологических популяций является основным вопросом при изучении динамики численности популяций. Наиболее эффективным способом исследования данного вопроса является разработка и анализ соответствующей математической модели. Количественное математическое описание как динамики отдельных

Финансирование. Работа выполнена без поддержки фондов

биологических популяций, так и сообществ, состоящих из многих взаимодействующих между собой популяций различных видов, имеет солидную историю.

Математическое исследование биологических проблем началось недавно. Лотка в своей книге "Элементы физической биологии содержащей многочисленные приложения математики к вопросам химии и биологии, рассмотрел случай двух видов, получил геометрическую интерпретацию вариаций, оценил период колебаний.

Одной из первых моделей динамики роста популяций является модель, предложенная Мальтусом [1], в основе которой лежит задача о динамике численности популяции. Это классическая модель неограниченного роста - геометрическая прогрессия в дискретном представлении $x_{n+1} = qx_n$, или экспонента в непрерывном случае. Она может быть записана в виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t), \qquad N(t) = N(0)e^{\mu t},$$

где $N(t)$ – численность популяции, μ – разность между коэффициентами рождаемости и смертности.

При $\mu > 0$ данная модель дает безграничный экспоненциальный рост численности популяции. Но этот эффект не наблюдается в природных популяциях, где ресурсы, обеспечивающие рост, всегда ограничены.

Базовые модели способствуют описанию некоторых качественных свойств живых систем в математической биологии ([2], с. 15). Известное уравнение Мак-Кендрика – фон Ферстера вида [3], [4] используется для описания развития замкнутой популяции особей с учетом межвозрастных взаимодействий.

В данной работе рассматривается обратная задача для обобщенной математической модели биологического процесса, характеризующей динамику численности популяции с возрастной структурой.

Обобщение определяется введением в уравнение Мак-Кендрика – фон Ферстера производной дробного порядка в смысле Капуто.

Производная дробного порядка не является локальной, что демонстрирует поведение с долговременной памятью. Благодаря этому, модели динамических систем дробного порядка более точные, чем целочисленные. Другими словами, применение аппарата дробного исчисления позволяет осуществить учет влияния биологического явления последействия на численность популяции или на ее биомассу ([5], с. 109).

Прямая задача

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1\}$ исследуем математическую модель популяции биологических объектов

$$\partial_{0t}^{\alpha} u(x,t) + u_x(x,t) = -c(x)u(x,t), \quad 0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1; \tag{1}$$

$$u(0,t)=\int\limits_0^1 M(\xi)u(\xi,t)d\xi,\quad 0\le t\le 1;\tag{2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1.\tag{3}$$

Здесь $u(x,t)$ – плотность популяции возраста x в момент времени t, $c(x)$ – коэффициент скорости смертности объектов, $\varphi(x)$ – начальное распределение плотности объектов и $M(x)$ – относительный коэффициент скорости рождения объектов. Функции $c(x)$, $M(x)$, $\varphi(x)$ положительны, $\partial_{0t}^{\alpha}g(x,t)=D_{0t}^{\alpha-1}g'(x,t)$ – регуляризованная дробная производная (производная Капуто) ([6], с. 11), $0<\alpha\le 1$, D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования Римана – Лиувилля ([6], с. 9).

Уравнение вида (1) были рассмотрены многими авторами. Для линейного дифференциального уравнения вида (1) с постоянными коэффициентами решена задача Коши в прямоугольной области в работе [7]. Для уравнения (1) с оператором Римана-Лиувилля с переменными коэффициентами в работе [8] доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи в прямоугольной области, а в работе [9] для того же уравнения доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши в нелокальной постановке. В [10] рассмотрена краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего единицу в области с криволинейной границей. При $\alpha=1$ в работе [11] была рассмотрена динамика популяции, основанная на возрастной модели, учитывающей эффект «насыщения», в работе [12] рассмотрена конечно-разностная модель, позволяющая описать возрастную структуру изолированной популяции. Также автором были рассмотрены различные краевые задачи для обобщенного уравнения Мак-Кендрика – фон Ферстера в работах [13] – [14].

Условие (2) называется уравнением рождаемости ([5], с. 121), где $u(0,t)$ — плотность численности новорожденных особей популяции.

Начальное условие (3) необходимо для изучения динамики возрастной структуры популяции.

Решение задачи (1)-(3) для заданных $c(x)$, $M(x)$ и $\varphi(x)$ может быть представлено в виде [13]

$$u(x,t)=e^{-\int\limits_0^x c(\xi)d\xi}\left[\int\limits_0^t \psi(\eta)\omega(x,t-\eta)d\eta+\int\limits_0^x \varphi(\xi)e^{-\int\limits_0^\xi c(s)ds}\omega(x-\xi,t)d\xi\right],\tag{4}$$

если выполняется условие согласования

$$\varphi(0)=\int\limits_0^1 M(\xi)\varphi(\xi)d\xi,\tag{5}$$

и

$$\omega(x,t)=x^{\alpha-1}/te_{1,\alpha}^{1,0}(-x^{\alpha}/t^{\alpha}),\quad \psi(t)=F(t)-\int\limits_0^t R(t-\eta)F(\eta)d\eta,$$

где $R(t-\eta)$ – резольвента ядра $M_1(t-\eta)$

$$M_1(t-\eta)=\int\limits_0^1 M(\xi)e^{-\int\limits_0^{\xi} c(s)ds}\frac{1}{t-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{\xi}{(t-\eta)^{\alpha}}\right)d\xi,$$

$$F(t)=u(0,t)+\int\limits_0^1 M(\xi)e^{-\int\limits_0^{\xi} c(s)ds}\int\limits_0^{\xi}\varphi(\xi_1)e^{-\int\limits_0^{\xi_1} c(s_1)ds_1}\frac{1}{\xi-\xi_1}e^{0,1}_{1,\alpha}\left(-\frac{\xi-\xi_1}{t^{\alpha}}\right)d\xi_1 d\xi,$$

где $e^{1,\mu}_{1,\rho}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\mu-\rho n)}$ — функция Райта ([15], стр. 23).

Обратная задача

Рассмотрим обратную задачу. Пусть $M(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а $c(x)$ – неизвестна. Необходимо определить эту функцию при заданном дополнительном условии задачи (1)–(3)

$$u(x,t_0)=p(x),\qquad 0\le x\le 1, 0\le t_0\le 1, \tag{6}$$

где $p(x)$ – известная положительная функция.

Пусть положительная непрерывная функция $c(x)$ является решением этой обратной задачи. Выведем нелинейное интегральное уравнение для этой функции.

Обозначим в формуле (4)

$$C(x)=e^{-\int\limits_0^{x} c(\xi)d\xi}, \tag{7}$$

а также положим в (4) $t=t_0$ и применим условие (6). Получим

$$p(x)C(x)-\int\limits_0^x\varphi(\xi)C(\xi)\omega(x-\xi,t_0)d\xi=\int\limits_0^{t_0}\psi(\eta)\omega(x,t_0-\eta)d\eta. \tag{8}$$

Уравнение (8) является интегральным уравнением Вольтерра 3-го рода. Согласно условию $p(x)>0$ из (8) получаем

$$C(x)-\int\limits_0^x C(\xi)K(x,\xi)d\xi=f(x), \tag{9}$$

где

$$K(x,\xi)=\frac{1}{p(\xi)}\varphi(\xi)\omega(x-\xi,t_0),\quad f(x)=\int\limits_0^{t_0}\frac{\psi(\eta)}{p(x)}\omega(x,t_0-\eta)d\eta.$$

Уравнение (9) является интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода, решение которого имеет вид

$$C(x)=f(x)+\int\limits_0^x f(\xi)R(x,\xi)d\xi,$$

где $R(x,\xi)$ – резольвента ядра $K(x,\xi)$ и выписывается в виде

$$R(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{n+1}(x,\xi),K_{n+1}(x,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}K(x,s)K_n(s,\xi)ds.$$

Сделав обратную замену (7), получим

$$c(x)=\frac{d}{dx}\ln\left[f(x)+\int\limits_{0}^{x}f(\xi)R(x,\xi)d\xi\right]. \tag{10}$$

Сформулируем теорему

Теорема. *Пусть функции* $M(x)$, $\varphi(x)$, $p(x)$ *– положительны и непрерывны на* $[0,1]$. *Тогда существует решение обратной задачи (1)–(8) с дополнительным условием (6) в области* Ω, *которое представимо в виде (10).*

Заключение

Таким образом в работе была рассмотрена обратная задача для обобщенной математической модели биологического процесса, характеризующей динамику численности популяции с возрастной структурой. Обобщенная математическая модель содержит производную дробного порядка в смысле Капуто.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Malthus T. R. *An Essay on the principe of population Johnson.* London, 1788.
2. Ризниченко Г. Ю. *Лекции по математическим моделям в биологии (изд. 2-е, испр. и дополн.)*: Издательство РХД, 2011. 560 с.
3. McKendrik A. G. Applications of mathematics to medical problems, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1926. Т. 44, № 1, С. 98-130.
4. Von Foerster H. Some remarks on changing populations, *In: F. Stohlman (Ed.), The Kinetics of Cellular proliferation. New York: Grune and Stratton*, 1959, С. 382-407.
5. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
6. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Псху А.В. Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка, *Известия КБНЦ РАН*, 2002. № 1(8), С. 76-78.
8. Мамчуев М. О. Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами, *Доклады АМАН*, 2009. Т. 11, № 1, С. 32-35.
9. Мамчуев М. О. Задача Коши в нелокальной постановке для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами, *Доклады АМАН*, 2009. Т. 11, № 2, С. 21-24.
10. Псху А.В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей, *Дифференц. уравн.*, 2015. Т. 51, № 8, С. 1076-1082.

11. Кайгермазов А. А., Кудаева Ф. Х. Стационарные состояния обобщенной популяционной модели Вейбулла, *Южно – Сибирский научный вестник*, 2015. № 1(19), март, С. 10 – 14.
12. Ковалева М. О. Возрастная структура изолированной популяции, *Сборник трудов I Всероссийского конгресса молодых ученых. Спб: НИУ ИТМО*, 2012, С. 15-20.
13. Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О. Нелокальная задача для обобщенного уравнения Мак-Кендрика – фон Ферстера с оператором Капуто, *Нелинейный мир*, 2018. Т. 16, № 1, С. 49-53.
14. Кенетова Р. О., Лосанова Ф. М. О нелокальной краевой задаче для обобщенного уравнения Маккендрика-Фон Ферстера, *Известия КБНЦ РАН*, 2017. № 2 (76), С. 49-53.
15. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с.

Лосанова Фатима Мухамедовна – научный сотрудник лаборатории Синергетических проблем Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия, ORCID 0000-0002-6342-7162.

MSC 26A33 Research Article

Inverse problem for McKendrick von Foerster equation with Caputo operator

F. M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,
Nalchik, Shortanova str., 89A, Kabardino-Balkarian Republic, Russia
E-mail: losanovaf@gmail.com

Fractional integro-differentiation operators are widely used in the study of applied problems that study mathematical models of physical and geophysical processes in fractal media. The fractional order derivative is not local, which exhibits behavior with long-term memory. Due to this, the models of dynamical systems of fractional order are more accurate than integer ones. In this paper, we consider an inverse problem for a generalized mathematical model of a biological process that characterizes the dynamics of a population with an age structure. The generalization is defined by introducing a derivative of a fractional order in the sense of Caputo into the equation.

Key words: inverse problem, McKendrick von Foerster equations, fractional derivative, fertility equation.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118

Original article submitted: 03.11.2022 Revision submitted: 02.12.2022

For citation. Losanova F. M. Inverse problem for McKendrick von Foerster equation with Caputo operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 111-118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-111-118

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

References

[1] Malthus T. R. An Essay on the principe of population Johnson. London, 1788.

[2] Riznichenko G. Y. Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii [Lectures on mathematical models in biology]. Izdatel'stvo RKHD, 2011. 560 (In Russian)

Funding. The work was done without the support of funds

[3] McKendrik A. G. Applications of mathematics to medical problems. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1926, 44:1, 98–130.

[4] Von Foerster H. Some remarks on changing populations. In: F. Stohlman (Ed.), The Kinetics of Cellular proliferation. New York: Grune and Stratton, 1959, 382–407.

[5] Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoy biologii [Equations of mathematical biology]. Moscow, Vyssh. shk., 1995, 301 (In Russian)

[6] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Дробное исчисление и его применение]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 (In Russian)

[7] Pskhu A. V. Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka. Izvestiya KBNTS RAN, 2002, 1(8), 76–78 (In Russian)

[8] Mamchuev M. O. Krayevaya zadacha dlya uravneniya pervogo poryadka s chastnoy proizvodnoy drobnogo poryadka s peremennymi koeffitsiyentami. Doklady AMAN, 2009, 11:1, 32–35 (In Russian)

[9] Mamchuev M. O. Zadacha Koshi v nelokal'noy postanovke dlya uravneniya pervogo poryadka s chastnoy proizvodnoy drobnogo poryadka s peremennymi koeffitsiyentami. Doklady AMAN, 2009, 11:2, 21–24(In Russian)

[10] Pskhu A. V. On a boundary value problem for a fractional partial differential equation in a domain with curvilinear boundary, Differential Equations, 2015, 51:8, DOI: 10.1134/S001226611508011X.

[11] Kaygermazov A. A., Kudayeva F. Kh. Statsionarnyye sostoyaniya obobshchen-noy populyatsionnoy modeli Veybulla. Yuzhno – Sibirskiy nauchnyy vestnik, 2015, 17:1(19), 10–14 (In Russian)

[12] Kovaleva M. O. Vozrastnaya struktura izolirovannoy populyatsii. Sbornik trudov I Vserossiyskogo kongressa molodykh uchenykh. Spb: NIU ITMO, 2012, 15–20 (In Russian)

[13] Losanova F. M., Kenetova R. O. Nelokal'naya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Mak-Kendrika – fon Ferstera s operatorom Kaputo. Nelineynyy mir, 2018, 16:1, 49–53 (In Russian)

[14] Kenetova R. O., Losanova F. M. O nelokal'noy krayevoy zadache dlya obobshchennogo uravneniya Makkendrika-Fon Ferstera. Izvestiya KBNTS RAN, 2017, 2(76), 49–53 (In Russian)

[15] Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 2005, 199 (In Russian)

Losanova Fatima Mukhamedovna✉ – Researcher, Laboratory of Synergetic Problems, Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Nalchik, Kabardino-Balkarian Republic, Russia, ORCID 0000-0002-6342-7162.